



CiemaE UCM

Centro de Investigación en
Educación Matemática y Estadística
Universidad Católica del Maule

Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística



Editores:

Danilo Díaz-Levicoy - Audy Salcedo

INVESTIGACIONES SOBRE LIBROS DE TEXTO PARA EL
DESARROLLO DE LA CULTURA ESTADÍSTICA Y
PROBABILÍSTICA

INVESTIGACIONES SOBRE LIBROS DE TEXTO PARA EL DESARROLLO DE LA CULTURA ESTADÍSTICA Y PROBABILÍSTICA

Editores

Danilo Díaz-Levicoy (*Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule*)

Audy Salcedo (*Grupo Interdisciplinario de Investigación en Educación para la primera infancia, Universidad Autónoma de Chile*)

Autores

Edvonete Souza de Alencar (*Universidad de Brasília, Brasil*) • Pedro Arteaga (*Universidad de Granada, España*) • Elizabeth H. Arredondo (*Universidad de Los Lagos, Chile*) • Paula Maria Barros (*Instituto Politécnico de Bragança, Portugal*) • Carmen Batanero (*Universidad de Granada, España*) • Ana Paula Bolsan Sagrilo (*Secretaria Municipal de Educación de la Prefeitura de Santiago, Brasil*) • Jaime Andrés Camaño Meza (*Universidad de Sucre, Colombia*) • Caroline Contreras Osorio (*Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile*) • Macarena Elgueta-Ibarra (*Universidad de Granada, España*) • José António Fernandes (*Universidade do Minho, Portugal*) • Jaime I. García-García (*Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile*) • María M. Gea Serrano (*Universidad de Granada, España*) • Gilda Lisbôa Guimarães (*Universidade Federal de Pernambuco, Brasil*) • Javier Enrique Hernández Pino (*Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile*) • Ane Izagirre Korta (*Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, España*) • María del Mar López-Martín (*Universidad de Almería, España*) • Lizzet Morales Garcia (*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México*) • Catalina Navarro Sandoval (*Universidad Autónoma de Guerrero, México*) • Ailton Paulo de Oliveira Júnior (*Universidade Federal do ABC, Brasil*) • Ana Meire de Oliveira Morais (*Universidade Federal do ABC, Brasil*) • Jocelyn D. Pallauta (*Universidad de Los Lagos, Chile*) • Juan Luis Piñeiro G. (*Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile*) • André Fellipe Queiroz Araújo (*Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, Brasil*) • Francisco Rodríguez-Alveal (*Universidad del Bío-Bío, Chile*) • Blanca Ruiz Hernández (*Tecnológico de Monterrey, México*) • Nicolás Sánchez Acevedo (*Universidad Central de Chile, Chile*) • Luzia Roseli da Silva Santos (*Universidade Federal do ABC, Brasil*) • Chia Shih Su (*Universidad Católica del Maule, Chile*) • Anita Sundrani (*Northwestern University, Estados Unidos*) • Víctor Torres-Escoriza (*Universidad de Almería, España*) • Osmar D. Vera (*Universidad de Cádiz, España*) • Travis Weiland (*University of North Carolina Charlotte, Estados Unidos*).



**Facultad
de Ciencias
Básicas**



CiemaeUCM
Centro de Investigación en
Educación Matemática y Estadística
Universidad Católica del Maule

CRÉDITOS

Publicación del Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística.

Directora: Dra. María Aravena Díaz.

Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística.

Editores: Danilo Díaz-Levicoy • Audy Salcedo.

ISBN: 978-956-6067-95-5

Todos los capítulos que conforman el libro fueron seleccionados por arbitraje externo, mediante el sistema doble ciego.

Diseño y diagramación: Danilo Díaz-Levicoy

Portada: Luis A. Espinoza Sepúlveda (lespinoz@ucm.cl)

Libro de acceso libre. Noviembre 2024

Este libro se distribuye bajo los términos de Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 - <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>), que permite cualquier uso no comercial, duplicación, adaptación, distribución y reproducción en cualquier medio o formato, siempre que dé el crédito apropiado al autor(es) original(es) y a la fuente.

Publicado por:

Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística

Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Católica del Maule

Campus San Miguel, Avenida San Miguel 3605, Talca, Chile

Teléfono: +56 71 298 6000

ÍNDICE

Prólogo	7
La probabilidad en los libros de texto: investigación desde el enfoque ontosemiótico	13
Medidas de tendencia central en los libros de texto: una mirada desde la alfabetización y pensamiento estadístico.....	41
Livros didáticos do novo ensino médio brasileiro: uma análise sobre a abordagem do conceito de amostragem e curva normal.....	69
Análisis del significado de la probabilidad en los libros de texto de quinto y sexto de Educación Primaria	99
Estudo de dados e probabilidades em manuais escolares portugueses dos primeiros anos escolares	129
Representación de género en tareas de estadística y probabilidad de los libros de matemática de 3° y 4° de Educación Secundaria en Chile	159
Gráficos estadísticos y su aproximación de accesibilidad en textos escolares chilenos de 4° básico para estudiantes con discapacidad visual	185
Acercamiento a la concordancia entre programas de estudio y libros de texto en estadística en Chile. Aproximación desde inferencia informal	205
Análisis del nivel de lectura y contexto de tablas estadísticas en textos de secundaria españoles para desarrollar el sentido estocástico	239
La presencia de conceptos estadísticos en el proyecto editorial (paradidáctico) “actividades y juegos con estadística”	259
Medidas de tendencia central en libros de Educación Secundaria de la nueva escuela mexicana.....	281
Conocimiento especializado para enseñar estadística en manuales didácticos brasileños en la Educación Infantil	307
Skew the script: A study of how teachers use a relevant and electronic statistics curriculum in the U.S.	321
Análisis de la distribución normal en libros de texto de Educación Media de Chile.....	343

PRÓLOGO

Los libros de texto son uno de los recursos didácticos más influyentes en el aprendizaje formal de cualquier materia, siendo por tanto la investigación en este ámbito fundamental. Es relevante, entre otros aspectos, analizar la calidad y precisión de los contenidos que aparecen en los libros de texto. En particular, la evolución de la estadística y la probabilidad, con la llegada de grandes volúmenes de datos o de nuevos métodos de análisis, requiere una adaptación de los contenidos que aparecen en los libros de texto para garantizar que la información que se muestra permita responder a los problemas a los que se enfrenta la sociedad actual. En este sentido, las situaciones y contextos sufren transformaciones con el tiempo y es también pertinente que los problemas del ámbito didáctico se adapten a estos cambios. Los libros de texto deben incorporar aplicaciones prácticas de la vida cotidiana actual para que el alumnado comprenda la relevancia y el aporte de la estadística y la probabilidad en la propuesta de soluciones a situaciones reales y a los retos científicos y tecnológicos contemporáneos.

Es también necesario que los libros de texto se adapten a enfoques pedagógicos que, según la investigación, facilitan la comprensión de aquellos conceptos relacionados con la estadística y la probabilidad que, quizá por tener una naturaleza más abstracta, suelen ser desafiantes para el alumnado. Del mismo modo, es crucial integrar en el diseño de estos recursos didácticos los resultados de algunos estudios de investigación que evidencian, por ejemplo, la necesidad de incluir actividades que fomenten el pensamiento crítico o la comunicación de resultados, habilidades que contribuyen a tomar decisiones de manera razonada, a evaluar situaciones de incertidumbre, y a interpretar los resultados en contextos prácticos. Otra recomendación compartida por la comunidad científica y educativa es el uso de la tecnología para explorar conceptos y analizar datos. En este sentido, es necesario que los libros de texto promuevan el uso de herramientas tecnológicas, como software estadístico o plataformas de simulación. Ahora bien, ¿en qué medida cumplen los libros de texto actuales con estas demandas que defienden una enseñanza de la estadística y la probabilidad pertinente y atractiva para el alumnado?

El libro *Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística* comprende catorce capítulos que describen, desde un enfoque metodológico mayoritariamente cualitativo y, en particular, usando análisis de contenido, los resultados de catorce estudios llevados a cabo con libros de textos usados en varios países (Brasil, Chile, España,

Estados Unidos, México y Portugal) en distintas etapas educativas. En este sentido, se detecta una menor representación de investigaciones en las etapas más tempranas de la educación (como la denominada educación infantil en España) en contraposición con el número de estudios realizados en las etapas básica, media o secundaria, lo que sugiere la necesidad de profundizar en la investigación relativa al aprendizaje y la enseñanza de la estadística y la probabilidad de los más pequeños.

Aunque cada capítulo de libro tiene un objetivo específico y diferente al resto, es posible detectar nexos que describen las principales preocupaciones de la comunidad científica y educativa en este ámbito, entre las que destacan los significados de distintos conceptos estadísticos y probabilísticos, el ajuste entre el contenido de los libros de texto y la normativa curricular, las características de las actividades para la enseñanza de la estadística y de la probabilidad que aparecen en los libros de texto y su encaje con las recomendaciones fruto de la investigación, la representación de género y accesibilidad en estos recursos, entre otras.

Así, en el primer capítulo se describen los resultados de un estudio sobre cómo se presentan los contenidos de probabilidad en los libros de texto, dada la contribución de la probabilidad frente a otras ramas de la matemática que tratan solo situaciones deterministas. En particular, se analizan la cognición e instrucción matemáticas desde los objetos matemáticos considerados en el enfoque ontosemiótico y los significados de la probabilidad. El segundo capítulo se centra en la presencia de las medidas de tendencia central en los libros de texto. El análisis realizado permitió detectar ambigüedades léxicas, como el uso indistinto de promedio y media, y confusiones entre número y dato. Además, destaca el uso de actividades mayormente procedimentales que requieren la aplicación mecánica de conceptos, sin promover una comprensión reflexiva ni la toma de decisiones a nivel poblacional.

En el tercer capítulo se focaliza en el tratamiento de los conceptos de muestreo y curva normal en los libros de texto. Si bien se incluyen propuestas interesantes que consideran el empleo de datos reales y la realización de investigaciones estadísticas muestrales, también se percibe un uso predominante del concepto de población/muestra referido a personas, una limitada profundización en la selección de muestras o en la representatividad muestral, un enfoque excesivo hacia el cálculo de medidas estadísticas y una escasa discusión sobre el modelo de la curva normal, cuyo tratamiento se reduce a la aplicación de técnicas para el cálculo de medidas de centralización, dispersión y probabilidad usando datos ficticios. En el cuarto capítulo se examinan los significados

de la probabilidad que aparecen en las situaciones-problema planteadas en los libros de texto, detectándose diferencias con respecto a los significados establecidos por la normativa educativa, pues predominan el significado intuitivo y el clásico.

En el quinto capítulo se revisa la concordancia entre las directrices curriculares y las orientaciones pedagógicas planteadas en los libros de texto. Se concluye que pese a la gran relevancia que se les otorga a las investigaciones estadísticas en la normativa curricular, su aparición en los libros de texto es puramente anecdótica. Además, si bien los libros de texto plantean actividades en contextos variados, especialmente relacionados con estudiantes y juegos de azar, el uso de la tecnología parece desatendido. El sexto capítulo se centra en analizar la representación de género en tareas matemáticas relacionadas con la estadística y la probabilidad en los libros de texto. La autora describe la presencia de actividades sin especificación de género y sugiere ajustar los libros de texto para garantizar una representación equitativa en cuanto al género y evitar estereotipos.

En el séptimo capítulo se plantea una caracterización de las adaptaciones de gráficos estadísticos para estudiantes ciegos en libros de texto. Se concluye que, aunque se utilizan gráficos alineados con la normativa curricular, se detectan errores y una alta presencia de actividades de bajo nivel. Las adaptaciones de accesibilidad incluyen alternativas textuales, gráficos táctiles y presentaciones multimodales. El octavo capítulo analiza la correspondencia entre la normativa curricular y los libros de texto en lo relativo a la comprensión de conceptos estadísticos a través de la inferencia informal y el uso de tecnologías para simular fenómenos basados en datos. Los resultados indican que la mayoría de las actividades en los libros se centran en un tratamiento del lenguaje relacionado con la muestra. Algunas actividades permiten integrar conceptos de medidas de centralización, posición y variación, con el apoyo de tecnología, sin embargo, esta incorporación se observa más como un fin instrumental para simplificar cálculos, en lugar de para fomentar el razonamiento.

En el noveno capítulo se estudia el nivel de lectura en actividades matemáticas con tablas estadísticas en los libros de texto. Los resultados revelan diferencias significativas entre editoriales en la presentación de tareas descontextualizadas. Además, la mayoría de las tareas proponen niveles básicos de lectura de tablas, sin mostrar progresión hacia niveles más avanzados a medida que los estudiantes pasan de curso. Esta tendencia se mantiene independientemente de si se

abordan contenidos de estadística descriptiva o probabilidad, lo que indica una falta de desarrollo del sentido estocástico.

El décimo capítulo describe un estudio que analiza la presencia de conceptos estadísticos en un libro paradidáctico. Los autores concluyen que los contenidos estadísticos de este material favorecen el desarrollo de la alfabetización estadística, pues plantea un enfoque de los contenidos estadísticos relevante y emplea un lenguaje atractivo para el alumnado, aunque podría proyectar un enfoque más interdisciplinar.

En el capítulo once se presentan las configuraciones epistémicas asociadas al significado de las medidas de tendencia central. Las autoras describen situaciones-problema que promueven los significados de media, mediana y moda, tanto de manera extra- como intra-matemática, en las que se emplea un lenguaje que hace referencia a datos numéricos, fórmulas, tablas y gráficos de barras, y en las que se plantean procedimientos que se enfocan en el cálculo de estas medidas, destacando las características específicas de cada una. Estas configuraciones sirven de base para diseñar situaciones-problema relacionadas con las medidas de tendencia central, enfatizando sus significados y características. El capítulo doce aborda el conocimiento especializado para enseñar gráficos estadísticos revelado en libros de texto. Los resultados pretenden contribuir al desarrollo de materiales formativos, destacando la importancia del conocimiento del objeto matemático y sus especificidades para la enseñanza.

En el capítulo trece analiza el efecto de un recurso curricular electrónico en el ámbito de la estadística diseñado para aumentar el compromiso y rendimiento matemático y desarrollar el pensamiento crítico del alumnado. Los hallazgos indican que esta propuesta presenta ejemplos relevantes de la estadística en la práctica, que los docentes pueden utilizar como complemento a otros recursos curriculares. Por último, en el capítulo catorce se examinan algunas características (como el contexto, el soporte de datos, el uso de tecnología o la modalidad de trabajo) en tareas relacionadas con la distribución normal presentes en libros de texto. Los autores detectan un predominio de la distribución normal como modelo probabilístico que representa fenómenos reales, una ausencia de un contexto significativo que dé sentido a los datos, un excesivo uso de texto escrito, y una escasa promoción de herramientas tecnológicas y del trabajo colaborativo.

Las conclusiones de estos capítulos destacan la necesidad de seguir investigando en este ámbito para abordar varias áreas clave. En primer lugar, se concluye que las actividades y situaciones-problema propuestas en los libros de texto actuales no promueven la cultura estadística

y probabilística. Para mejorar esta situación, se recomienda que los docentes adapten su enfoque de enseñanza, centrado en una comprensión más profunda de la estadística y la probabilidad, y que las editoriales tengan en cuenta las recomendaciones basadas en la investigación para el diseño de sus libros de texto. Además, se plantea la necesidad de incluir aspectos relacionados con la inferencia informal en los materiales didácticos y de fomentar una colaboración interdisciplinar en la adaptación de textos para alumnado con discapacidades, combinando la experiencia de especialistas en esta área y en educación matemática. También es oportuno enfatizar la relevancia de los conocimientos especializados en la enseñanza de la estadística y la probabilidad, necesarios para fortalecer la formación docente y desarrollar materiales didácticos más efectivos.

Laura Muñiz-Rodríguez

*Coordinadora del Grupo de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*

LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO: INVESTIGACIÓN DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Carmen Batanero

Macarena Elgueda-Ibarra

Osmar D. Vera

RESUMEN

El libro de texto es un recurso útil en la planificación e intervención docente, pues organiza los contenidos curriculares adoptando a los mismos su enfoque metodológico y de evaluación. Es también mediador del proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula y sirve al estudiante de apoyo al estudio. Consecuentemente, su análisis ha recibido gran atención en la investigación en educación matemática. El objetivo de este capítulo es presentar una síntesis de la investigación realizada desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemáticas sobre la presentación de los contenidos de probabilidad en los libros de texto. Nos centramos en la probabilidad, por su importancia al complementar otras ramas de la matemática que sólo consideran situaciones deterministas. El trabajo se fundamenta en elementos del enfoque ontosemiótico y los diversos significados de la probabilidad. El método utilizado es el análisis de contenido de una muestra intencional de trabajos publicados sobre la temática abordada, seleccionados por su especial contribución a la investigación posterior sobre el tema. Como resultados se resumen las principales aportaciones de las investigaciones seleccionadas sobre cada uno de los objetos matemáticos considerados en el enfoque ontosemiótico, finalizando con la presentación de ejemplos de otras perspectivas tenidas en cuenta. Se concluye con algunas sugerencias para continuar la investigación sobre el tema.

Palabras clave: Enfoque ontosemiótico, probabilidad, libros de texto, síntesis de la investigación.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo nos interesamos por los libros de texto, es decir, ponemos el foco en el material escrito diseñado para ayudar a implementar el currículo pretendido (Usiskin, 2013). Su importancia se debe a ser un recurso didáctico y pedagógico fundamental (Fan et al., 2013), cumpliendo un rol articulador en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que los profesores toman muchas decisiones basándose en ellos (Stylianides, 2009).

Estos libros resultan de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), donde el conocimiento matemático se simplifica y adapta a un determinado nivel escolar, de acuerdo a las directrices curriculares, constituyendo el currículo escrito, como paso intermedio entre las directrices curriculares y el currículo plasmado en el aula (Herbel, 2007). Rezat et al. (2021) sugieren que los libros son instrumentos teóricos de cambio curricular y mediadores para implementar prácticas innovadoras en reformas curriculares, pues al elegir convenientemente el libro de texto, se influye en la práctica en el aula e indirectamente en el aprendizaje de los estudiantes. Todo ello es aún más relevante en el caso de la probabilidad, donde muchos profesores se sienten inseguros por no haber sido suficientemente preparados en la materia (Batanero, 2022).

Los libros de texto exponen el contenido matemático y presentan problemas para ser propuestos a los estudiantes (con o sin solución), proporcionan una secuencia para planificar la instrucción y una panorámica de lo que debe aprenderse (Usiskin, 2013). Ortiz (2002) subraya su importancia, por ser una fuente de contenidos y actividades para la enseñanza y aprendizaje de una disciplina. Además, advierte de la responsabilidad del profesor para analizar con detalle su contenido, identificando significados sesgados y evitando así su transmisión a los estudiantes. Todo ello explica el interés que recibe la investigación sobre textos de matemática (e.g., Fan et al., 2013; Schubring y Fan, 2018).

Con la finalidad de contribuir a incrementar y fundamentar esta línea de investigación, en este trabajo presentamos una revisión de los trabajos más relevantes que se han centrado en el análisis del contenido sobre probabilidad en los libros de texto y han estado fundamentados en el conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino et al., 2007; 2019).

Se elige el tema de probabilidad, por su interés, al fundamentar el estudio posterior de la inferencia y sus muchas aplicaciones (Bargagliotti et al., 2020). Es un área de la matemática tan relevante como el álgebra o la geometría, y además es la única que trabaja con situaciones aleatorias, lo que requiere un razonamiento específico (Sharma, 2015). Además, permite aplicar

muchos métodos matemáticos, como la combinatoria, funciones, lógica, álgebra o proporcionalidad (Van Dooren, 2014). Nos limitamos a los trabajos apoyados en el EOS para, por un lado, mostrar la potencialidad de las herramientas de este marco teórico para el análisis de libros de texto y, por otro, reducir nuestra síntesis a un número razonable de trabajos.

FUNDAMENTOS

Esta síntesis tiene en cuenta algunos elementos del EOS considerados en las investigaciones previas, así como los significados del concepto de probabilidad considerados en la enseñanza. A continuación, presentamos estos fundamentos.

Elementos del enfoque ontosemiótico

En el EOS se asume que la actividad matemática consiste en un conjunto de prácticas para resolver problemas y de ellas surgen los objetos matemáticos (Godino et al., 2007; 2019). El significado de un objeto matemático sería el sistema de prácticas, de índole personal (específicas de una persona) o institucional (compartidas en una institución) relacionadas con dicho objeto matemático. Por tanto, las situaciones problemas en el EOS se toman como punto de partida que impulsa y contextualiza la actividad matemática. La práctica se entiende en un sentido muy amplio:

Una práctica es cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, para comunicar la solución a otras personas, con el fin de validar y generalizar esa solución a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1998, p. 182).

En el EOS se define una tipología de objetos matemáticos primarios, que a su vez se organizan en entidades más complejas, que son las siguiente:

- *Situaciones-problemas*: (aplicaciones intra o extra-matemáticas que conllevan la realización de las prácticas matemáticas). En los libros de texto, la finalidad de dichas situaciones es introducir o reforzar el conocimiento del resto de objetos matemáticos.
- *Lenguaje*: (términos específicos o expresiones, símbolos, gráficos u otras representaciones) que permiten representar y operar con los objetos matemáticos inmatrimateriales.

- *Conceptos*: generalidades o abstracciones introducidos en los textos mediante definiciones o descripciones. Por ejemplo, en el caso de la probabilidad, experimento aleatorio, casos favorables y casos posibles.
- *Proposiciones*: enunciados que relacionan entre sí diferentes conceptos, como que la suma de todas las probabilidades de los sucesos elementales del espacio muestral es igual a la unidad.
- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, utilizados para resolver las situaciones problemas. Por ejemplo, la regla del producto para el cálculo de la probabilidad compuesta.
- *Argumentos*: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, y pueden ser inductivos, deductivos o informales.

A cada uno de estos objetos elementales corresponde un proceso matemático específico (problematizar/ resolver problemas, representar/comunicar; definir o enunciar, operar y argumentar/probar). Tanto los objetos como los procesos se pueden contemplar desde diferentes facetas del conocimiento matemático que se describen en Godino et al. (2007; 2019). La investigación sobre libros de texto también se ha interesado por el *conflicto semiótico*, que se caracteriza, según Godino (2002) por una “disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas” (p. 250).

Otro constructo relevante para nuestro análisis es el de *idoneidad didáctica* de un proceso instruccional, que se entiende como el grado en que cumple ciertas características que permiten clasificarlo como adecuado para los fines pretendidos en la enseñanza (Breda et al., 2018; Godino, 2013; Godino et al., 2023). Ya que una lección de un libro de texto se puede ver como un proceso de instrucción planificado por su autor, es pertinente el análisis de la idoneidad de los libros de texto (Cotrado et al., 2022). Godino (2013) presentan la idoneidad como un instrumento para la reflexión del profesor sobre su práctica y propone seis componentes de la misma, que podemos adaptar al análisis de libros de texto:

- *Idoneidad epistémica*: Grado en que el significado pretendido del proceso de estudio implementado en el texto es representativo del significado institucional del tema dado.

- *Idoneidad cognitiva*: Punto en que los significados pretendidos por el autor del texto se acerquen a las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes.
- *Idoneidad interaccional*: Depende de la posibilidad que el texto permita una interacción entre estudiantes y profesor de modo que éste llegue a identificar y resolver posibles conflictos semióticos potenciales en el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: Grado de disponibilidad y adecuación de recursos tecnológicos, materiales o de otro tipo sugeridos para la enseñanza en el texto.
- *Idoneidad afectiva*: Punto en que el proceso de estudio descrito en el texto favorece la motivación, interés y actitud del estudiantado por el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica*: Grado de ajuste del proceso implementado en el texto al currículo, escuela y sociedad en que se lleva a cabo la enseñanza.

Significados de la probabilidad

Al analizar la probabilidad en los libros de texto, hay que tener en cuenta que este concepto ha recibido diferentes interpretaciones a lo largo de su historia, que en trabajos previos hemos interpretado como significados institucionales diferenciados del concepto (Batanero, 2020; Batanero et al., 2005). Aunque no hay contradicciones en el cálculo formal de probabilidades, estas diferentes teorías sobre la naturaleza de la probabilidad todavía se consideran y están sujetas a discusión. Los significados más relevantes para la enseñanza son los clásico, frecuencial, subjetivista y axiomático, que no sólo difieren en la definición de probabilidad, sino los problemas abordados, algunos conceptos, propiedades y procedimientos (Batanero y Díaz, 2007).

Desde sus orígenes la probabilidad tuvo un carácter dual: en primer lugar, una interpretación estadística, describiendo las reglas matemáticas objetivas que subyacen a las secuencias de resultados aleatorios en datos y experimentos; una segunda vertiente epistémica contempla la probabilidad como grado de creencia (Hacking, 2006). De estas dos visiones se han derivado diferentes interpretaciones de la probabilidad.

Las primeras ideas sobre probabilidad estuvieron ligadas a los juegos de azar, lo que explica que su primera interpretación aceptara la equiprobabilidad de todos los sucesos elementales posibles en el experimento aleatorio considerado, un supuesto razonable en juegos de azar. En la definición clásica, dada por de Moivre (1667/1718) y refinada por Laplace (1795/ 1814), la probabilidad se concibe como el cociente entre el número de casos favorables a un suceso

particular y el número de todos los casos posibles en dicho experimento. Esta definición fue criticada desde su publicación ya que el supuesto de equiprobabilidad de los resultados es subjetivo, y restringe la aplicación de la probabilidad a los juegos de azar (Batanero et al., 2005; Borovcnik y Kapadia, 2014).

Para poder aplicar la probabilidad a los problemas de seguros y cálculo de la esperanza de vida, Bernoulli (1687/1713) sugirió asignar probabilidades a los sucesos mediante una estimación frecuencial elaborando la Ley de los Grandes Números. En el enfoque frecuencial sostenido posteriormente por von Mises o Renyi, la probabilidad se define como el número hipotético hacia el que tiende la frecuencia relativa en un número infinito de experimentos. Puesto que esta convergencia se había observado en muchos fenómenos naturales, el enfoque frecuencial amplió las aplicaciones de la probabilidad. Un inconveniente práctico de esta concepción es que nunca obtenemos el valor exacto de la probabilidad sino una estimación de esta. Además, este enfoque no se puede aplicar si no es posible repetir el experimento exactamente en las mismas condiciones.

Mientras que en los enfoques clásico y frecuencial la probabilidad es un valor objetivo, el teorema de Bayes, publicado en 1763, demostró que la probabilidad de un suceso podía actualizarse con los nuevos datos disponibles. Dicho teorema demuestra que una distribución inicial (a priori) sobre una probabilidad desconocida se transforma, mediante frecuencias relativas, en una distribución a posteriori. Siguiendo esta interpretación, Keynes, Ramsey o de Finetti consideraron la probabilidad como un grado personal de creencia que depende de los conocimientos de la persona. Sin embargo, este enfoque fue criticado por subjetivo, aunque de Finetti (1974) propuso un sistema de axiomas para justificar este punto de vista.

A comienzos del siglo XX, distintos matemáticos intentaron formalizar la teoría de la probabilidad. Tras los trabajos de Borel sobre la teoría de conjuntos y medidas, Kolmogorov (1950/1933) propuso una axiomática, que fue aceptada por las diferentes escuelas de probabilidad, aunque la discusión sobre los significados de la probabilidad aún continúa.

SÍNTESIS DE LAS INVESTIGACIONES

Los diferentes significados de la probabilidad fueron tenidos en cuenta por varios autores que han analizado este contenido en los textos escolares. Así Gómez-Torres (2014) y Gómez-Torres et al. (2015) refinan el análisis de objetos matemáticos ligados a los anteriores significados de la probabilidad propuesto por Batanero y Díaz (2007), basándose en la matemática y en las

orientaciones curriculares españolas para la educación primaria. Posteriormente, analizan cada uno de los tipos de objetos considerados en el enfoque ontosemiótico en dos series completas de libros de texto de educación primaria española (6-11 años), destacando para cada objeto encontrado cuál de los significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo) se enfatiza.

Por su parte Vásquez y Alsina (2015) estudian una serie completa de libros de texto chilenos de educación primaria (6-11 años), formulando previamente un significado de referencia de la probabilidad a partir de las orientaciones curriculares chilenas. Dicho significado de referencia clasifica los objetos matemáticos relacionados con la probabilidad que se fueron identificados en el currículo según los tipos de objetos considerados en el EOS.

Un trabajo anterior es del de Ortiz (2002), quien analiza 11 libros de texto de primer curso de Bachillerato Unificado Polivalente (equivalente al actual tercer curso de educación secundaria obligatoria, es decir, dirigido a estudiantes de 14 años de edad), elegidos a partir de una encuesta a profesores en ejercicio. El autor analiza las situaciones problemas, conceptos y propiedades y lenguaje de la probabilidad definidos en el enfoque ontosemiótico. En lo que sigue resumimos las principales variables y conclusiones de estos tres estudios y otros relacionados con ellos, para cada uno de los tipos de objetos considerados en el enfoque ontosemiótico.

Las situaciones-problemas de probabilidad

Las situaciones- problemas, según Godino y Batanero (1998), no aparecen aisladamente, sino que constituyen clases de situaciones interrelacionadas, que comparten soluciones y representaciones, constituyendo campos de problemas, cuya resolución requiere operar y relacionar los mismos objetos matemáticos. Son por ello esenciales para dar sentido a los objetos matemáticos implicados en su resolución y de esta importancia se explica que hayan sido investigadas por varios autores.

Así, Ortiz (2002) realiza un análisis estadístico detallado de los problemas y ejercicios propuestos en dos libros de texto de BUP para cada uno de los conceptos: aleatoriedad, espacio muestral, sucesos, probabilidad simple, compuesta y condicional y variable aleatoria. No clasifica las situaciones en tipos o campos de problemas, sino que estudia la distribución en los textos de las siguientes variables, que permiten caracterizar las prácticas matemáticas inducidas por la situación: a) tipo de actividad que se pide al estudiante (si es un ejercicio, problema o ejemplo y en este caso, si se presenta antes o después de definir el concepto); b) tipo de espacio muestral que corresponde al experimento aleatorio descrito en la situación (finito, infinito, numerable o no, con

sucesos equiprobables o no); c) forma de asignación de la probabilidad en la situación descrita (clásica, frecuencial o subjetiva); d) contexto de la actividad (juego de azar, biología, física, meteorología, sociedad); y e) presentación de la información (verbal, tabla, gráfico, diagrama en árbol). Algunas de las conclusiones obtenidas fueron las siguientes:

- Hubo, en general, falta de correspondencia entre las situaciones-problema propuestas en los textos y los conceptos presentados de forma teórica, pues para mucho de ellos no hubo cantidad ni variedad suficiente de situaciones.
- La mayor parte de las situaciones-problemas estuvieron relacionadas con el significado clásico de la probabilidad. Apenas hubo situaciones relacionadas con los significados frecuencial y subjetivo de la probabilidad.
- El tipo de situaciones más frecuente fueron los ejercicios posteriores a la definición del concepto, lo que indica una orientación teoría-práctica de los textos.
- Generalmente se trabajó en estos textos con espacios muestrales finitos en los que se puede aplicar el significado clásico de la probabilidad.
- El 70% de los contextos fueron juegos de azar, de lo que el autor deduce que no se muestra convenientemente todas las aplicaciones de la probabilidad.
- La información se presentó preferentemente en forma verbal.

Gómez-Torres (2014) también analizó las situaciones-problema propuestas en los textos de educación primaria, que clasificó en los siguientes tipos:

- *Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos.* Reconocimiento del azar en juegos de azar o experimentos sencillos en contexto cotidiano, donde el grado de creencia se representaba en una escala cualitativa, correspondiendo la situación, por tanto, al significado intuitivo de la probabilidad.
- *Previsión de probabilidad en juegos de azar.* Actividades donde se comparan las probabilidades de varios sucesos y al final de la primaria se calculan probabilidades sencillas utilizando la Regla de Laplace. Por tanto, corresponden al significado clásico.
- *Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos.* La recolección de datos por parte de los mismos niños aparece algunas veces y otras se da la tabla de datos. Corresponde al significado frecuencial.
- *Estudio de sucesos donde la probabilidad puede cambiar en función de la información*

disponible. Situaciones ligadas a fenómenos que dependen de la disponibilidad de información o conocimiento previos. Por su naturaleza corresponden al significado subjetivo; sin embargo, su tratamiento se hace de forma intuitiva.

La autora concluye que estas situaciones problema favorecen un primer contacto con la capacidad de contextualizar el pensamiento probabilístico y el lenguaje. Son más frecuentes las situaciones ligadas al significado intuitivo, y desde segundo ciclo se introducen también las situaciones ligadas los significados clásicos y al subjetivo.

Vásquez y Alsina (2015) parten del significado de referencia de la probabilidad inferido del análisis de las orientaciones curriculares chilenas. Identifica en los textos chilenos de primaria analizados cinco tipos de situaciones-problemas:

- *Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas* de acuerdo con la información presentada. Se asigna intuitivamente los grados de posibilidad desde imposible a seguro.
- *Determinar la posibilidad de ocurrencia de eventos en base a la información de la que se dispone*. Se trata de visualizar datos de experimentos aleatorios, para desarrollar la competencia de análisis e introducir el enfoque frecuencial y algunas veces el subjetivo.
- *Hacer predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio*: Estimar o predecir el grado de posibilidad de ocurrencia de un suceso, a partir de la información que se proporciona en tablas o gráficos.
- *A partir de los resultados observados en un experimento, determinar la probabilidad teórica*: Similar al anterior, pero se pide determinar la probabilidad en su significado frecuencial.
- *Cálculo de probabilidades*: Utilizando la regla de Laplace como cociente entre casos favorables y posibles.

Indican que las situaciones que más trabajan los textos son las ligadas al significado intuitivo para introducir gradualmente el frecuencial y clásico, siendo escasas las asociadas con el significado subjetivo.

Díaz-Levicoy y Roa (2014) analizan las actividades de probabilidad propuestas en tres libros chilenos de en octavo básico (13-14 años). Existen diferencias en las estructuras de los textos

analizados que se reflejan en la cantidad de evaluaciones presentadas al inicio, desarrollo y final de la unidad de estudio. Otra diferencia es que se pone énfasis a varios procesos en los libros, potenciando en uno de ellos excesivamente los procesos algorítmicos. Las actividades fueron clasificadas en ejercicio o problema, que alcanzan cerca de un tercio de las actividades en dos textos, siendo en el otro la distribución más armónica. Por otro lado, caso el 100% de los problemas eran rutinarios. Según contextos predominan en un 87% los problemas de contexto realista. El 87,1% del total de problemas se presentan a través de texto; seguido por un 9,7% en imagen y un 3,2% mediante gráficos. En los tres libros analizados se sugieren actividades para desarrollar con las hojas de cálculo Excel; los autores no mencionan otro software.

Díaz-Levicoy et al. (2019) estudian las actividades incluidas como evaluación en una serie completa de libros de texto chilenos de Educación Primaria, observando el aumento del número de actividades con el curso escolar. Clasifica las actividades en identificar, completar, aplicar e investigar, e informa sobre el predominio de las tareas de aplicación e identificar, diversificándose las tareas en quinto y sexto año. La tarea menos frecuente es investigar y aparece solo una vez en sexto año. Para presentar los datos de las actividades, se utiliza con mayor frecuencia el soporte gráfico, seguido por enunciado dado en forma verbal y presentación mediante tablas. En relación con el contexto en que se enmarcan las actividades, se clasificaron según los considerado en las pruebas PISA (OECD, 2019) de matemáticas. En los resultados abundan las actividades que corresponden al contexto personal (63,9%), muy por el contrario, solo se encontró solo una actividad con contexto profesional en sexto curso. Los contextos social y científico corresponden respectivamente al 16,7% y el 11,1%, mientras que un 6,9% son ejercicios descontextualizados.

El lenguaje probabilístico

El lenguaje matemático es fundamental en el enfoque ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2007; 2019), ya que se postula que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de un sujeto (persona o institución) al resolver problemas, y que estas prácticas están mediadas por el lenguaje, que es, a la vez, instrumento representacional y operativo, pues el lenguaje representa el resto de los objetos matemáticos y permite operar con ellos. Cuando el sujeto se inicia en el estudio de la probabilidad, ha usado anteriormente palabras y expresiones para describir los fenómenos aleatorios que le rodean, pero, a veces, estos términos tienen un significado ligeramente diferente del sentido preciso que adquieren en la clase de matemáticas. Es por ello que el lenguaje de

probabilidad ha sido analizado por diversos autores en los libros de texto.

Ortiz et al. (2001) identifican los términos y expresiones ligados, por un lado, a la aleatoriedad (experimento aleatorio) y sus resultados y por otro a la probabilidad (su asignación a los sucesos, graduación de las probabilidades de distintos sucesos o diferentes tipos de probabilidades). Diferencia entre expresiones que son específicas de la matemática y normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano, otras que aparecen tanto en matemáticas como en la vida ordinaria, pero tienen en cada uno de estos contextos un significado diferente y expresiones que tienen el mismo significado en ambos casos. Encuentran una gran variedad de expresiones y concluyen que en probabilidad lo usual es el vocabulario ya conocido por el estudiante, dotándole ahora de nuevo significado. Este significado específico, no obstante, queda implícito la mayoría de las veces, pudiendo provocar conflictos semióticos en el estudiantado.

Este trabajo se completa en Ortiz (2002) realizando un análisis detallado de los diversos tipos de lenguaje para cada uno de los conceptos probabilísticos incluidos en los textos de primer curso de BUP (14-16 años). Así considera los términos y expresiones verbales ligadas a ellos, así como las representaciones gráficas, tabulares, simbólicas utilizadas en el trabajo con dichos objetos. Entre las representaciones gráficas obtiene diagramas de árbol, de flechas y de Venn, tablas de frecuencia y de doble entrada y gráficos (diagramas de barra, y de líneas). Concluye que la variedad de expresiones simbólicas (notaciones de fracción, decimales y conjuntista, símbolos algebraicos, desigualdades, que se mezclan en el mismo enunciado implican una complejidad alta para el estudiante, que debe ser tenida en cuenta por el profesor.

Además del vocabulario y la notación simbólica aparecen en los libros representaciones tabulares, gráficas e icónicas, así como fotografías e ilustraciones que se emplean para evocar conceptos abstractos o situaciones problemáticas. También sirven para mostrar los pasos necesarios en la resolución de un problema y realizarlos efectivamente. Estas representaciones tienen convenios que el estudiante ha de aprender, habiendo peligro de quitar tiempo al aprendizaje en sí de la probabilidad, para dedicarlo al aprendizaje de las representaciones.

Igualmente, Gómez-Torres et al. (2013) y Gómez-Torres (2014) estudia los términos y expresiones ligados a los conceptos de aleatoriedad, experimento aleatorio, espacio muestral, esperanza matemática, probabilidad, suceso y sus tipos y variable aleatoria. Además, para cada término o expresión señala a cuál de los significados (intuitivo, clásico, frecuencial o subjetivo) está ligado. Estudia también el lenguaje numérico, simbólico, tabular y gráfico, resaltando la

riqueza del lenguaje en los textos analizados. Concluye la riqueza de lenguaje utilizada por los textos apoya el componente comunicativo de la cultura probabilística propugnado por Gal (2005).

Vásquez y Alsina (2015) también estudian estos tipos de lenguaje en los textos de su muestra. Indican que domina el lenguaje de uso común sobre del probabilístico, que clasifican en expresiones ligadas al significado intuitivo, clásico y frecuencial de la probabilidad. Dentro de las representaciones numéricas que admite la probabilidad se encuentran los números enteros; además, podemos expresar la probabilidad de ocurrencia mediante una fracción o número decimal. Respecto a la representación tabular se encuentran tablas de conteo y tablas de frecuencia, que tienen por propósito resumir las frecuencias absolutas y relativas obtenidas a partir de la recogida de datos sobre experimentos aleatorios. Observan escasez de gráficos y diagramas de árbol en los textos analizados.

León (2006) presenta los resultados de la revisión de cuatro textos de Matemática de 7° grado de Educación Básica en Venezuela (12-13 años) en los cuales analizó el alcance de los contenidos, secuencia, ejemplos y problemas, enfoque de la probabilidad y uso del lenguaje del azar. Respecto al lenguaje, identifica todas las expresiones referidas a la aleatoriedad y las referidas a los experimentos aleatorios. Presenta y analiza estas expresiones, ligadas a presentar las características de estos conceptos, asociar grados de incertidumbre a su ocurrencia, acciones o situaciones vinculadas a los experimentos aleatorios o con los dispositivos que generan resultados aleatorios y sus características. Concluye la existencia de una gran variedad de términos relacionados en los textos, la mayor parte de los cuales se utilizan tanto en el lenguaje cotidiano como en el formal, aunque con ligeras diferencias ocasionales que pueden dificultar el aprendizaje.

Conceptos y proposiciones ligados a la probabilidad

Ortiz (2002) analizó los conceptos de aleatoriedad y experimento aleatorio, espacio muestral, suceso sus tipos y operaciones, frecuencia relativa, probabilidad en sus diversos significados, probabilidad condicional, dependencia e independencia y variable aleatoria en los libros de texto del primer curso de BUP. Elige estos conceptos porque en conjunto reflejan las ideas estocásticas fundamentales propuestas por Heitele (1975). El autor estudia la definición propuesta para cada concepto, junto con las propiedades (proposiciones) que se describen para ellos en cada libro de su muestra. Por ejemplo, para la aleatoriedad, diferencia las siguientes: a) Distinción entre proceso (experimento aleatorio), resultado (suceso) y secuencia de resultados (secuencia aleatoria); b)

Contraposición entre determinismo (causalidad) y aleatoriedad y c) La aleatoriedad como modelo matemático. Concluye que no todos los textos presentan estas propiedades de la aleatoriedad de forma adecuada. Además, identifica algunos conflictos semióticos en la presentación de los conceptos, en particular la definición de suceso condicionado (que no se corresponde con una definición matemática). Respecto a los diferentes significados de la probabilidad, obtiene las siguientes conclusiones:

- Ningún texto los trata todos, y, en general, se omiten algunas propiedades de las concepciones expuestas.
- El significado clásico se incluye en todos los textos analizados, excepto en uno. Todos ellos la definen como el cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles, aunque algunos no mencionan explícitamente la regla de Laplace. Prácticamente ningún texto menciona los problemas de circularidad asociados a esta definición. Tampoco se insiste en que sólo se puede aplicar cuando los sucesos elementales son equiprobables.
- Salvo tres textos, todos incluyen el significado frecuencial, aunque no se indica explícitamente la diferencia entre la convergencia estocástica y la convergencia numérica a la que están acostumbrados los estudiantes. Se habla muy vagamente del número necesario de experimentos para obtener una buena estimación de la probabilidad.
- Pocos textos incluyen el significado subjetivo y la mitad de los textos contemplan la definición axiomática, a pesar de su complejidad.

El autor concluye que no explicitan en los textos analizados las relaciones entre los diversos significados y que suele predominar solo un significado en cada texto.

Gómez-Torres et al. (2014) estudian la presentación de conceptos y propiedades asociados a los significados de la probabilidad en dos series de libros de texto españoles de educación primaria. Respecto al significado intuitivo, se incluyen los conceptos de azar y variabilidad, suceso, suceso seguro, posible e imposible, posibilidad, grado de creencia. En relación al significado clásico los de casos favorables y posibles, juego de azar y equitativo, experimento compuesto, dependencia e independencia. Para el frecuencial, aparecen los conceptos de colectivo, atributos, ensayos repetidos, frecuencia absoluta y relativa y valor estimado de la probabilidad. Finalmente, para el significado subjetivo los de suceso incierto y probabilidad como grado de creencia personal.

La autora detalla también las proposiciones encontradas en los textos para cada significado de la probabilidad. En general, ambas editoriales desarrollan las sugeridas en las orientaciones curriculares, con menos presencia de las asociadas al significado frecuencial, escasa atención a la experimentación y nula a la simulación. Otra conclusión es que la mayoría de los conceptos probabilísticos básicos se presentan con significados parciales y no se utiliza la terminología formal o definiciones formales.

Vázquez y Alsina (2015) también analizan los conceptos y en Vázquez y Alsina (2017) las proposiciones ligadas a los diferentes significados de la probabilidad en los textos de su muestra. Señalan haber encontrado pocas definiciones de forma explícita en los textos investigados por ellos, estando la mayoría incorporadas al 5° curso de la educación primaria. En la mayoría de los casos, se promueve la abstracción de estas definiciones por medio de algún ejercicio o problema, resuelto o a resolver por los estudiantes. Los conceptos encontrados están asociados con menor frecuencia al significado subjetivo y los autores señalan la omisión de algunos conceptos introducidos en el currículo chileno.

Respecto a las proposiciones, los autores, encuentran las siguientes en los textos analizados, que son enunciadas de manera informal y sin justificar, desde una perspectiva intuitiva y clásica de la probabilidad: a) Grados de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso; b) La probabilidad corresponde a una medida cuantitativa de las posibilidades de que ocurra una situación. Sus valores están entre 0 y 1; c) Cuando los resultados de un experimento son equiprobables, es decir, tienen la misma probabilidad de ocurrir, se puede obtener la probabilidad de un suceso como: número de resultados favorables al suceso/ número de resultados posibles.

Procedimientos probabilísticos

Gómez-Torres y Batanero (2014) estudian los procedimientos ligados a los significados intuitivo, clásico, frecuencia y subjetivo de la probabilidad en dos series de libros españoles de texto de educación primaria, que clasifica en la forma siguiente:

- *Procedimientos ligados al significado intuitivo:* Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas; reconocer la imprevisibilidad de un resultado; reconocer tipos de sucesos; valorar cualitativamente las probabilidades. En ambas editoriales se presentan desde el primer ciclo.
- *Ligados al significado clásico:* Analizar diferentes juegos de azar; enumerar casos

favorables y posible; distinguir sucesos elementales equiprobables; comparar probabilidades con razonamiento proporcional; aplicar la regla de Laplace en casos sencillos; decidir si un juego es equitativo o no. Se introducen desde el segundo ciclo.

- *Con relación al significado frecuencial:* Enumerar o discriminar atributos en un colectivo; calcular la frecuencia relativa de atributos a partir de observaciones o datos; representar una distribución de frecuencias en una tabla o gráfico; estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos; y reconocer el carácter aproximado de la estimación.
- *Significado subjetivo:* Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal, que prácticamente se omiten.

Los procedimientos identificados por Vásquez y Alsina (2017) en su estudio de los textos escolares fueron los siguientes:

- *Manipulación de generadores de azar:* Experimentación con algunos dispositivos físicos que producen resultados aleatorios como dados, monedas, ruletas, etc., para llegar a comprender la imprevisibilidad de resultados.
- *Reconocer distintos tipos de sucesos:* Imposibles, posibles, seguros, muy o poco posibles valorando cualitativamente su posibilidad.
- *Comparar posibilidad de ocurrencia de sucesos:* Mediante la comparación de casos favorables cuando los casos posibles son los mismos.
- *Realizar predicción:* A partir de los datos observados o de la repetición de un mismo experimento aleatorio, para estimar la probabilidad de ocurrencia de un suceso.
- *Completar tablas de frecuencias e interpretarlas.*
- *Distinguir entre casos favorables y no favorables.*
- *Aplicar la Regla de Laplace:* De forma implícita para calcular probabilidades en experimentos aleatorios sencillos.

Todos estos procedimientos fueron indicados en las directrices curriculares y los autores resaltan que los textos no incluyen otros recomendados en ellos, como diferenciar experimentos aleatorios y deterministas, completar el espacio muestral y completar diagramas de barra.

Argumentación y procesos matemáticos en los textos

Gómez-Torres (2014) analiza la argumentación utilizada para demostrar o presentar propiedades o procedimientos y justificar las soluciones a los problemas en los textos de su muestra. Encuentra cuatro tipos principales de argumentos, que son informales, ya que el niño de primaria, por su edad, no tienen aún la capacidad para seguir una demostración formal:

- *Uso de ejemplos y contraejemplos:* Sirven para “convencer” de una propiedad o una solución a los niños, que utiliza para todos los significados de la probabilidad. Un ejemplo es la introducción de sucesos, seguros posibles e imposibles.
- *Generalización:* Consiste en la presentación de uno o unos pocos ejemplos, para luego introducir un enunciado de forma general, ampliando su validez; por ejemplo, que la probabilidad de cualquier suceso es siempre menor o igual que uno.
- *Apoyo gráfico para comprobar propiedades:* Así, se suele emplear el diagrama de barras, que ya conocen los niños, para “mostrarles” visualmente la convergencia de las frecuencias relativas de un suceso a la probabilidad teórica al aumentar el número de ensayos.
- *Razonamiento inductivo a partir de datos* que es utiliza también, principalmente en el caso del significado frecuencial de la probabilidad.

La autora concluye que, generalmente, la argumentación se basa en el uso de ejemplos y contraejemplos. Respecto a la generalización, la presentación de algunos contenidos, para todos los significados de la probabilidad, incluye un ejemplo en segundo y tercer ciclo para relacionar el concepto con una situación conocida y una definición general para ampliar su validez. Los gráficos y el razonamiento inductivo a partir de los datos se usan especialmente en el trabajo con el significado frecuencial de la probabilidad.

En los textos analizados por Vásquez y Alsina (2017) se encontraron pocos argumentos, ya que usualmente los conceptos y propiedades se introducen sin justificar. El tipo de argumento más frecuente fue la justificación de los resultados y propiedades a partir datos o basados en convenciones sociales; por ejemplo, admitir por convenio y sin comprobar que un dado está equilibrado y todas sus caras tienen igual probabilidad.

Vásquez et al. (2021) estudian los procesos matemáticos en las tareas propuestas en torno a la estadística y la probabilidad en tres series de libros de texto de educación infantil y primeros

cursos de educación primaria chilenos (niños de 4 a 8 años de edad). Clasifican las tareas según los siguientes tipos de proceso:

- *Resolución de problemas:* Se plantean diversas situaciones-problemas, contextualizadas en la vida del estudiantado. Se hacen preguntas que genera la investigación y exploración de los problemas. Se fomenta el uso de material para apoyo en la resolución de problemas.
- *Razonamiento o prueba:* Se promueve la discusión y el descubrimiento de estrategias y solución de problemas. Se fomenta el razonamiento matemático y la comprobación de conjeturas.
- *Comunicación:* Se favorece la interacción con los compañeros y el intercambio de ideas, mediante diferente tipo de lenguaje matemático. Se pide usar el lenguaje matemático para explicar sus respuestas y estrategias. Se fomenta el atender al resto de compañeros y se respeta la forma de pensar.
- *Conexión:* Uso de experiencias matemáticas cotidianas y aplicación de las matemáticas a dichas experiencias; conexión entre diferentes contenidos y expresiones artísticas.
- *Representación:* Se promueve el uso de representaciones concretas, pictóricas y simbólicas. Se usan modelos para mostrar la resolución de problemas. Se fomenta el diálogo y la reflexión sobre la matemática para avanzar hacia la representación simbólica.

Las tareas de probabilidad aparecen en segundo año de enseñanza básica (7-8 años), existiendo un predominio de la resolución de problemas, seguido de la representación, conexiones, comunicación y en menor medida razonamiento y prueba. Para estas edades, en la resolución de problemas predomina el planteamiento de situaciones-problemas y el uso de material concreto y pictórico como apoyo a la resolución de los mismos. Respecto a las conexiones, se promueven las referidas a diferentes contenidos matemáticos y promueve la aplicación de la matemática a la vida cotidiana. Se fomenta sobre todo la representación simbólica y pictórica.

La idoneidad didáctica de la presentación de la probabilidad en los textos

Algunos trabajos se han centrado en desarrollar los criterios de idoneidad didáctica específicos para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la evaluación de materiales curriculares y libros de texto. Destacamos el trabajo de Cotrado et al. (2022) que desarrollan los indicadores de idoneidad didáctica para el caso específico de la enseñanza de la probabilidad. Para

realizarlo, se basan en el estudio epistemológico-histórico del tema, el análisis del currículo y de los libros de texto peruanos y antecedentes de investigación sobre didáctica de la probabilidad.

En un trabajo posterior, Cotrado et al. (2023) analizan una experiencia formativa con 38 futuros profesores de matemáticas peruanos, donde trata de desarrollar su competencia de análisis de la idoneidad didáctica de materiales curriculares sobre probabilidad, utilizando los indicadores construidos por Cotrado et al. (2022). Los participantes cursaban en modalidad virtual una asignatura de estadística y dedicaron a la experiencia tres sesiones. En la primera, se les introducen los criterios de idoneidad didáctica, que aplican en su análisis en la segunda y tercera sesión. Incluso con la instrucción, hubo dificultades en valorar todas las facetas. Se omitieron deficiencias importantes de la idoneidad epistémica del texto, como excesivo énfasis en un único significado de la probabilidad, cognitiva (no se tienen en cuenta los posibles sesgos probabilísticos) y mediacional (no se incorpora adecuadamente la tecnología). Se concluye la necesidad de reforzar las competencias de los profesores para el análisis de los materiales curriculares.

Otras investigaciones sobre la probabilidad en los libros de texto

Investigaciones realizadas desde otros marcos teóricos nos indican variables importantes, tanto para la enseñanza, como para la investigación. Así, Serradó et al. (2006) plantean una hipótesis sobre la progresión del tratamiento del azar en los textos escolares, que apoya en los conocimientos formalizados de la noción de probabilidad, y que implica la superación de obstáculos relacionados con las nociones de azar, aleatoriedad y probabilidad. Esta progresión de la enseñanza no se considera como una secuenciación jerarquizada, sino un referente teórico que facilita las decisiones sobre cómo introducir las diferentes nociones en los textos. A partir de este modelo, los autores identificaron diferencias en la forma de definir la probabilidad y las actividades propuestas en los libros en los textos de cuatro editoriales de libros de educación secundaria obligatoria. Se destacan dos perfiles diferenciados en la presentación del conocimiento probabilístico, uno más cercano a tendencias racionalistas (es decir al significado de la probabilidad clásico o subjetivo) y otro a tendencias empiristas (ligado al enfoque frecuencial). Los autores concluyeron que en los libros de texto se enfatiza el cálculo por encima de la comprensión, lo que refleja un tratamiento intuitivo de la probabilidad. Azcárate y Serradó (2006) complementan el trabajo anterior, analizando la organización de los contenidos en los mismos textos. Aunque todas comienzan con los objetivos y una actividad inicial motivadora, luego se observan cambios en el desarrollo.

organizan los contenidos de forma lineal. Mientras unos textos introducen las nociones teóricas de forma deductiva, seguidos de actividades de aplicación (perspectiva teoría-práctica) otras organizan los contenidos de forma helicoidal, con una presentación de tipo inductivo, alternando las nociones teóricas y las actividades, utilizando recursos manipulativos y trabajo cooperativo.

Díaz (2017) realiza un estudio de la presentación de la estadística y la probabilidad en una amplia muestra de libros de texto de bachillerato (16-18 años), desde tres puntos de vista: análisis conceptual (como se define y organiza el concepto, representaciones usadas y problemas o ejercicios propuestos), análisis fenomenológico (contextos utilizados) y análisis didáctico-cognitivo (explicitación de los objetivos pretendidos). Para realizar el análisis conceptual, previamente establece una serie de unidades curriculares, obtenidas del estudio de las directrices curriculares. Analiza separadamente cuatro asignaturas consideradas en el bachillerato: Matemáticas I y II y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II, comparando, para cada una de las variables citadas anteriormente con las unidades curriculares establecidas.

Respecto a la probabilidad, estudia un número muy amplio de contenidos, entre otros, el experimento aleatorio, espacio muestral, sus tipos y operaciones, distintos significados de la probabilidad y sus propiedades, probabilidad condicionada y compuesta, probabilidad total y teorema de Bayes, variable aleatoria, distribuciones binomial y normal y sus propiedades. Concluye que, aunque los manuales contienen prácticamente los contenidos pretendidos en el currículo, se observa en algunos textos una falta de ajuste de la presentación a los estudiantes a los que va dirigidos, al presentarse los contenidos en forma muy deductiva y desconectados unos de otros. La metodología se basa en la memorización de fórmulas y definiciones, sin una reflexión en su significado, aplicación e interpretación, lo que implica que no se contribuye al desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes.

Un estudio muy minucioso de clasificación de los problemas de probabilidad condicional fue llevado a cabo por Huerta y colaboradores en numerosos trabajos (por ejemplo, en Huerta, 2009). Para ello tienen en cuenta el contexto y por tres variables: a) Número de probabilidades condicionales conocidas en el texto del problema; b) número de probabilidades simples conocidas; y c) tipo de probabilidad que se pide: simple, doble o condicional. Basándose en esta clasificación Lonjedo et al (2012) estudian una muestra muy amplia de libros de texto de educación secundaria obligatoria (12-16 años) y otra de libros de texto de bachillerato (16-18 años). Concluyen que los textos no tienen en cuenta todas las posibilidades de su clasificación en estos problemas, lo que

puede suponer un significado reducido de la probabilidad condicional.

Jones y Tarr (2007) analizan la demanda cognitiva de las tareas de probabilidad en los libros de texto americanos de los cursos 6 a 8 (12-14 años) a lo largo de un periodo de 50 años para observar las tendencias. Dividen este periodo de tiempo en cuatro intervalos, examinando dos series de libros de texto en cada uno de ellos. Diferencian los niveles de demanda en la resolución de la tarea: nivel bajo 1 (solo se requiere memorización para resolver la tarea), nivel bajo 2 (se necesitan procedimientos sin conexión), nivel alto 1 (procedimientos con conexión) y nivel alto 2 (requiere pensamiento no algorítmico complejo). El nivel de demanda cognitiva más frecuente en los textos fue el nivel bajo 2 (procedimientos sin conexión). Observan que se incrementó mucho el número de tareas probabilísticas en los textos en el periodo que se publicaron los estándares del NCTM (2000), posiblemente por la recomendación en los estándares para incluir más probabilidad en el currículo. Esto no implicó que aumentara igualmente la demanda cognitiva de las tareas planteadas, con lo que se concluye la necesidad de tener en cuenta esta variable en la propuesta de tareas sobre probabilidad en los libros de texto.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo se ha realizado una síntesis de las investigaciones sobre la presentación de la probabilidad en los libros de texto, basadas en el EOS, que se ha complementado con un breve apunte de otras investigaciones que analizan la probabilidad en los libros de texto.

La principal aportación de la síntesis realizada ha sido la descripción de las variables analizadas y las categorías consideradas, en particular de los diferentes objetos matemáticos relacionados con la probabilidad identificados en los estudios sintetizados. Dicha descripción puede orientar el análisis de la presentación en otros libros de texto, bien en niveles escolares más avanzados (puesto que la mayor parte de la investigación se ha realizado en educación primaria) o en países diferentes. Además, es útil al profesor para analizar a su vez las orientaciones curriculares de los cursos en los que enseña y elegir convenientemente el texto a utilizar. Sin embargo, la clasificación de las situaciones-problemas se ha restringido a los textos de educación primaria, por lo que se requeriría extenderla a los de niveles superiores.

La síntesis permite también mostrar carencias en la investigación realizada, y de este modo, señalar líneas de investigación futura que contribuyan a comprender mejor el papel de los libros de texto en el aprendizaje de la probabilidad. Para identificarlas nos basamos en la clasificación

de Fan et al. (2013) de los tipos de investigación sobre libros de texto de matemáticas:

- Papel de los libros de texto en la enseñanza-aprendizaje.
- Análisis y comparación de la presentación de temas y otras características en los libros de texto.
- Uso de los libros de texto por parte de profesores y estudiantes.
- Otras investigaciones, como análisis de libros electrónicos.

Coincidimos con el análisis realizado por Rodríguez-Muñiz y Díaz (2018) sobre investigaciones relacionadas con la estadística y probabilidad en bachillerato, en que la mayor parte de trabajos realizados desde el EOS y reseñados en este capítulo se centran en la segunda categoría, es decir, analizar el libro en sí mismo y la presentación en ellos de la probabilidad. Dichas investigaciones nos proporcionan una importante fuente de información por la clasificación realizada de los diversos objetos matemáticos, su vínculo con los significados de la probabilidad y la detección de carencias en los textos. No obstante, sería importante realizar un esfuerzo por considerar el resto de las categorías propuestas por Fan et al. (2013) y, en particular, en la formación de profesores para el análisis de los libros de texto, como indican Cotrado et al. (2023).

Los resultados de los diversos trabajos muestran igualmente algunos conflictos semióticos en la presentación de la probabilidad en los libros de texto; también advierte de la complejidad del lenguaje utilizado, por la variedad de expresiones, algunas de las cuales pueden inducir conflictos semióticos al tener diferente significado que en el lenguaje coloquial. Además, hay un olvido del significado subjetivo de la probabilidad, frente al clásico y frecuencial. El profesor debe tener en cuenta estas conclusiones para organizar lo mejor posible el uso del libro de texto en la clase de probabilidad y completarlo en aquellos puntos en que este es deficiente.

Finalmente indicamos que los análisis descritos de la probabilidad en los libros de texto se han preocupado sobre todo por sus diferentes significados. Sería también importante analizar la forma en que los libros de texto tienen en cuenta los diferentes niveles de algebrización propuestos por Burgos et al. (2021) en el estudio de la probabilidad.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER Una manera de hacer Europa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcárate, P., y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report II*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. <https://lccn.loc.gov/2020006082>
- Batanero, C. (2020). Probability teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 682-686). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_128
- Batanero, C. (2022). Training teachers to teach probability: A promising research area. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 729-734. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00234-1>
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P. Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107–127). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71575-9_6
- Batanero, C, Henry, M. y Parzysz, B. (2005) The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*. (pp. 15-37). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2
- Bernoulli, J. (1987). *Ars conjectandi*. IREM. (Trabajo original publicado en 1713).
- Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Burgos, M., Batanero, C. y Godino, J.D. (2021). Algebraization levels in the study of probability. *Mathematics*, 10(1), 91. <https://doi.org/10.3390/math10010091>
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique.
- Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales peruanos de educación secundaria en probabilidad. *Bolema*, 36(73), 888-922. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a13>
- Cotrado, B., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Castro, A. (2023). Análisis didáctico de materiales curriculares por futuros profesores. *Cadernos de Pesquisa*, 53, e10031. <https://doi.org/10.1590/1980531410031>
- Díaz, P.D. (2017). *La estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato y en las pruebas de acceso a la universidad*. [Tesis doctoral, Universidad de Oviedo].
- Díaz-Levicoy, D., Ferrada, C., Salgado-Orellana, N. y Vásquez, C. (2019). Análisis de las

- actividades evaluativas sobre estadística y probabilidad en libros de texto chilenos de Educación Primaria. *Premisa*, 21(80), 5-21.
- Díaz-Levicoy, D. y Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica*, 13(1), 9-19.
- Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education* 45, 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>
- Finetti, B., de (1974). *Theory of probability*. John Wiley.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J.D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. En A. Sierpiska (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(6), em2270. <https://doi.org/10.29333/ejmste/1318>
- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Gómez-Torres, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Gómez-Torres, E. y Batanero, C. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Epsilon*, 31(87), 25-42.
- Gómez-Torres, E., Contreras, J.M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). SEIEM. <http://hdl.handle.net/10045/51378>
- Gómez-Torres, E., Ortiz, J.J., Batanero, C. y Contreras, J.M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *UNIÓN*, 35, 75-91.
- Gómez-Torres, E., Ortiz, J.J. y Gea, M.M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación*

- Matemática*, 5, 49-71. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.63>
- Hacking, I. (2006). *The emergence of probability: A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*. Cambridge University Press.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205.
- Herbel, B.A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the voice of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369. <https://doi.org/10.2307/30034878>
- Huerta, M.P. (2009). On conditional probability problem solving research – Structures and context. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 163-194.
- Jones, D.L. y Tarr, J.E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 4-27. <https://doi.org/10.52041/serj.v6i2.482>
- Kolmogorov, A. (1950). *Foundations of probability's calculation*. Chelsea Publishing Company (Trabajo original publicado en 1933).
- Laplace P.S. (1995). *Théorie analytique des probabilités*. Jacques Gabay. (Trabajo original publicado en 1814).
- León, N. A. (2006). La probabilidad en los textos de matemática de 7 grado de educación básica. *Investigación y Postgrado*, 21(2), 177-200.
- Lonjedo, M., Huerta P. y Fariña, C. (2012). Conditional probability problems in textbooks an example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(3), 319-337.
- Moivre, A. de (1967). *The doctrine of chances*. Chelsea Publishing (Trabajo original publicado en 1718).
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM
- OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/13c8a22c-en>
- Ortiz, J.J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Grupo de Investigación en Educación Estadística.
- Ortiz, J.J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 39, 5-13.
- Rodríguez-Muñiz, L.J. y Díaz, P. (2018). Las investigaciones sobre la estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. ¿Qué se ha hecho y qué se puede hacer? *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 14, 65-81. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.218>
- Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en los libros de texto de la ESO. *Tarbiya*, 38, 91-112.
- Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and

- development: An overview. *ZDM*, 50, 765-771. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>
- Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1189-1206. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3>
- Sharma, S. (2015). Teaching probability: a socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics*, 37(3), 78-84. <https://doi.org/10.1111/test.12075>
- Stylianides, G.J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Usiskin, Z. (2013). Studying textbooks in an information age—a United States perspective. *ZDM Mathematics Education* 45, 713-723. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0514-6>
- Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: Analyses from a psychological perspective. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives* (pp. 123-126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado*, 19(2), 441-462. <http://hdl.handle.net/10481/37386>
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2017). Propositiones, procedimientos y argumentos sobre probabilidad en libros de texto chilenos de Educación Primaria. *Profesorado*, 21(1), 433-457.
- Vásquez, C., Coronata, C. y Rivas, H. (2021). Enseñanza de la estadística y la probabilidad de los 4 a los 8 años de edad: una aproximación desde los procesos matemáticos en libros de texto chilenos. *PNA*, 15(4), 339-365. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22512>

PROBABILITY IN TEXTBOOKS: RESEARCH FROM THE ONTOSEMIOTIC APPROACH

Abstract

Textbooks are a useful resource in the planning and implementation of teaching, as they organise the curricular contents and adopt their methodological and assessment perspective to them. They are also a mediator of the teaching and learning processes in the classroom and support the student's study. Consequently, their analysis has received a considerable amount of attention in mathematics education research. The aim of this chapter is to present a synthesis of research from the ontosemiotic approach to mathematical cognition and instruction concerning the presentation of probability content in textbooks. We focus on probability because of its importance in complementing other branches of mathematics that only consider deterministic situations. The work is based on ontosemiotic approach elements and the various meanings of probability. The method used is the content analysis of a purposive sample of published works on the subject, selected for their special contribution to further research on the topic. Results summarise the main contributions of the selected research on each mathematical object considered in the ontosemiotic approach, following with the presentation of examples of other perspectives taken into account. The paper concludes with some suggestions for further research on the subject.

Keywords: Ontosemiotic approach, probability, textbooks, research synthesis.

A PROBABILIDADE NOS MANUAIS ESCOLARES: INVESTIGAÇÃO A PARTIR DA ABORDAGEM ONTOSEMIÓTICA

Resumo

O manual escolar é um recurso útil na planificação e intervenção pedagógica, na medida em que organiza os conteúdos curriculares, adoptando a sua abordagem metodológica e de avaliação dos mesmos. É também um mediador do processo de ensino e aprendizagem na sala de aula e serve de apoio ao estudo do aluno. Por isso, a sua análise tem merecido muita atenção na investigação em educação matemática. O objetivo deste capítulo é apresentar uma síntese das investigações da abordagem ontosemiótica da cognição matemática e da instrução sobre a apresentação dos conteúdos de probabilidade nos manuais escolares. Centramo-nos na probabilidade devido à sua importância no complemento de outros ramos da matemática que apenas consideram situações determinísticas. O trabalho baseia-se em elementos da abordagem ontosemiótica e nos vários significados da probabilidade. O método utilizado é a análise de conteúdo de uma amostra intencional de trabalhos publicados sobre o tema, seleccionados pela sua especial contribuição para o aprofundamento da investigação sobre o assunto. Como resultados, são sintetizados os principais contributos da investigação selecionada sobre cada um dos objectos matemáticos considerados na abordagem ontosemiótica, finalizando com a apresentação de outras perspectivas tidas em conta. Termina com algumas sugestões para futuras investigações sobre o tema.

Palavras-chave: abordagem ontosemiótica, probabilidade, manuais escolares, síntese de investigação.

Carmen Batanero Bernabeu

Universidad de Granada, Granada, España.

batanero@ugr.es

<https://orcid.org/0000-0002-4189-7139>

Catedrática jubilada de Didáctica de la Matemática. Miembro del Grupo de Investigación FQM-126. Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística en la Universidad de Granada, España. Fue presidenta de la International Association for Statistics Education (IASE) y miembro del Comité Ejecutivo del International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

Macarena Elgueda-Ibarra

Universidad de Granada, Granada, España.

e.macaelgueda@go.ugr.es

<https://orcid.org/0009-0003-3425-7461>

Profesora de Estado en Matemáticas y Computación y Licenciada en Educación por la Universidad de La Serena, Chile. Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Actualmente desarrollando estudios en la línea de Educación Matemática: Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística del programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España. Becaria folio 72220183 de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), Chile.

Osmar D. Vera

Universidad de Cádiz, Cádiz, España.

osmar.dario@uca.es

<http://orcid.org/0000-0003-2163-8516>

Profesor de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Cádiz. Cuenta con amplia experiencia anterior como profesor de Matemáticas y enseñanza de Estadística en la universidad. Máster y Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Miembro del Grupo de Investigación FQM-126 Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística en la Universidad de Granada, España. Ha publicado trabajos de investigación sobre enseñanza de la probabilidad, estadística y combinatoria.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN LOS LIBROS DE TEXTO: UNA MIRADA DESDE LA ALFABETIZACIÓN Y PENSAMIENTO ESTADÍSTICO

Francisco Rodríguez-Alveal

Ane Izagirre Korta

RESUMEN

En este capítulo se analiza la presencia de las medidas de tendencia central en los libros de texto de enseñanza primera y secundaria en Chile y su relación en la alfabetización y pensamiento estadístico. Para tal efecto se siguió una metodología de corte cualitativa y haciendo uso del método de análisis de contenido de los libros de enseñanza primaria y secundaria distribuidos gratuitamente por el Ministerio de Educación chileno en los años 2016, 2020 y 2023, los que fueron seleccionados mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado, de 7 libros de texto del estudiante. Entre los principales resultados se destacan ambigüedades léxicas en las definiciones acerca de las medidas de tendencia central, en particular se utiliza indistintamente el término promedio con media, de manera similar la noción de número y dato, además de la presencia de procesos de decodificar información resumida en representaciones gráficas en índices numéricos de tendencia central. Asimismo, las actividades son esencialmente procedimentales y las interpelaciones afines a ellas demanda la aplicación de procedimientos mecánicos por sobre la reflexión, como así también interpelaciones que inviten a la toma de decisiones a nivel poblacional. En síntesis, las actividades y/o situaciones problemas afines a las medidas de tendencia central son del tipo procedimental que eventualmente no favorecen la adquisición en el estudiantado del sistema escolar de una alfabetización y pensamiento estadístico.

Palabras clave: medidas de tendencia central, alfabetización estadística, pensamiento estadístico, libros de texto, Educación Primaria, Educación Secundaria.

Como citar: Rodríguez-Alveal, F. e Izagirre, A. (2024). Medidas de tendencia central en los libros de texto: una mirada desde la alfabetización y pensamiento estadístico. En D. Díaz-Levicoy y A. Salcedo (Eds.), *Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística* (pp. 41-67). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales propósitos de la estadística descriptiva es resumir e interpretar datos cuantitativos y/o cualitativos mediante métodos gráficos y numéricos (Rodríguez-Alveal et al., 2016). En este contexto, las medidas numéricas de tendencia central, es decir, media aritmética (o promedio aritmético), mediana y moda permiten obtener un valor representativo de un conjunto de datos asociados a una variable de naturaleza cuantitativa. Al respecto cabe destacar que la moda también se puede obtener para datos cualitativos nominales u ordinales y, de manera similar, la mediana para datos cualitativos ordinales.

Al respecto, la presencia del concepto de la media aritmética y su fórmula fue extendida desde la Edad Media y, como mencionan Estrella et al. (2019), ha sido parte del currículo por más de 100 años. No obstante, como mencionan Cobo y Batanero (2004), su comprensión es compleja debido que no siempre es comprendida por el estudiantado de educación primaria y secundaria. Situación que eventualmente podría generar tensiones en el proceso formativo dado que es la base de varios conceptos estadísticos entre los que se destacan la forma de una distribución de datos cuantitativos, los momentos de una variable aleatoria, la caracterización de distribuciones de probabilidad y la inferencia estadística paramétrica y no paramétrica y en particular las distribuciones de muestreo y ley de los grandes números, entre otras.

Reconociendo la importancia de las medidas de tendencia central en la comprensión del comportamiento de datos cuantitativos y/o cualitativos, el informe GAISE (2016) y en particular el currículo escolar chileno demanda desarrollar habilidades como calcular, e interpretar las medidas de tendencia central, habilidades que se encuentran en estrecha relación con la alfabetización estadística. La que según Garfield (2002) es la capacidad de leer, interpretar y evaluar información de la vida diaria mediante el uso del lenguaje estadístico, como así también la comprensión de símbolos, vocabulario o conceptos estadísticos (Ben-Zvi y Garfield, 2004).

En este contexto, diversos autores entre los que se encuentran Rodríguez-Alveal et al. (2016) entregan antecedentes que el profesorado chileno en formación comete errores en el cálculo del promedio aritmético y el promedio aritmético ponderado cuando se encuentran implícitamente en enunciados de situaciones problemas. Asimismo, Estrella (2016) hace notar que las ideas estadísticas acerca del contexto y representatividad de un conjunto de datos están alejadas de la formación de las profesoras y los profesores de educación primaria. Por su parte, Izagirre et al. (2023) mencionan que el profesorado en formación de educación primaria en España manifiesta

dificultades en el cálculo de la moda en variables cualitativas, además de la dificultad en la utilización del lenguaje estadístico, habilidad propia de la alfabetización estadística.

Producto de lo anterior, esta investigación se centró en analizar las actividades presentes en los libros de texto escolares de enseñanza primera y secundaria en Chile relacionados con las medidas de tendencia central y si estas se enfocan en desarrollar habilidades propias de la alfabetización y pensamiento estadístico. Para dar respuesta al objetivo general se plantearon los siguientes objetivos específicos: 1) Analizar las definiciones relacionadas con las medidas de tendencia central presentes en los libros de texto; y 2) Clasificar las actividades propuestas en los libros de texto, respecto de la comprensión de las medidas de tendencia central según el nivel de complejidad, 3) Determinar la relación de las actividades sobre las medidas de tendencia central en los libros escolares con la alfabetización y pensamiento estadístico.

MARCO TEORICO

Medidas de tendencia central en el currículo escolar

Las medidas de tendencia central, en particular el promedio aritmético es muy utilizado en la vida cotidiana (Cobo y Batanero, 2007) y en los medios de comunicación. Además, es uno de los objetos estadísticos ampliamente tratados en el sistema escolar introducido a partir de quinto año de enseñanza primaria en los libros de texto entregados por el Ministerio de Educación de Chile (en adelante MINEDUC). En la Tabla 1, se entregan los objetivos de aprendizaje propuestos en el currículo escolar chileno, relacionados con las medidas de tendencia central.

Tabla 1

Objetivos de aprendizaje acerca de las medidas de tendencia central en Educación Primaria y Secundaria, por nivel (MINEDUC, 2012).

Nivel	Objetivo de aprendizaje (OA)	Código
5	Calcular el promedio de datos e interpretarlo en su contexto.	OA5
6	No se observan objetivos de aprendizaje afines al concepto de medidas de tendencia central	--
7	Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango: Determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población. Determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado.	OA7
8	No se observan objetivos de aprendizaje afines al concepto de medidas de tendencia central	--

Nivel	Objetivo de aprendizaje (OA)	Código
1	No se observan objetivos de aprendizaje afines al concepto de medidas de tendencia central	--
2	No se observan objetivos de aprendizaje afines al concepto de medidas de tendencia central	--

Llama la atención que a nivel de quinto año básico el OA5 hace alusión al concepto promedio el que eventualmente podría generar una ambigüedad léxica debido que también se utiliza para hacer referencia a la mediana e incluso a la moda (Triola, 2006). En tal caso, Kaplan et al. (2009) expresan que el término promedio no debe usarse cuando se hace referencia a una medida de centro en particular, situación que propicia una ambigüedad léxica debido al significado variable que los individuos pueden atribuir a la palabra promedio. Lo que eventualmente incidiría en la adquisición de la definición y conceptos de las medidas de tendencia central, habilidades relacionadas con la alfabetización estadística. Por su parte, el OA7 alude a la realización de inferencias en base a las medidas de tendencia central, de las cuales la media aritmética juega un rol fundamental, desde una mirada esencialmente intuitiva.

En esta misma línea, investigaciones como la de Cobo y Batanero (2004) entregan evidencias que en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria en España el concepto de media aritmética (o promedio aritmético) es introducido mediante la memorización de definiciones y sus actividades se centran esencialmente en la utilización de fórmulas, obviando el estudio de sus propiedades. Situación similar ocurre con los libros de texto de enseñanza Primaria en México como lo muestra el trabajo realizado por Díaz-Levicoy et al. (2020). Asimismo, Carvalho y Gitirana (2014) analizan el tratamiento de la media aritmética en libros de texto en Brasil, observando que la mayoría de las actividades no promueven la reflexión de sus propiedades y recientemente Parra-Fica et al. (2024) hacen notar que las habilidades presentes en los libros de texto chileno de educación primaria relacionadas con las medidas de tendencia central son esencialmente de niveles cognitivos básicos.

Medidas de tendencia central y alfabetización y pensamiento estadístico

Teniendo presente los objetivos de aprendizaje del MINEDUC (ver Tabla 1) se tiene que a nivel de quinto año de enseñanza primaria además del cálculo de las medidas de tendencia central se solicita interpretarlas en su contexto, habilidades propias de la alfabetización estadística (delMas, 2002; Garfield, 2002), de lo que se desprende que en el currículo escolar chileno la alfabetización

estadística como han mencionado Ben-Zvi et al. (2017) es un objetivo importante de la educación estadística.

Por otro lado, en séptimo año de primaria los objetivos de aprendizaje de manera implícita hacen referencia al pensamiento estadístico el cual es un tipo de pensamiento según Garfield y Ben-Zvi (2008) que busca tener claridad acerca de la selección de modelos y procedimientos adecuados para el análisis estadístico de los datos, la interpretación de los resultados según la situación contextual y la evaluación crítica de resultados de estudios estadísticos.

En esta misma línea, de la Tabla 1 se desprende que los objetivos de aprendizaje se relacionan con dos de las cuatro dimensiones del marco para el pensamiento estadístico propuesto por Wild y Pfannkuch (1999). En particular, el relacionado con: a) *Tipos fundamentales de pensamiento estadístico* en el cual se reconoce la necesidad de los datos, el proceso de transnumeración, la percepción de la variación y la integración de la estadística y el contexto. Como así también el b) *Ciclo interrogativo* que abarca generar, buscar, interpretar, criticar y juzgar.

Estudios como el de Estrada et al. (2004) y Freitas et al. (2018) han encontrado evidencias que tanto el profesorado en formación como el estudiantado tiende a confundir los conceptos de media aritmética, mediana y moda en distribuciones asimétricas. Por otro lado, la investigación de Izagirre et al. (2023) señala que el profesorado en formación de primaria presenta dificultades en el cálculo de la moda de variables cualitativas. Estos hallazgos resaltan la importancia de fortalecer las habilidades relacionadas con el pensamiento estadístico en el ámbito educativo.

Del sistema real al sistema estadístico

La interpretación de representaciones gráficas de datos estadísticos como mencionan Garfield y Ben-Zvi (2007) es una de las habilidades asociadas a la alfabetización estadística. Al respecto, las representaciones gráficas permiten “comunicar aspectos de una distribución, ya que facilitan centrarse en aspectos de los datos que pueden pasarse por alto con el uso exclusivo de estadísticas descriptivas” (Leavy, 2006, p. 90). En este contexto, el cambio de representación de datos brutos (sistema real) en una representación gráfica (sistema estadístico) permite visualizar características de los datos tales como forma, variabilidad y tendencia central. No obstante, este cambio de representación bidireccional permite no solo transformar DATOS en GRAFICOS, sino también GRAFICOS en DATOS. Situación que exige del estudiantado habilidades asociadas a la lectura e

interpretación de representaciones gráficas, habilidades que fomentan la alfabetización y el pensamiento estadístico. En particular, el histograma es una de las representaciones ampliamente utilizadas para mostrar la distribución de los datos cuantitativos (Moore, 2009) en el cual es posible distinguir características de los datos como variabilidad, tendencia central y forma (simetría o asimetría) la que permite potenciar el análisis de los datos en conjunto con las medidas de tendencia central.

Al respecto, en la literatura estadística investigadores como Shaughnessy (2007) definen el histograma como un gráfico de barras que cumple con los siguientes criterios: a) En el eje horizontal se presentan los datos de la variable estadística; b) Los datos se miden a escala de intervalo o relación; c) La variable es preferentemente continua; d) En el eje vertical generalmente se muestra la frecuencia observada o relativa de cada intervalo de amplitud constante. Esta definición es coherente con la presentada por Devore (2008) en su libro, ampliamente utilizado en las asignaturas de estadística a nivel de pregrado en algunas universidades chilenas. En el cual, se hace referencia al uso del histograma cuando los datos son de naturaleza cuantitativa discreta:

En primer lugar, se determina la frecuencia y la frecuencia relativa de cada valor x . Luego se marcan los valores x posibles en una escala horizontal. Sobre cada valor, se traza un rectángulo cuya altura es la frecuencia relativa (o alternativamente, la frecuencia) de dicho valor (p. 14)

Y en el caso de datos cuantitativos continuos:

Se determina la frecuencia y la frecuencia relativa de cada clase. Se marcan los límites de clase sobre un eje de medición horizontal. Sobre cada intervalo de clase, se traza un rectángulo cuya altura es la frecuencia relativa correspondiente (o frecuencia). (p. 15)

Situación, que eventualmente podría generar una ambigüedad semiótica en el profesorado que en algunos casos confunden el gráfico de barras con el histograma (Izagirre et al., 2023).

Nivel de complejidad de las preguntas relacionadas con las medidas de tendencia central

En relación a las interpelaciones afines a temáticas estadísticas el informe GAISE (2016) propone que ellas: a) den respuesta sobre conceptos o preguntas que indaguen sobre conceptos erróneos comunes en estadística; b) promuevan la comprensión de conceptos estadísticos cardinales como estadígrafos, representatividad, muestreo etc. y no solo al cálculo, para temas afines a estadística descriptiva; c) deben orientarse a que el estudiantado extraiga conclusiones a partir de los datos; d) se puedan argumentar a partir de los datos y que el contexto le imprima significado. En este

contexto, la complejidad de los conocimientos y actividades que el estudiantado necesita para realizar una tarea o dar respuesta a una situación problema se puede clasificar acorde a lo mencionado por Glasnovic (2018) en tres niveles. Estos son: aplicación directa de conocimientos y habilidades básicos (Nivel 1), es decir, la reproducción o aplicación directa de conceptos, reglas o procedimientos; construir y tratar conexiones (Nivel 2) el cual requiere combinar conceptos para resolver los problemas o situaciones problemáticas; y reflexión o aplicación del conocimiento reflexivo (Nivel 3).

METODOLOGÍA

Para dar respuesta al objetivo propuesto se ha optado por realizar una investigación de corte cualitativo (McMillan y Schumacher, 2011), centrada en el análisis de contenido (Krippendorff, 1997) de las definiciones, notaciones, lenguaje, actividades y representaciones gráficas presentes en los libros de texto de Educación Primaria y Secundaria relacionadas con los estadísticos promedio aritmético, mediana y moda, respectivamente. La muestra fue intencionada del tipo por disposición y se encuentra conformada por 7 libros de texto entregados de manera gratuita por el MINEDUC a los establecimientos educacionales particulares subvencionados y municipalizados de Chile de los cuales 5 corresponden a Enseñanza Primaria (TEP) y 2 a Enseñanza Secundaria (TES). Cabe destacar que el libro de texto de enseñanza primaria editado el año 2020 ha sido reutilizado en los años 2021, 2022 y 2023, por lo cual para efectos del presente estudio se considerará el último año de edición como se muestra en la Tabla 2. El código utilizado para representar dichas unidades de análisis fue [Texto Escolar y nivel de escolaridad, año, n° de la página en el texto escolar]. A modo de ejemplo: [TEP5, 2016, p. 301] representa el libro de texto del estudiante de quinto año de enseñanza primaria del año 2016 cuya pregunta aparece en la página trescientos uno.

Tabla 2

Libros de texto seleccionados y analizados.

Código	Autores/Título/Editorial	Año
TEP5	Alfaro, S., Espinoza, Y., Riquelme, M., Ainardi, V., Aldunate, V., Falconi, P., Olivares, C., Texto del estudiante, Matemática 5° Básico, Houghton Mifflin Harcourt.	2016
TEP7	Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., Rupin, P., Texto del estudiante, Matemática 7° Básico, SM	2016
TES1	Muñoz, G., Santis, M., del Valle, J. Texto del estudiante, Matemática 1 medio,	2016

SM

TEP5	Ho., Dr Fong., Soon, G., Ramakrishnan, C., Texto del estudiante, Matemática 5° Básico. Santillana.	2020
TES1	Galasso, B., Maldonado, L., Marambio, V. Texto del estudiante, Matemática 1 medio, Santillana.	2020
TEP5	Alvarado, L., Carrero M., Caroca, M. Texto del estudiante, Matemática 5° Básico. Santillana	2023
TEP7	Iturra, F., Manosalva, C., Ramírez, M., Romero, D., Texto del estudiante, Matemática 7° Básico, SM.	2023

Para el análisis de contenido se hizo uso de la propuesta de Mayring (2000). En un primer lugar se seleccionan los libros de texto que serán analizados; en segundo lugar, se identifican y seleccionan los capítulos afines a estadística relacionados con las medidas de tendencia central. En tercer lugar, se analizó el léxico, conceptos, definiciones, actividades y sus alcances con las habilidades relacionadas con la alfabetización y pensamiento estadístico (Garfield, 2002; delMas 2002; Garfield y Ben-Zvi, 2008). En cuarto lugar, se realizó un proceso de triangulación entre los dos investigadores: inicialmente, cada investigador clasificó las preguntas de manera individual; se compararon los resultados de ambos investigadores obteniendo un elevado índice de coincidencia; finalmente, se analizaron en conjunto los pocos casos de discrepancia, quedando clasificados de manera consensuada. Finalmente, se contrastan los hallazgos con estudios empíricos y los lineamientos dados por el MINEDUC, Wild y Pfannkuch (1999).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados son presentados en cuatro secciones las que permiten dar cuenta de los objetivos propuestos por los investigadores.

Léxico y conceptos estadísticos

Una de las habilidades asociadas a la alfabetización estadística según Ben-Zvi y Garfield, (2004) es la comprensión de símbolos, vocabulario, conceptos estadísticos. En este sentido, en primer lugar, se analizaron las definiciones presentes en los libros de texto de enseñanza primaria y secundaria de las medidas de tendencia central. Al respecto, a nivel de quinto año de enseñanza primaria se hace alusión indistintamente al concepto de media, media aritmética y promedio como se muestran en las siguientes citas.

La media es el promedio de un conjunto de números. El promedio o media es la suma del conjunto de números dividido por el total de números. (TEP5-2016, p. 256)

El promedio o media aritmética (\bar{x}) es el cociente entre la suma de los valores numéricos de la variable y la cantidad total de datos. (TEP5-2020, p. 299)

El promedio o media aritmética es el valor que representa un conjunto de datos y corresponde al cociente entre la suma de los valores numéricos de la variable y la cantidad total de datos. (TEP5-2021, p.180)

Se llama media aritmética o promedio a la cantidad total de la variable distribuida en partes iguales. (TEP7-2023, p. 199)

En las que se evidencia que, en varios libros de texto, independientemente del año de publicación, hacen equivalentes las palabras medias y promedio o promedio con media aritmética aun cuando Triola (2006) ha mencionado que el concepto promedio se puede asociar a cualquiera de las tres medidas de tendencia central (media aritmética, moda o mediana).

Asimismo, en los libros de séptimo año de primaria que han sido reutilizados entre los años 2020 y 2023 en los cuales además se incluyen las definiciones de la mediana y la moda. Al respecto, las definiciones dadas son:

Se llama moda (Mo) de un conjunto de datos a la variable que presenta mayor tendencia de ocurrencia. Para calcular esta medida de tendencia central, identificamos la variable cuya frecuencia absoluta es mayor que el resto de los datos. (TEP7-2023, p. 199)

La mediana corresponde al valor que ocupa el término central de un conjunto de datos una vez ordenados de menor a mayor o viceversa. (TEP7-2023, p. 199)

Por otro lado, llama la atención la poca claridad que presenta la definición de la moda entregada en el libro de texto de séptimo año de primaria en el cual definen la “moda (Mo) de un conjunto de datos a la variable que presenta mayor tendencia de ocurrencia” (TEP7-2023, p. 199) atendiendo que los datos de naturaleza cuantitativa o cualitativa son observaciones asociadas a una variable situación que no es clara en la definición entregada en el libro de texto mencionado. Además, no se explicita claramente para el caso de variables cualitativas, situación que podría explicar los hallazgos entregados por Izagirre et al. (2023) acerca de la dificultad del profesorado en formación para calcular la moda para datos de naturaleza cualitativa. Por otro lado, independientemente de los años de edición de los libros de texto analizados, el 12,4% de los enunciados de las actividades hacen uso indistintamente de los conceptos números y datos los que poseen diferente significado como lo han hecho saber Cobb y Moore (1997), para quienes en estadística “los datos no son números, se trata de números con un contexto” (pp. 801-803). Al

respecto, se entregan algunas citas de los libros de texto:

Halla el promedio de los datos 15,32,16. [TEP5-2016, p.252]

Los siguientes números fueron ordenados de menor a mayor:1, 8, 9, x, 17, 23. Calcula el valor de x y la mediana del conjunto, si se sabe que el promedio de los datos es 12. [TEP7-2016, p.323]

Calcula el promedio (\bar{x}) de los siguientes conjuntos de números 4,4,10,12 y 18 [TEP5-2020, p.301]

Calcula el promedio de los siguientes datos, 72 kg, 78 kg,75 kg, 73 kg, 82 kg. [TEP5-2023, p.180]

La media aritmética de cinco números es 6,1. Si al grupo de datos se agrega un número, cuyo valor 6,1. ¿influirá este último al calcular el promedio, si ahora se consideran los seis números? Justifica. [TES7-2016, p. 316]

En esta misma línea cabe destacar que de los libros analizados solamente TEP7 (2016) hace mención al concepto de dato como “valor (cantidad o cualidad) observado de una variable.” (p. 285). Notar que en la definición dada en el libro de texto no se visualiza la diferencia entre número y dato como lo han hecho saber Cobb y Moore (1997). Esto eventualmente podría generar ambigüedades léxicas acerca del concepto de número y dato en los lectores de los libros de texto.

Decodificación de la información en Tablas y Gráficos

Otra de las habilidades afines a la alfabetización estadística son los cambios de representación de los datos en tablas y/o gráficos (Garfield, 2002) como así también su lectura. En este sentido, los libros de texto chilenos de enseñanza primaria introducen inicialmente gráficos asociados a datos cualitativos como por ejemplo los pictogramas, gráficos de barras simple, agrupados y sectoriales (Díaz-Levicoy et al., 2016). En cambio, para el caso de las variables cuantitativas discretas en los libros de texto de enseñanza primaria son representadas mediante gráficos de barras simple acorde a lo señalado por Shaughnessy (2007). En esta línea, los libros analizados presentan actividades tendientes a decodificar la información resumida en representaciones gráficas de manera de sintetizar los datos mediante las medidas de tendencia central. En la Tabla 3 se muestra el número de actividades relacionadas con este cambio de representación.

Tabla 3

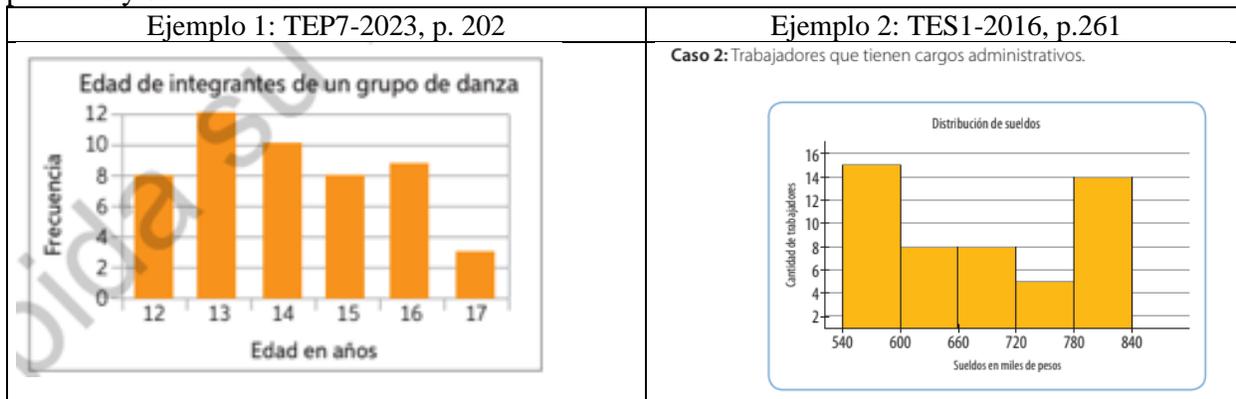
Distribución de la presencia de actividades en los textos escolares relacionadas con el cambio de representación de tablas y gráficos a medidas de tendencia central según años de edición

Representaciones	Texto 2016			Textos 2020		Textos 2023	
	TEP5	TEP7	TES1	TEP5	TES1	TEP5	TEP7
Pictograma	1	1					
Gráfico de barras simple		5	1				3
Gráfico de barras agrupadas							
Gráfico sectorial		1					1
Gráfico de puntos							1
Gráfico de líneas		1					
Histogramas			2				
Tablas de frecuencia	1	10	11	3			1

Como se aprecia en la Tabla 3, los libros de texto utilizados en el sistema escolar en los años 2020 y 2023 muestran una reducida presencia de actividades en las cuales se insta al estudiantado hacer un cambio de representaciones, como por ejemplo las asociadas a datos cuantitativos como el histograma. A manera de ejemplo en la Figura 1, se muestran dos representaciones una de ellas asociadas a una variable cuantitativa discreta (Ejemplo 1) y la otra a una variable cuantitativa continua (Ejemplo 2). Cabe notar que las variables en estudio son de naturaleza cuantitativa no obstante en el primer caso la distribución de los datos se representa mediante un gráfico de barras simple y en el segundo caso un histograma. Este escenario puede generar una ambigüedad semiótica que ya detectaron Izagirre et al. (2023), aunque el informe GAISE (2016) indica al respecto que el alumnado debería entender la diferencia entre un diagrama de barras e histograma. Por lo tanto, es importante que el alumnado sepa identificar la variable estadística en estudio y su naturaleza, y conozca las directrices para la elección del gráfico según el tipo de variable. Jacobbe y Horton (2010) también señalan que el alumnado se siente más cómodo leyendo los datos de un diagrama de barras, donde cada barra pertenece a un único valor, que un histograma, donde las barras contienen intervalos de valores. Asimismo, como ocurre en el Ejemplo 2 (ver Figura 1), los únicos dos histogramas encontrados en los libros de texto analizados tienen la misma amplitud de intervalo; por lo tanto, se hace un acercamiento al alumnado de lo que es un histograma, pero sin profundizar; esto probablemente se deba a la complejidad conceptual que se esconde detrás de estos gráficos, como apuntan Bruno y Espinel (2005).

Figura 1

Representación de datos cuantitativos discretos y continuos en los libros de texto de enseñanza primaria y secundaria



Por otro lado, en base a las representaciones gráficas presentadas en la Figura 1 se invita a los lectores dar respuesta a interrogantes como:

¿Cuál es el promedio de la edad del grupo? [TEP7-2023, p. 200]

¿Qué medida de tendencia central describirían de mejor manera los datos? [TES1-2016, p.261]

Puntualmente, la interpelación presentada en el TEP7 (2023) es de bajo nivel cognitivo atendiendo que es esencialmente algorítmica, es decir, multiplicar cada edad de los integrantes del grupo de danza con su frecuencia observada y dividir por el número de integrantes. En cambio, la pregunta del libro TES1 (2016) demanda conocimientos teóricos dado que su respuesta invita a los lectores a analizar el efecto de la asimetría y la presencia de datos extremos (Strauss y Bichler, 1988) antecedentes que eventualmente llevarían a cuestionar el promedio aritmético como medida de tendencia central para sintetizar numéricamente el comportamiento de los datos. Sin embargo, como menciona Devore (2008) el promedio aritmético “es la medida más ampliamente utilizada en gran medida porque existen muchas poblaciones para las cuales un valor extremo en la muestra sería altamente improbable” (p. 26).

Otra de las representaciones, escasamente utilizadas en los libros de texto de enseñanza primaria son los pictogramas. A manera de ejemplo, en el TEP5-2016 mediante un pictograma se ilustra la altura de 5 faros ubicados en las costas de Chile (Figura 2)

Figura 2

Distribución de las alturas en metros de cinco faros ubicados en las costas de Chile



Mediante dicha representación se solicita dar respuesta a las siguientes interrogantes:

- a. ¿Cuál es la altura media de los faros?; b. ¿Cómo variará la media si solo se usan los 4 faros más altos para hallarla? [TEP5-2016, p. 253]

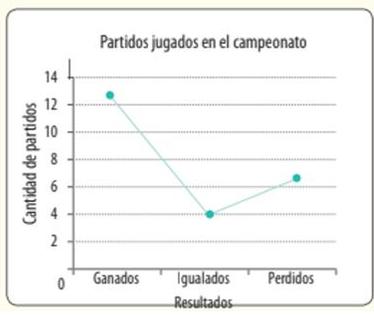
La primera de ellas es una actividad esencialmente procedimental, en cambio, la segunda se asocia al efecto de datos extremos en el cálculo de la media aritmética, de donde se podría conjeturar que la media aritmética es afectada por datos extremos. Llama la atención que los autores del libro de texto no soliciten al alumnado conjeturar acerca del comportamiento de la media aritmética en presencia de datos atípicos lo que eventualmente se relacionaría con el pensamiento estadístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008). En esta misma línea, el libro de texto TEP (2016) presenta solo una situación problema cuyo propósito es analizar el error cometido al calcular la media aritmética cuando se adiciona otro dato.

- ¿Cuál es el error? Jacinta dice que el promedio de los puntajes 87,98, 100 y 79 de los exámenes es 91. Luego suma un puntaje 74 y dice que ahora, el promedio es 109,5. ¿Cuál es su error? [TEP5-2016, p. 253]

Cuyo estudio a nivel de enseñanza primaria y secundaria resultan de interés atendiendo que como mencionan Aguerrea et al. (2022) los errores que comente el estudiantado en el sistema escolar en algunos casos persisten al entrar a la universidad. De manera similar, en los libros de texto se solicita extraer los datos presentes en un gráfico de líneas y en una serie de imágenes relacionadas con el cuidado del medio ambiente, como se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Representación de datos cualitativos en libros de texto analizados

Ejemplo 3: TEP7-2016, p. 318	Ejemplo 4: TEP7-2023, p.202																		
 <table border="1"><caption>Partidos jugados en el campeonato</caption><thead><tr><th>Resultados</th><th>Cantidad de partidos</th></tr></thead><tbody><tr><td>Ganados</td><td>13</td></tr><tr><td>Iguales</td><td>4</td></tr><tr><td>Perdidos</td><td>7</td></tr></tbody></table>	Resultados	Cantidad de partidos	Ganados	13	Iguales	4	Perdidos	7	<p>1. Un grupo de estudiantes realiza una encuesta entre sus compañeros con respecto al cuidado del medioambiente. Una de las preguntas fue: ¿Qué es lo que más haces para reparar el daño que le hacemos al medioambiente? Los resultados fueron los siguientes:</p>  <table border="1"><thead><tr><th>Acción</th><th>Número de personas</th></tr></thead><tbody><tr><td>Plantar árboles</td><td>15 personas.</td></tr><tr><td>Recoger basura</td><td>7 personas.</td></tr><tr><td>Reciclar</td><td>18 personas.</td></tr><tr><td>Rescatar animales</td><td>12 personas.</td></tr></tbody></table>	Acción	Número de personas	Plantar árboles	15 personas.	Recoger basura	7 personas.	Reciclar	18 personas.	Rescatar animales	12 personas.
Resultados	Cantidad de partidos																		
Ganados	13																		
Iguales	4																		
Perdidos	7																		
Acción	Número de personas																		
Plantar árboles	15 personas.																		
Recoger basura	7 personas.																		
Reciclar	18 personas.																		
Rescatar animales	12 personas.																		

En base a los cuales se solicita calcular la moda y el promedio respectivamente, como se muestra en las siguientes interrogantes.

Calcula el valor de la moda y luego interprétala. [TEP7-2016, p. 318]

¿Cuál es la acción que más realizan los estudiantes consultados? [TEP7-2023, p. 202]

Cabe destacar, que en el ejemplo 3 se hace uso de un gráfico de líneas para representar el comportamiento de una variable cualitativa, error que ha sido reportado por Izagirre et al. (2023) entre el profesorado en formación. Por otro lado, en el ejemplo 4 se hace referencia de manera implícita por el concepto de moda en la cual el estudiantado debe tener claro su definición e interpretación en una situación problema, habilidades propias de la alfabetización estadística.

Asimismo, las medidas de tendencia central además de sintetizar el comportamiento numérico de los datos nos permiten conocer el comportamiento distribucional de datos cuantitativos. En este sentido, solamente los libros de TEP7 (2016) y TES1 (2016) presentan actividades tendientes a introducir la noción de simetría y asimetría de los datos, un ejemplo de ello es la siguiente situación problema en la cual se entrega una tabla de resumen con estadísticos de tendencia central y variabilidad.

El departamento de deportes de un municipio inició las inscripciones para el taller de zumba. Cada inscrito tiene derecho a asistir a una clase semestral, siendo estos los lunes (grupo 1) o los miércoles (grupo 2). Para conocer el impacto de este taller, la profesora registró las edades de los asistentes durante la primera semana.

Día	Asistentes	Edad Promedio	Mediana	Edad mínima	Edad máxima	Rango
Lunes	11	25	16	14	45	31
Miércoles	11	25	27	21	28	7

¿Cómo es la distribución de las edades en cada uno de los grupos? [TEP7-2016, p. 324]

En la cual, llama la atención que no alude al valor modal de la distribución de los datos. En esta misma línea, en otra de las situaciones problemáticas se hace uso de una representación gráfica y los valores de los estadísticos de la mediana y media sin explicitar si se trata de la media aritmética, geométrica o armónica respectivamente como se muestra a continuación.

Debido al interés de otras personas en realizar actividad física, la municipalidad habilitó tres salones para realizar fitness (taller 1), yoga (taller 2) y pilates (taller 3). Cada persona puede inscribirse en solo uno de los tres. A continuación, se muestra la cantidad de horas semanales que realizan las personas inscritas en cada uno de los talleres. ¿Cómo es la distribución de las horas de las personas en cada taller?



[TEP7-2016, p.325]

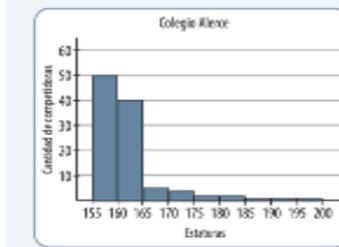
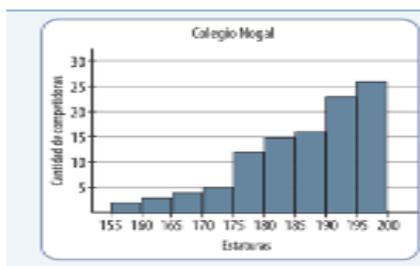
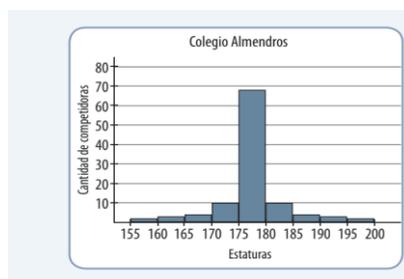
De la figura, se asume que los autores del libro de texto analizado asumen que la palabra media llevaría al lector a considerar la media aritmética. Asimismo, cabe destacar que los valores de la mediana y media aritmética se complementan con el valor de la moda entregado en la representación gráfica asociada a la cantidad de horas que presenta la mayor frecuencia observada (4 horas). De lo cual se desprende que si las tres medidas de tendencia central coinciden la distribución de la variable de interés es simétrica (Gráfico asociado a las horas de fitness semanal por persona), caso contrario la distribución de la variable presenta una asimetría positiva ($M_e < \bar{x}$) o negativa ($M_e > \bar{x}$). Al respecto, llama la atención que libros especializados como por ejemplo el Devore (2008) también consideran solamente la mediana y la media aritmética para el análisis de la forma de la distribución de los datos, suponiendo implícitamente que ella es unimodal. No obstante, también se presenta una interrogante en el libro de séptimo año básico (2016) en la cual se hacen mención a la relación entre la media aritmética, la mediana y la moda para decir acerca de la distribución de los datos.

¿Cómo sería la distribución de los datos de una muestra si la moda fuese mayor que la mediana y su media menor que esta? Discute con tus compañeras y compañeros. [TEP7-2016, p.325]

Situación que es cuestionable atendiendo que en general la forma de la distribución de los datos es analizada desde la comparación de la media aritmética y la mediana, lo que invita al profesorado a considerar también la moda en distribuciones unimodales. Por su parte, el libro de TES1 (2016) se hace mención a una situación problema en la cual se entrega una tabla de resumen de estadísticas básicas (media aritmética, moda y media) como así también el histograma asociado a la estatura de las competidoras de cada uno de los colegios.

Mariela y Esteban deben realizar un informe respecto a la estatura de las competidoras de unas olimpiadas escolares en la que participan tres colegios. Ellos cuentan con los histogramas de cada colegio y las medidas de tendencia central, pero desconocen cuáles medidas corresponden a qué establecimiento. (TES1-2016, p. 263)

Media	Moda	Mediana
186 cm	197 cm	177 cm
162 cm	157 cm	162 cm
177 cm	177 cm	187 cm



En la cual se solicita dar respuesta a las siguientes interrogantes:

¿A cuál colegio pertenece cada una de las medidas de tendencia central? ¿Qué puedes concluir respecto a la estatura de las competidoras de cada colegio a partir de los histogramas y las MTC?

Las que se encuentran asociadas a cuestiones teóricas, asociadas al pensamiento estadístico atendiendo que el lector debe tener presente la relación entre las medidas de tendencia central y la distribución de los datos, es decir, se solicita hacer una doble lectura entre gráficos y medidas de resumen. Asimismo, se solicita concluir al respecto habilidad asociada a la alfabetización estadística. Por otro lado, en los libros de texto se presenta una situación problema con un conjunto de datos, como, por ejemplo:

Las siguientes son las notas obtenidas por los alumnos de 7° básico en un trabajo de historia

6,0	6,5	5,5	4,5	5,0	6,0	6,5	5,0	5,0	5,0	6,0	6,0	5,0	4,5	6,0	6,0
5,5	6,0	5,0	5,0	5,0	5,0	6,5	6,5	5,0	6,5	5,0	5,5	5,5	5,5	6,0	5,5

Compara el valor de la media y la mediana, ¿qué puedes concluir acerca de la distribución de la muestra? [TEP7-2016, p. 323]

En el cual, los lectores deben calcular y comparar el valor de la media aritmética y la mediana para obtener una conclusión sobre la distribución de los datos. Lo que permitirá realizar una mejor lectura acerca del comportamiento de los datos en el contexto de la situación planteada.

Nivel de complejidad de las preguntas relacionadas con las medidas de tendencia central

En relación a las interpelaciones y actividades afines a las medidas de tendencia central, en la Tabla 4, se muestra el nivel de complejidad de las preguntas y/o instrucciones presentadas en los libros de texto del estudiante siguiendo la clasificación de Glasnovic (2018).

Tabla 4

Nivel de complejidad de las preguntas asociadas a las medidas de tendencia central en los libros de texto analizados

Nivel de complejidad	Textos 2016			Textos 2020		Textos 2023	
	TEP5	TEP7	TES1	TEP5	TES1	TEP5	TEP7
Nivel 1	7	47	12	23	1	11	19
Nivel 2	2	41	30	3			28
Nivel 3	1	1	6	1			1
Total	10	89	48	27	1	11	48

En la cual se observa, que mayoritariamente se clasifican en el nivel 1 ($120/234 = 51.28\%$), es decir, son interrogantes en la cual el estudiantado debe aplicar directamente los conocimientos y habilidades básicas. A manera de ejemplo, se presentan las siguientes citas de los libros de texto del estudiante.

¿Cuál es la longitud promedio del brazo de los integrantes del grupo? [TEP5-2020, p. 304]

Calcula el promedio de Alan en ambas asignaturas. ¿Qué significan esos valores? [TEP7-2023, p. 201]

Calcula la media, la mediana y la moda de los datos. Escribe una conclusión para cada medida. [TES1-2020, p.224]

Atendiendo que se limitan al uso de las fórmulas relacionadas con las medidas de tendencia central, es decir, una mirada aritmetizada de la estadística, haciendo uso de pronombres

interrogativos como *cuál* y verbos como *calcular*. En segundo lugar, el 44.44% de las preguntas se clasifican en el nivel 2, a manera de ejemplo:

Jacinta dice que el promedio de los puntajes 87,98, 100 y 79 de los exámenes es 91. Luego suma un puntaje de 74 y dice que ahora el promedio es 109,5 ¿Cuál es el error? [TEP5-2016, p. 253]

Javiera obtuvo las siguientes calificaciones en la asignatura de Matemática: 6, 5, 4 y 5. Si obtiene un promedio inferior a 5,5 debe rendir el examen. Javiera afirma que se eximirá del examen. ¿Está en lo correcto Javiera? Justifica tu respuesta. [TEP5-2020, p. 301]

En las cuales, se solicita a los lectores construir y conectar conceptos para dar respuesta a las interrogantes formuladas. Finalmente, hay una escasa presencia de interpelaciones en las cuales se invita al estudiantado a reflexionar o aplicar los conocimientos adquiridos de manera reflexiva (10/234) como, por ejemplo.

Crea una situación en la que uses los conjuntos de números de la actividad 2 y tengas que calcular el promedio. [TEP5-2020, p. 301]

La siguiente información corresponde a las medidas de tendencia central sobre los atrasos registrados durante 30 días por los buses de las compañías “Buen viaje” y “Trayecto seguro” ¿Piensas que con las medidas de tendencia central entregadas puedes tomar una decisión de este tipo? ¿Por qué? [TES1-2020, p.263]

En la cual, se les solicita a las y los estudiantes crear una situación problema contextualizada en la cual hagan uso de datos conocidos, este tipo de actividad es frecuente en los libros de texto en temáticas afines a matemática. Por otro lado, en la segunda actividad TES1 (2020) los lectores deben tomar decisiones acerca de qué medida de tendencia central es pertinente acorde a la naturaleza de los datos, actividad en la cual intervienen habilidades afines al pensamiento estadísticos (Garfield y Ben-Zvi, 2008).

Por otro lado, al analizar las situaciones problemas presentes en los libros de texto entregados por el MINEDUC se observa que solamente hay una pregunta relacionado con la inferencia informal, aun cuando es uno de los OA presentes a nivel de séptimo año de primaria (Tabla 1). Esta es definida, por Pfannkuch (2006) como “la extracción de conclusiones a partir de datos que se basan principalmente en observar, comparar y razonar a partir de distribuciones de datos” (p. 1). Un ejemplo de ello es la pregunta presentada en el libro de primer año de secundaria TES1(2016).

¿Qué se puede inferir a través de las medidas de tendencia central de una muestra acerca de características de una población? [TES1-2016, p. 263]

Interpelación en la cual los lectores deben conectar ideas y conceptos estadísticos como muestra, población, estadístico y parámetro para tomar decisiones en base a datos empíricos acerca del comportamiento poblacional. Cabe destacar que la interrogante, se encuentra en estrecha relación con el pensamiento estadístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008) entendiéndolo como la habilidad cognitiva que implica la capacidad de comprender, interpretar y aplicar conceptos estadísticos más allá de la simple manipulación numérica.

Llama la atención, que en los libros de texto de los años 2020 y 2023 no se expliciten interrogantes de este tipo, por lo tanto, desde una mirada pedagógica se debería analizar su presencia de este tipo de preguntas en las próximas ediciones de los libros de texto atendiendo que a nivel de tercer y cuarto año de educación secundaria en Chile se introducen conceptos afines a la inferencia estadística.

Medidas de tendencia central y su relación con la alfabetización y pensamiento estadístico

Figura 4

Habilidades y conocimientos acerca de la alfabetización y pensamiento estadístico presente en las preguntas sobre medidas de tendencia central en los libros de texto analizados

Habilidades/conocimientos	Año 2016			Año 2020		Año 2023	
	TEP 5	TEP 7	TES 1	TEP 5	TES 1	TEP 5	TEP 7
Reconocimiento de la necesidad de los datos							X
Transnumeración		X				X	X
Percepción de la variación	X	X	X				
Razonamiento de modelos							
Integración de la estadística y el Contexto		X					X
Planteamiento del problema y preguntas							
Planificación y diseño							
Datos: Recolección de datos							X
Análisis descriptivo de los datos							
Conclusión: Interpretación y comunicación		X	X				X
Evaluación crítica de los resultados		X					
Lenguaje estadístico							
Conceptos estadísticos		X	X				
Comprensión de vocabulario	X	X	X				X
Comprensión de símbolos							
Representaciones en tablas y gráficos	X	X	X				

Fuente: Wild y Pfannkuch (1999), Garfield y Ben-Zvi (2008)

En la Figura 4, se vinculan las habilidades y conocimientos presentes en las preguntas afines a las medidas de tendencia central presentes en los libros de texto analizados en relación a las

habilidades asociadas a la alfabetización estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2008) y a los tipos de pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999).

Como se puede observar en la Figura 5, los libros de texto de educación primaria (TEP7, 2016; TEP7, 2023) presentan situaciones problemas relacionadas con la integración de la estadística y el contexto, siendo este un tipo de pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). A continuación, se muestran dos ejemplos presentes en dos series de libros de texto.

Figura 5

Ejemplos de actividades donde el alumnado debe tomar una decisión en base a los datos proporcionados.

Ejemplo TPE7-2016 (p.314)	Ejemplo TEP7-2023(p. 208)																												
<p>Aplica</p> <p>6. Una municipalidad desea saber las edades de las personas que van a la plaza durante la mañana, con el objeto de ofrecer actividades enfocadas a ellos. Observa la imagen y calcula la edad promedio de las personas que asisten a la plaza.</p>  <p>Analiza el resultado obtenido. De acuerdo a esto, ¿la municipalidad debiese realizar actividades para niños o adultos? Justifica tu respuesta.</p>	<p>1. La Municipalidad desea conocer las edades de las personas que visitan la plaza en la mañana con el objetivo de realizar actividades dirigidas a la mayoría.</p> <table border="1" data-bbox="779 756 1388 976"> <tbody> <tr> <td>Patricio 56 años</td> <td>Daniela 65 años</td> <td>Arlette 35 años</td> <td>Carla 66 años</td> <td>Romina 50 años</td> <td>Lisette 48 años</td> <td>Patricia 30 años</td> </tr> <tr> <td>Gladys 70 años</td> <td>Luis 6 años</td> <td>Simón 85 años</td> <td>Anita 6 años</td> <td>Natalia 6 años</td> <td>Fabían 2 años</td> <td>Cristián 6 años</td> </tr> <tr> <td>Carlos 63 años</td> <td>Julio 56 años</td> <td>Catalina 65 años</td> <td>Jacinta 8 años</td> <td>Antonia 71 años</td> <td>Benjamín 56 años</td> <td>David 55 años</td> </tr> <tr> <td>María 2 años</td> <td>Lucía 71 años</td> <td>Cecilia 56 años</td> <td>Camila 69 años</td> <td>Willy 6 años</td> <td>Karina 62 años</td> <td>Juan 66 años</td> </tr> </tbody> </table>	Patricio 56 años	Daniela 65 años	Arlette 35 años	Carla 66 años	Romina 50 años	Lisette 48 años	Patricia 30 años	Gladys 70 años	Luis 6 años	Simón 85 años	Anita 6 años	Natalia 6 años	Fabían 2 años	Cristián 6 años	Carlos 63 años	Julio 56 años	Catalina 65 años	Jacinta 8 años	Antonia 71 años	Benjamín 56 años	David 55 años	María 2 años	Lucía 71 años	Cecilia 56 años	Camila 69 años	Willy 6 años	Karina 62 años	Juan 66 años
Patricio 56 años	Daniela 65 años	Arlette 35 años	Carla 66 años	Romina 50 años	Lisette 48 años	Patricia 30 años																							
Gladys 70 años	Luis 6 años	Simón 85 años	Anita 6 años	Natalia 6 años	Fabían 2 años	Cristián 6 años																							
Carlos 63 años	Julio 56 años	Catalina 65 años	Jacinta 8 años	Antonia 71 años	Benjamín 56 años	David 55 años																							
María 2 años	Lucía 71 años	Cecilia 56 años	Camila 69 años	Willy 6 años	Karina 62 años	Juan 66 años																							

Analiza el resultado obtenido y responde: ¿la municipalidad debiese realizar actividades para niños o adultos? Justifica tu respuesta. [TEP7-2023, p. 208]

En cambio, en el TEP7 (2020) se presenta una situación problema que invita al estudiantado a recolectar datos de las etiquetas de bebidas, actividad que se encuentra en sintonía con la definición dada por Moore (1990) que la estadística es la ciencia de los datos y además con la fase DATOS del ciclo de investigación de Wild y Pfannkuch (1999).

En parejas, realicen un estudio sobre la cantidad de azúcar de dos grupos de jugos y néctares embotellados: los denominados light y los comunes. Luego, calculen la moda, la media aritmética y la mediana para comparar estos grupos. [TEP7-2023, p. 207]

No obstante, llama la atención que no se potencien otras fases del ciclo de investigación como por ejemplo la relacionada con el ANALISIS y las CONCLUSIONES.

Por otro lado, en el texto del estudiante de séptimo año de primaria TEP7 (2016) se solicita dar respuesta a una pregunta abierta del tipo no determinística la que invita al lector a reflexionar

y tomar decisiones en base a los datos, es decir su interpretación depende del entorno en el cual fue extraído el dato (Rodríguez-Alveal y Maldonado-Fuentes, 2023).

Un grupo de [14] alumnos es medido antes y después de realizar un entrenamiento de salto largo y se quiere estimar si su entrenamiento es efectivo. [TPE7-2016, p. 315]

	Distancia promedio saltada (cm)													
Antes del entrenamiento	95	112	83	92	112	115	137	126	93	105	104	115	112	107
Después del entrenamiento	94	115	85	102	122	118	145	132	97	103	112	123	112	115

¿Piensas que el entrenamiento es efectivo? Argumenta tu respuesta.

En síntesis, este tipo de interpelaciones se encuentra en estrecha relación con la interpretación y la evaluación crítica de los resultados, habilidades asociadas al ciclo interrogativo, una de las dimensiones del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Asimismo, en los libros de texto analizados se presentan situaciones problemas afines a conceptos estadísticos de manera implícita, como, por ejemplo:

Argumenta. En dos colegios de Iquique, el tiempo promedio que demora un estudiante en trasladarse de su casa al colegio es de 23,5 minutos. ¿Por qué no se puede asegurar que en ambos colegios cada estudiante realmente demore 23,5 minutos? Fundamenta. [TEP7-2016, p. 315]

¿En qué nivel se encuentra el 50 % que utilizará la máquina de etiquetación en la primera etapa? [TEP7-2016, p. 330]

¿Cuál es el colegio que tiene a las competidoras con mayor estatura? [TES1-2016, p. 263]

En el cual, la respuesta a la interrogante planteada en TEP7 (2016, p. 315) pasa por la comprensión de la noción del concepto de media aritmética. En cambio, TEP7 (2016, p. 330) hace mención implícitamente al valor mediano de la distribución de datos. En cambio, en la interpelación del libro de texto TES1 (2016) se solicita calcular la moda. Cabe destacar, que en general las interpelaciones realizadas en los libros de texto hacen referencia de manera explícita a las medidas de tendencia central.

CONCLUSIONES

En este capítulo se analizan los libros de texto chilenos de quinto, séptimo año de Educación Primaria y primero de Educación Secundaria publicados los años 2016, 2020 y 2023, distribuidos gratuitamente por el MINEDUC. Concretamente se analizaron las definiciones de las medidas de centralización, se clasifican las actividades según el nivel de complejidad y, finalmente, se determina la relación entre las actividades y la alfabetización y pensamiento estadístico.

Tras analizar las definiciones correspondientes a las medidas de centralización, una de las habilidades asociadas a la alfabetización estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2008), se observa que los libros de texto analizados hacen un uso equivalente de las palabras promedio y media aritmética. Esto contradice las directrices tanto de Triola (2006) como de Kaplan et al. (2009) quienes aconsejan utilizar el término promedio para referirse, en general, a las medidas de tendencia central, como son la moda, mediana o media aritmética, y no restringir el término únicamente al uso de la media aritmética. En este sentido, en cuanto al correcto empleo de términos, hemos identificado el uso indistinto de las palabras números y datos descuidando completamente que los datos son números en contexto, como indican Cobb y Moore (1997), lo que eventualmente podría generar ambigüedades léxicas en el estudiantado a nivel de sistema escolar chileno.

Con relación a las actividades presentes en los libros de texto analizados, se advierte una disminución de actividades o situaciones problemas entre los años 2016, 2020 y 2023 respectivamente lo cual resulta sorprendente dada la relevancia que está tomando la estadística y, en particular, el tratamiento de la información numérica en las últimas décadas, y las directrices internacionales propuestas en el informe GAISE (2016) de manera de formar al estudiantado en este ámbito desde las primeras edades. En cuanto al nivel de complejidad de las preguntas en las actividades de estadística, concluimos que el 51.28% de las actividades demanda la aplicación de un procedimiento mecánico (nivel 1), el 44.44% requiere la combinación de conocimientos para responder la pregunta (nivel 2) y solamente el 4.27% de las preguntas precisan de una reflexión más compleja (nivel 3). Antecedentes, que reafirman que los libros de texto tienen una fuerte componente procedimental en contraste con interpelaciones que llaman a una reflexión por parte del estudiantado, lo que Estrella (2017) ha denominado la aritmetización de la estadística. Lo que invita al profesorado en el aula en la generación de actividades en las cuales el estudiantado tome decisiones acerca de la pertinencia de las medidas de tendencia central acorde a la situación problemática abordada, lo que llevaría de manera implícita a generar un pensamiento estadístico por parte de las y los estudiantes del sistema escolar.

Finalmente, estos resultados invitan a los investigadores a indagar acerca del trabajo que realiza el profesorado en las aulas con los libros de texto, para que el estudiantado adquiera los conceptos, conocimientos y habilidades acerca de las medidas de tendencia central para desarrollar habilidades relacionadas con la alfabetización y pensamiento estadístico.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto FONDECYT de Iniciación N°11220295 financiado por la Agencia de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile y el Grupo de Investigación GIU21/031 de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguerre, M., Solis, M.E. y Huincahue, J. (2022). Errores matemáticos persistentes al ingresar en la formación inicial de profesores de matemática: El caso de la linealidad. *Uniciencia*, 36(1), 1-18. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.4>
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-15). Kluwer.
- Ben-Zvi, D., Makar, K. y Garfield, J. (2017). *International handbook of research in statistics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7>
- Bruno, A. y Espinel, M.C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, VII, 57-85.
- Carvalho, J.I.F. y Gitirana, V. (2014). Média aritmética - uma análise das atividades do livro didático de matemática adotados no brasil. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 681-688). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes de bachillerato. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9, 187-201.
- delMas, R. C. (2002). Statistical literacy, reasoning and learning: A commentary. *Journal of Statistics Education*, 10(3), 1-13. <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910679>
- Devore, J. (2008). *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*. Cengage Learning Editores.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema*, 30(55), 713-737. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20>
- Díaz-Levicoy, D., Morales-García, L. y Rodríguez-Alveal, F. (2020). Las medidas de tendencia central en libros de texto de Educación Primaria en México. *Revista Paradigma*, XLI, 706-729.

- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, 16(1), 89-111. <https://doi.org/10.24844/EM1601.04>
- Estrella, S. (2016). Comprensión de la media por profesores de educación primaria en formación continua. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 18(1), 13-22.
- Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (173-194). Universidad Central de Venezuela.
- Estrella, S., Alvarado, H. y Retamal, L. (2019). Comprensión de la media aritmética por profesores de secundaria en formación inicial. En R. Olfos, E. Ramos y D. Zakaryan (Eds.), *Aportes desde la Didáctica de la Matemática para investigar, innovar y mejorar en y sobre la práctica docente: Formación de profesores* (pp. 101-119). GRAO.
- Freitas, A., Figueiredo, T.S., Silva, N. y Miranda, M.C. (2018). Learning difficulties with median and quartiles concepts in the 8th grade students: formula versus plot comparative study. *Indagatio Didactica*, 10(2), 109-132. <https://doi.org/10.34624/id.v10i2.11313>
- GAISE (2016). *College Report ASA Revision Committee, "Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education College Report 2016"*. ASA
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3), 1-12. <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910676>
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, 75(3), 372-396. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x>
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9>
- Glasnovic, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1003-1024, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849>
- Izagirre, A., Anasagasti, J. y Berciano, A. (2023). Conocimiento estadístico del futuro profesorado de educación primaria en la representación de datos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 24, 111-130. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4646>
- Jacobbe, T. y Horton, R.M. (2010). Elementary school teachers' comprehension of data displays. *Statistics Education Research Journal*, 9(1), 27-45.
- Kaplan, J., Fisher, D.G. y Rogness, N.T. (2009). Lexical Ambiguity in Statistics: ¿What do students know about the word's association, average, confidence, random and spread? *Journal of Statistics Education*, 17(3), 1-19. <https://doi.org/10.1080/10691898.2009.11889535>
- Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós.
- Leavy, A. (2006). Using data comparison to support a focus on distribution: Examining preservice teacher's understandings of distribution when engaged in statistical inquiry. *Statistics*

- Education Research Journal*, 5(2), 89-114.
- Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum Qualitative Social Research*, 1(2), 20. <https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089>
- McMillan, J. y Schumacher, S. (2011). *Investigación educativa*. Pearson-Adisson Wesley.
- Moore, D.S. (1990). Uncertainty. En L.A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: new approaches to numeracy* (pp.95-137). National Academy Press.
- Moore, D.S. (2009). *Estadística aplicada básica*. Antoni Bosch editor.
- Parra-Fica, J.H., López-Martín, M.M. y Díaz-Levicoy, D. (2024). Measures of central tendency in primary education textbooks in Chile. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6), em2454. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14592>
- Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). International Association for Statistics Education.
- Rodríguez-Alveal, F. y Maldonado-Fuentes, A.C. (2023). Typology of questions on variability in school textbooks and their relationship to statistical literacy and thinking. *Uniciencia*, 37(1), 1-19. <https://doi.org/10.15359/ru.37-1.4>
- Rodríguez-Alveal, F., Maldonado-Fuentes, A.C. y Sandoval, P. (2016). Comprensión de las medidas de tendencia central: un estudio comparativo en estudiantes de pedagogía en matemática en dos instituciones formadoras chilenas. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior*, 21(3), 929-952. <https://doi.org/10.1590/s1414-40772016000300013>
- Shaughnessy, J. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook on research on the teaching and learning of mathematics* (Vol. 2, pp. 957-1009). Information Age Publishing and National Council of Teachers of Mathematics.
- Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 64-80.
- Triola, M.F. (2006). *Elementary Statistics*. Pearson Education.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

MEASURES OF CENTRAL TENDENCY IN TEXTBOOKS AND THEIR RELATIONSHIP WITH LITERACY AND STATISTICAL THINKING

Abstract

This chapter analyzes the presence of measures of central tendency in primary and secondary school textbooks in Chile and their relationship to literacy and statistical thinking. For this purpose, a qualitative methodology was followed and using the content analysis method of primary and secondary education books distributed free of charge by the Chilean Ministry of Education in the years 2016, 2020 and 2023, which were selected through a non-probabilistic sampling of the intentional type, of 8 student textbooks. Among the main results, lexical ambiguities stand out in the definitions about measures of central tendency, in particular the term average is used interchangeably with mean, in a similar way the notion of number and data. Likewise, the activities are essentially procedural and the questions related to them demand the application of a mechanical procedure over reflection, as well as questions that invite decision-making at the population level. In summary, the activities and/or problem situations related to the measures of central tendency are of the procedural type that eventually do not favor the acquisition of statistical literacy and thinking in the students of the school system.

Keywords: measures of central tendency, statistical literacy, statistical thinking, textbooks, Primary Education, Secondary Education.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL NOS LIVROS DIDÁTICOS E SUA RELAÇÃO COM A ALFABETIZAÇÃO E O PENSAMENTO ESTATÍSTICO

Resumo

Este capítulo analisa a presença de medidas de tendência central nos livros didáticos do ensino fundamental e médio no Chile e sua relação com a alfabetização e o pensamento estatístico. Para tanto, seguiu-se uma metodologia qualitativa e utilizou-se o método de análise de conteúdo de livros do ensino fundamental e médio distribuídos gratuitamente pelo Ministério da Educação do Chile nos anos de 2016, 2020 e 2023, que foram selecionados por meio de uma amostragem não probabilística de o tipo intencional, de 8 livros didáticos estudantis. Entre os principais resultados, destacam-se as ambiguidades lexicais nas definições sobre medidas de tendência central, em particular o termo média é utilizado de forma intercambiável com média, de forma semelhante à noção de número e de dados. Da mesma forma, as atividades são essencialmente processuais e as questões a elas relacionadas exigem a aplicação de um procedimento mecânico sobre a reflexão, bem como questões que convidam à tomada de decisões ao nível da população. Em síntese, as atividades e/ou situações-problema relacionadas às medidas de tendência central são do tipo processual que eventualmente não favorecem a aquisição de alfabetização e pensamento estatístico nos alunos do sistema escolar.

Palavras-chave: medidas de tendência central, literacia estatística, pensamento estatístico, livros escolares, ensino primário, ensino secundário.

Francisco Rodríguez-Alveal

Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile

frodriguez@ubiobio.cl

<https://orcid.org/0000-0003-2169-0541>

Profesor de Estado en Matemática, Magister en Bioestadística y Doctor en Educación. Académico en distintas universidades (Universidad de Concepción, Universidad de Chile, Universidad Católica de Temuco, Universidad Mayor) y Universidad del Bío-Bío desde el 2008 a la fecha. Líneas de investigación: Formación Inicial Docente, teoría de distribuciones, Didáctica y enseñanza de la estadística. Ha participado como investigador principal y co-investigador en una serie de proyectos financiados por la Universidad del Bío-Bío, lo que le ha permitido escribir con investigadores nacionales e internacionales. Actualmente se encuentra desarrollando un proyecto FONDECYT de Inicación N° 11220295 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) acerca de la incidencia de la formación en la alfabetización y pensamiento estadístico de profesores de matemática en Chile.

Ane Izagirre Korta

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

ane.izagirre@ehu.eus

<https://orcid.org/0000-0001-8900-1576>

Ane Izagirre Korta, 72512558K, licenciada en Matemáticas por la UPV/EHU. Doctora en Matemática Aplicada por la Universidad de Toulouse (Francia) y UPV/EHU. Actualmente profesora adjunta del área de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Educación, Filosofía y Antropología de la UPV/EHU. Las líneas de investigación que abarca actualmente son, por un lado, el análisis del desarrollo de la competencia matemática en proyectos STEAM, dentro del proyecto de investigación HEZKUNTZA23/01 financiado por el Gobierno Vasco, y, por otro lado, la formación del profesorado de matemáticas en formación y en activo, especialmente en cuanto a la alfabetización estadística y probabilística. Todo ello enmarcado en el grupo de investigación de la UPV/EHU Komatzi (GIU21/031).

LIVROS DIDÁTICOS DO NOVO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO: UMA ANÁLISE SOBRE A ABORDAGEM DO CONCEITO DE AMOSTRAGEM E CURVA NORMAL

André Fellipe Queiroz Araújo

Gilda Lisbôa Guimarães

RESUMO

Neste estudo buscamos investigar a abordagem dos conceitos de Amostragem e de Curva Normal nos livros didáticos para o Ensino Médio brasileiro. Trata-se de uma análise documental dos 14 livros de Projetos Integradores, 24 livros de Projeto de Vida e 10 livros de Matemática e suas Tecnologias aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD 2021. Os resultados apontam que os livros de projetos abordam interessantes propostas para o trabalho da Estatística e da Probabilidade, no Ensino Médio, com ênfase em dados reais, analisando resultados de pesquisas estatísticas amostrais e proposição de realização das mesmas. No entanto, apresentam uma predominância de situações que envolvem o conceito de população/amostra se referindo apenas a pessoas e pouca discussão sobre o modelo da Curva Normal. Já os livros de Matemática e suas Tecnologias apresentam uma perspectiva para aplicação do cálculo de medidas estatísticas, com ênfase em dados fictícios. Não são abordados todos os tipos de métodos para a seleção da amostra e pouco se discute sobre os aspectos para a representatividade amostral. Com relação a Curva Normal, a partir de dados fictícios, há uma ênfase para a aplicação de técnicas operatórias para o cálculo das medidas de centralidade, dispersão e probabilidade. Diante disso, defendemos que os livros didáticos do Ensino Médio deveriam explorar de forma mais aprofundada a inferência informal, abordando aspectos da Amostragem em conexão com o modelo da Curva Normal, proporcionando aos estudantes um maior conjunto de ferramentas para a análise de dados.

Palabras clave: Educação Estatística, amostragem, curva normal, Ensino Médio, livro didático.

Como citar: Araújo, A. F. Q., Guimarães, G. L. (2024). Livros Didáticos do novo ensino médio brasileiro: uma análise sobre a abordagem do conceito de amostragem e curva normal. En D. Díaz-Levicoy y A. Salcedo (Eds.), *Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística* (pp. 69-97). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

INTRODUÇÃO

A Estatística e a Probabilidade, enquanto áreas de conhecimento, exercem um relevante papel em nossa sociedade. As pesquisas estatísticas, por exemplo, propiciam a análise e interpretação de uma variedade de dados e informações do nosso cotidiano. Conseqüentemente, seus resultados possibilitam uma melhor compreensão da realidade e subsidiam as tomadas de decisões.

Nessa direção, Gal (2002, 2005) argumenta que para uma cidadania plena é crucial que as pessoas tenham habilidades em Estatística e Probabilidade para interpretar os fenômenos sociais de forma crítica. O autor ressalta que a maioria dos indivíduos se portam como consumidores de dados e, para isso, necessitam de uma postura crítica frente às informações veiculadas. Além disso, há aqueles que são produtores de dados, inseridos em contextos de investigação, os quais devem compreender como as pesquisas estatísticas são conduzidas. Logo, é essencial que na escolaridade básica sejam sistematizadas possibilidades para o desenvolvimento do Letramento Estatístico e Probabilístico (Gal, 2002, 2005), para possibilitar, ao estudante, a construção de competências e habilidades voltadas para a compreensão dos conceitos e fundamentos relativos a essas duas áreas de conhecimento, como também, a realização de pesquisas estatísticas e o olhar crítico para veiculação de dados.

A partir desse contexto, este estudo tem como foco os conceitos de Amostragem e Curva Normal, importantes tópicos de conhecimento estatístico e probabilístico que estão presentes em muitos fenômenos do nosso cotidiano. Esses conceitos ainda são pouco explorados na Educação Básica no Brasil, entretanto, são fundamentais para a compreensão real dos dados e a construção de dados estatísticos para tomadas de decisão (Luna e Guimarães, 2021). A Amostragem envolve as técnicas para seleção de amostras, de maneira que as mesmas sejam representativas de suas respectivas populações (Bayer et al., 2005; Triola, 2008). Assim, refletir sobre os fatores que implicam na representatividade de uma amostra é fundamental. Da mesma forma, é necessário que os cidadãos compreendam a Curva Normal, considerada o principal modelo probabilístico na análise de dados na Inferência Estatística (Batanero et al., 2004).

Com relação a essa temática, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), principal documento orientador para o ensino no Brasil, propõe que na etapa do Ensino Médio (15-17 anos), o estudante deve realizar pesquisas estatísticas amostrais, como também analisar criticamente as amostras de pesquisas estatísticas. Além disso, recomenda a elaboração e resolução de problemas que envolvem as medidas de tendência central e de dispersão e a identificação de

espaços amostrais em eventos aleatórios para o cálculo de probabilidades em diferentes contextos, o que contempla implicitamente a Curva Normal.

Diante da pertinência desses dois conceitos, no presente estudo, direcionamos nosso olhar para o livro didático por entender que esse recurso, na maioria das vezes, tem sido a principal fonte de informação tanto para as ações docentes, auxiliando o planejamento das aulas e a avaliação da aprendizagem, como também para os discentes, propiciando a construção de conhecimentos e o desenvolvimento de competências e habilidades (Lima, 2020; Hernandez, 2023).

Dessa forma, acreditamos que a realização de investigações sobre o livro didático que culminem em discussões e reflexões acerca de suas potencialidades e possíveis aprimoramentos são essenciais. Assim, o presente estudo tem o objetivo de analisar a abordagem dos conceitos de Amostragem e de Curva Normal nos livros didáticos do novo Ensino Médio brasileiro, aprovados e distribuídos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático do Brasil (PNLD 2021).

AMOSTRAGEM E CURVA NORMAL

A Estatística Inferencial é classificada como uma área da Estatística que apresenta um conjunto de métodos que buscam caracterizar e projetar o comportamento de uma população a partir dos estimadores observáveis em uma amostra da mesma. Para isso, a Amostragem possibilita a formulação de métodos que contemplam técnicas para a seleção dos elementos que irão compor a amostra. Eles são divididos em dois grupos: não probabilísticos (não aleatórios) e probabilísticos (aleatórios). Os métodos não probabilísticos são aqueles em que a probabilidade de seleção é desconhecida para alguns ou todos os elementos da população e, conseqüentemente, alguns desses elementos podem ter probabilidade nula de compor a amostra (Moore, 1995; Triola, 2008).

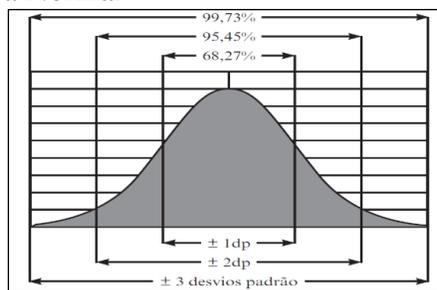
Desse modo, a escolha dos elementos amostrais depende dos critérios escolhidos pelo pesquisador para garantir a representatividade da amostra para alcançar resultados generalizáveis para a população. Em muitos casos, é inviável ter acesso a toda a população, o que justifica o uso de métodos não probabilísticos. Um exemplo disso é quando uma empresa realiza pesquisas de mercado antes de lançar um novo produto ou serviço, buscando avaliar sua aceitação entre os consumidores brasileiros com base em preço ou composição, uma prática comum na área de marketing (Malhotra, 2005). As técnicas não probabilísticas mais frequentemente empregadas incluem: amostragem por conveniência, amostragem por julgamento, amostragem por bola de neve, amostragem por quotas e amostragem por resposta voluntária.

Já os métodos probabilísticos, por outro lado, são aqueles em que a probabilidade de cada elemento da população pertencer à amostra é conhecida e diferente de zero (Moore, 1995; Triola, 2008). Assim, nessas abordagens, o pesquisador possui conhecimento sobre a distribuição da população e os elementos que serão incluídos na amostra são selecionados de forma aleatória e imparcial. Dessa maneira, esses métodos asseguram a representatividade e permitem generalizações para toda a população, ou seja, é possível associar aos resultados uma probabilidade de que eles verdadeiramente representam a população, indicando o grau de confiabilidade das conclusões alcançadas. Os métodos probabilísticos incluem a amostragem aleatória simples, a amostragem sistemática, a amostragem estratificada e a amostragem por conglomerados.

Diante disso, o nível de confiabilidade necessário para uma amostra representativa é fundamental para compreender a Probabilidade associada à Amostragem. Nesse sentido, a Estatística Inferencial engloba técnicas e modelos matemáticos que permitem calcular a probabilidade de ocorrência de eventos, como também, inferir e caracterizar uma população a partir de uma amostra dela. Nesse contexto, a Distribuição Normal ou Curva Normal é reconhecida como o principal modelo probabilístico que descreve o comportamento de variáveis aleatórias contínuas. Além disso, ela é uma representação aproximada de diversos tipos de distribuições, abrangendo uma ampla gama de fenômenos cotidianos que possuem uma distribuição normal de dados ou uma representação próxima dela (Batanero et al., 2004). A Curva Normal é caracterizada pela média dos dados, que representa o ponto central da curva, e pelo desvio-padrão, que indica a dispersão dos dados. Visualmente, essa distribuição é representada em lá Figura 1.

Figura 1

Representação Gráfica da Curva Normal



Fonte: São Paulo (2014)

Com base nessas informações, em termos matemáticos, é relevante ressaltar que a Curva Normal abarca 100% dos dados e a área sob o seu gráfico em relação ao eixo das abscissas é sempre igual a 1. Adicionalmente, a Curva Normal apresenta algumas propriedades importantes:

1) A distribuição dos dados é simétrica em relação à média, localizada no centro; 2) Em toda Curva Normal, os valores de média, moda e mediana coincidem; 3) A Curva Normal possibilita a determinação de probabilidades associadas aos valores da área de intervalos da distribuição; 4) A probabilidade de uma variável assumir um valor entre dois pontos é determinada pela área sob a curva que os contém.

A partir dessas definições, é importante ressaltar ainda a relação entre a Amostragem e o modelo da Curva Normal na inferência estatística. Ao selecionar uma amostra de uma população específica, a média dos dados pode não coincidir necessariamente com a média populacional, pois os elementos amostrais não representam toda a informação presente na população. Além disso, a média pode variar entre amostras diferentes. No entanto, ao considerar uma coleção de amostras do mesmo tamanho extraídas da mesma população, a distribuição das médias amostrais tende a se tornar normal à medida que o tamanho da amostra aumenta. Assim, para amostras grandes, a distribuição das médias amostrais seguirá uma Curva Normal e a média dessa distribuição tenderá a ser igual à média populacional, permitindo inferências sobre características da população com base no comportamento amostral. Esse conceito é um dos resultados mais significativos da Inferência Estatística e é formalmente conhecido como Teorema Central do Limite (Triola, 2008).

Diante disso, é pertinente a abordagem, em sala de aula, desses conceitos através da Estatística Inferencial Informal na Educação Básica. Essa abordagem é descrita como um processo de raciocínio informal que utiliza dados disponíveis como evidência para fazer generalizações probabilísticas, sem a necessidade de cálculos estatísticos complexos (Makar e Rubim, 2009). Essa metodologia atrelada ao uso do Livro Didático, enquanto recurso, pode capacitar os estudantes em habilidades para uma análise mais precisa de uma variedade de fenômenos que envolvem os fundamentos da Amostragem e estão presentes em diferentes áreas do conhecimento no nosso cotidiano.

O LIVRO DIDÁTICO E O PNLD 2021

O livro didático desempenha um papel fundamental como suporte ao trabalho escolar, orientando e complementando o processo de ensino e aprendizagem. Apesar da disponibilidade de vários recursos educacionais, ele ainda mantém uma influência direta no ensino e na aprendizagem (Lima, 2020). Isso se deve em grande parte ao fato de que, frequentemente, o livro didático é a principal fonte de informação tanto para professores quanto para estudantes. Além disso, ele

proporciona uma estruturação das aulas, oferecendo roteiros prontos e orientações para a prática docente.

No contexto do ensino de Estatística e Probabilidade na Educação Básica, na disciplina de Matemática, os livros didáticos, quando bem elaborados e utilizados, oferecem aos estudantes a oportunidade de explorar o Letramento Estatístico e Probabilístico por meio de uma abordagem investigativa, aproximando-os de seu contexto social e promovendo uma educação voltada para a cidadania (Richit et al., 2021). Seguindo essa linha de raciocínio, Santos (2020) destaca que os livros didáticos contribuem para o desenvolvimento do Letramento Estatístico dos estudantes quando não se limitam apenas a medidas descritivas, mas também permitem a interpretação dos resultados no contexto em que os dados foram coletados, proporcionando uma compreensão da realidade por meio das estatísticas.

Além disso, na ótica de Santana e Borba (2016), quando o livro didático explora a probabilidade de forma ampla, considerando seus diversos significados, contextos e representações, facilita a assimilação desse conceito e auxilia os estudantes na compreensão de que a incerteza e a imprevisibilidade são características presentes em muitas situações do dia a dia. Dessa maneira, ao se aproximar da realidade dos estudantes, o livro didático estimula o desenvolvimento do pensamento crítico e capacita os estudantes a fazerem escolhas que envolvam conceitos probabilísticos.

Na Educação Básica do Brasil, os livros didáticos das escolas públicas são escolhidos e distribuídos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), que é gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC). A edição de 2021 do PNLD, no contexto do novo Ensino Médio, inclui, entre outros recursos, Livros Didáticos de Projetos Integradores, Livros Didáticos de Projetos de Vida e os Livros Didáticos de conhecimento de Matemática e suas Tecnologias, os quais são os focos deste estudo. Inicialmente, destaca-se que segundo o Guia do PNLD 2021, esses dois tipos de livros de projetos

(...) trazem diversas ações que propiciam que os(as) estudantes mobilizem habilidades para que desenvolvam o conhecimento, o pensamento científico, crítico e criativo, o repertório cultural, comunicação, a cultura digital, o trabalho e seu projeto de vida, a argumentação, o autoconhecimento e autocuidado, a empatia e cooperação, assim como, a responsabilidade e cidadania. Essas obras assumem a Pedagogia de Projetos para aquisição de conhecimentos e habilidades para o desenvolvimento de competências. Elas trabalham de acordo com os conceitos primordiais da BNCC e da Reforma do Ensino Médio, os quais tem por objetivo contribuir para a formação integral do(a) estudante (Brasil, 2021, p. 19).

Além dessas especificações, é relevante ressaltar que os livros de projetos Integradores abrangem atividades que promovem a integração de diferentes disciplinas, permitindo aos estudantes explorarem a interconexão entre áreas de conhecimento através de métodos de ensino e aprendizagem adaptados à realidade deles, ou seja, buscam promover o trabalho interdisciplinar por meio da realização de projetos. Por outro lado, os livros de projetos de vida apresentam projetos voltados para reflexões sobre a perspectiva pessoal e social do estudante, englobando as dimensões pessoal (encontro consigo mesmo), cidadã (encontro com o mundo) e dimensão profissional (encontro com o futuro e o nós). Logo, esses projetos têm a perspectiva de contribuir com o planejamento de futuro do estudante, englobando a esfera intelectual e a emocional.

Já os livros de Matemática e suas Tecnologias são obras que formalmente são responsáveis pela apresentação de conceitos dessa área de conhecimento, contemplando a Estatística e a Probabilidade. Essas obras buscam promover o desenvolvimento das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias através de diferentes abordagens teórico-metodológicas. Assim, almejam fomentar o desenvolvimento do pensamento crítico, o estudo de objetos matemáticos, a identificação de suas propriedades e de seus padrões, a formulação de conjecturas e a utilização de diferentes representações para a análise e comunicação de resultados (Brasil, 2021).

Diante do exposto, no presente estudo, investigamos a abordagem dos conceitos de Amostragem e da Curva Normal apresentados nos livros didáticos de Projetos Integradores, Projetos de Vida e de Matemática e suas tecnologias do novo Ensino Médio brasileiro aprovados pelo PNLD 2021.

MÉTODO

Do ponto de vista metodológico, este estudo é classificado como pesquisa documental, que se caracteriza por ser um “procedimento que se utiliza de métodos e técnicas para apreensão, compreensão e análise de documentos de variados tipos” (Sá-Silva et al., 2009, p. 5).

Nesse contexto, com o propósito de alcançarmos o nosso objetivo, conduzimos uma análise abrangente de todos os livros didáticos de projetos e de Matemática e suas tecnologias aprovados pelo PNLD 2021. Isso englobou 14 volumes de projetos Integradores, 24 volumes de projetos de Vida e 10 volumes de Matemática e suas Tecnologias. Para organização dos dados, os livros foram identificados e categorizados numericamente conforme seu tipo.

Inicialmente, fizemos um levantamento nesses livros, página a página, para identificar as situações que envolviam o conceito de Amostragem e da Curva Normal e classificamos essas situações nos tipos “Explicação”, quando o autor aborda e explica o conteúdo ao leitor e “Resolução” quando é proposto algum tipo de atividade. Cabe destacar que nas situações de resolução com mais de um item, como por exemplo, questão X com alternativas a, b, c, essas foram contabilizadas como três situações de resolução, pois poderiam apresentar diferentes classificações entre si. Posteriormente, classificamos as situações de Explicação e Resolução em categorias de análise que envolviam o conceito de Amostragem e da Curva Normal:

a) Amostragem:

- Conceito da Amostra: Explícito e Implícito
- Contexto: Dados reais ou fictícios
- Amostra/população estudada: refere-se a pessoas ou objetos
- Habilidades exploradas

b) Curva Normal

- Conceito da Curva Normal: Explícito ou Implícito
- Contexto: Dados reais ou fictícios
- Representação: Gráfica, numérica ou algébrica
- Habilidades exploradas

RESULTADOS

Com base nos procedimentos metodológicos delineados, apresentamos os resultados da análise da abordagem do conceito de Amostragem e de Curva Normal por tipo de livro didático.

Livros de Projetos Integradores

Conforme descrito na metodologia, analisamos os 14 livros de projetos integradores aprovados pelo PNLD 2021. Inicialmente, realizamos um levantamento detalhado para identificar a abordagem dos conceitos de Amostragem e Curva Normal nas seções de "Explicação" e "Resolução". No que diz respeito ao conceito de Amostragem, encontramos um total de 127 ocorrências, das quais 21 estavam na seção de explicação e 106 na seção de resolução.

Como primeira etapa da análise, categorizamos essas situações de acordo como o conceito de amostra é abordado. Assim, identificamos como amostra explícita aquelas situações que

claramente têm como objetivo discutir conceitos relacionados à amostra. No entanto, também encontramos situações que não têm essa intenção explícita, mas que permitem ao professor estabelecer uma conexão com o conceito de amostra e, conseqüentemente, discuti-lo com os estudantes (Tabela 1).

Tabela 1

Quantitativo das situações de Amostra por tipo de abordagem

Conceito	Situação	
	Explicação (n = 21)	Resolução (N= 106)
Explícito	15 (71,4%)	68 (64,1%)
Implícito	6 (28,6%)	38 (35,9%)

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

Figura 2

Situação de Explicação com abordagem explícita do conceito de Amostra

Pesquisa avalia percepção de jovens sobre ciência e tecnologia

Temas de ciência e tecnologia despertam grande interesse entre os jovens brasileiros, superando assuntos relacionados a esportes e comparável aos de religião. A maioria porém, incluindo os jovens de curso superior, não consegue citar o nome de uma instituição nacional de pesquisa nem de algum cientista brasileiro. A constatação é da pesquisa **O que os jovens brasileiros pensam da ciência e da tecnologia?**, do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Comunicação Pública da Ciência e Tecnologia (INCT/CPCT) [...].

Realizado pela primeira vez no Brasil, o estudo teve abrangência nacional e emprego da técnica de *survey*, para aplicação de questionário estruturado, presencial, junto a amostra da população brasileira de jovens entre 15 e 24 anos. A pesquisa quantitativa ouviu 2 206 pessoas [...]. Ela envolveu também etapas cognitiva e qualitativa, para saber dos jovens suas opiniões e atitudes sobre ciência e tecnologia. [...]

Principais resultados

Para seleção dos entrevistados, foi utilizada amostra probabilística até o penúltimo estágio, com aplicação de cotas amostrais de sexo, idade e escolaridade no último estágio. O intervalo de confiança é de 95 por cento. As entrevistas, realizadas por equipe treinada, foram feitas em domicílio entre os meses de março e abril de 2019.

Dentre os resultados, é possível destacar:

- A maioria dos jovens brasileiros manifesta grande interesse para temas de ciência e tecnologia, tanto as mulheres quanto os homens, e em quase todos os grupos sociais; o interesse por Ciência e Tecnologia, em geral, é maior que o por esportes, e comparável com o interesse por religião;
- Os jovens possuem, em geral, uma imagem positiva da figura do cientista e, em sua maioria, acreditam que homens e mulheres têm a mesma capacidade para ser cientista, e devem ter as mesmas oportunidades;

Fonte: Bueno, Livro de Projetos Integradores (2021, p. 87).

Com base nos dados apresentados, podemos inferir que há uma predominância de situações que tratam explicitamente o conceito de amostra (Figura 2) em comparação com as amostras implícitas (Figura 3), tanto nas seções de explicação quanto nas de resolução. Dessa forma, consideramos que situações que tratam os conceitos de maneira explícita facilitam as ações dos estudantes e também do professor propiciando a reflexão sobre o significado do conceito.

Figura 3

Situação de Resolução com abordagem implícita do conceito de Amostra

O que os moradores pensam sobre sua cidade?

 2. Em grupo, escolham um dos temas a seguir para elaborar uma entrevista ou uma pesquisa a ser realizada com os moradores do bairro.

Na elaboração de cada pergunta, estejam atentos para o objetivo, a linguagem clara e a ordem que vai ocupar na entrevista ou pesquisa. Depois de realizada a entrevista, apresentem as informações para a turma. Pode ser em forma de vídeo ou texto.

Fonte: Bueno, Livro de Projetos Integradores (2021, p. 163)

A Figura 2 apresenta os resultados de um estudo estatístico sobre o tema da ciência e tecnologia, no qual o autor discute os achados principais, destaca o método de amostragem empregado, o tamanho da amostra e o intervalo de confiança, ou seja, aborda conceitos relativos à amostragem de forma explícita. Por outro lado, a Figura 3 retrata uma situação de resolução na qual o conceito de amostra é abordado de forma implícita. Neste contexto, há uma proposta de pesquisa sobre as opiniões dos residentes de um bairro em relação à sua cidade. Assim, esta situação trata o conceito de amostra de maneira indireta, exigindo do professor que levante questionamentos aos estudantes sobre qual seria a amostra da pesquisa e se os resultados observados no bairro podem ser generalizados para toda a população.

Tabela 2

Quantitativo das situações de Amostragem por tipo de contexto

Contexto dos dados	Situação	
	Explicação (n = 21)	Resolução (N= 106)
Real	16 (76,2%)	78 (73,6%)
Fictício	5 (23,8%)	28 (26,4%)

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

Na segunda categoria de análise (Tabela 2), classificamos as situações de acordo com o contexto, nos tipos real ou fictício. Nessa análise, consideramos uma situação fictícia aquela imaginada ou idealizada e que não representa uma situação real. Já as situações com contexto real são aquelas que utilizam fontes de dados reais, como exemplo as de órgão governamentais ou institutos de pesquisa. Nesse sentido, verificamos que nas 127 situações que envolvem o conceito de Amostragem, há a predominância de contextos reais.

Esses índices podem ser justificados pelo fato de que há uma maior ênfase de situações envolvendo a análise e realização de pesquisas estatísticas e, conseqüentemente, contempla mais contextos com dados reais, como pode ser observado nas figuras apresentadas anteriormente. Diante disso, concordamos com Guimarães e Gitirana (2013) que os livros didáticos devem

priorizar a abordagem de situações com dados reais, pois isso possibilita uma maior reflexão dos estudantes sobre o contexto social ao qual ele está inserido, levando a uma melhor compreensão de mundo e a tomada de decisões. Esse resultado é bastante positivo, uma vez que acreditamos ser fundamental levar os estudantes a construir e realizarem pesquisas estatísticas para compreenderem o mundo físico e social. Em continuidade, verificamos o tipo de população/amostra de cada situação, o qual pode ser pessoas ou objetos.

Tabela 3

Quantitativo das situações de Amostragem por tipo de população/amostra

População/Amostra	Situação	
	Explicação (n = 21)	Resolução (N= 106)
Pessoas	20 (95,2%)	96 (90,5%)
Objetos	1 (4,8%)	10 (9,5%)

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

A partir desses dados, evidencia-se uma predominância de situações que abordam o conceito de população/amostra relativo a pessoas. Sobre esse tema, Gomes (2013), aponta que os estudantes apresentam dificuldades para conceber o conceito de população, na Estatística, como algo que não envolve apenas pessoas, principalmente, por entenderem esse termo da mesma forma que ele é compreendido no senso comum. Diante disso, julgamos que é necessário que os livros didáticos busquem um equilíbrio para abordar o conceito de população por meio de situações que envolvam pessoas, como também, objetos, animais e etc. A Figura 4 apresenta um exemplo de atividade que aborda o conceito de população/amostra com pessoas, através da realização de uma pesquisa estatística.

Figura 4

Situação de Resolução envolvendo o conceito de população/amostra com pessoas

3. Com o grupo de projeto, vocês vão planejar a pesquisa e coletar dados sobre mulheres e homens da região em que se encontra a escola. Esses dados serão relativos, entre outras coisas, ao tempo dedicado ao trabalho remunerado e não remunerado, quantidade de filhos e escolaridade.

Depois da coleta, vocês devem se reunir e organizar os dados coletados em tabelas e representá-los utilizando gráficos. É possível que os números que vocês encontrarem sejam diferentes dos que estudaram, uma vez que estão avaliando apenas um recorte do Brasil; além disso, os dados vão ajudá-los a perceber características pontuais do local em que a pesquisa foi feita. Para a pesquisa, o grupo deve atentar aos seguintes tópicos:

Fonte: Furtado *et al*, Livro de Projetos Integradores (2021, p. 112).

Na quarta categoria de análise, verificamos as habilidades que são exploradas em cada situação que exploram a amostragem (Tabela 4).

Tabela 4

Quantitativo das situações de Amostragem por habilidades

Habilidades	Situação	
	Explicação (n = 21)	Resolução (N= 106)
Seleção e Representatividade de Amostra	0	2 (2%)
Análise dos dados de pesquisa amostral	18 (86%)	14 (13%)
Realização de Pesquisa Estatística	2 (10%)	45 (42%)
Técnicas de Amostragem	1 (4%)	2 (2%)
Identificar a margem de erro	0	4 (4%)
Comparação entre Amostras	0	1 (1%)
Cálculo de medidas Estatísticas	0	31 (29%)
Identificar o tamanho da Amostra	0	7 (7%)

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Podemos observar que nas situações de explicação, há a predominância da habilidade de análise dos dados de pesquisas amostrais. Esse índice pode ser justificado pelo fato de que os autores para explicarem as temáticas dos projetos integradores, a serem desenvolvidas pelos estudantes, recorreram a pesquisas já realizadas sobre diversos temas inerentes a nossa sociedade, com o intuito de instigar a reflexão sobre a importância das temáticas e como elas estão presentes em nosso cotidiano. Para exemplificar, destacamos (Figura 5) os resultados de uma pesquisa TIC Domicílios, realizada, em 2019, pelo Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação (CETIC) sobre o acesso à internet no Brasil, no âmbito de um projeto integrador proposto que envolve o tema de mídias digitais.

Figura 5

Situação de Explicação com análise dos dados de pesquisa amostral

Veja outros destaques da pesquisa:
<ul style="list-style-type: none"> • Nas regiões urbanas, a conexão é um pouco maior do que a média: 74% da população está ligada à internet. • Pela primeira vez, metade da zona rural brasileira está conectada – 49% da população disse ter acesso à rede em 2018, acima dos 44% de 2017. • Também pela primeira vez, metade da camada mais pobre do Brasil está oficialmente na internet: 48% da população nas classes D e E, acima de 42% em 2017. • São 46,5 milhões de domicílios com acesso à internet, 67% do total. • Entre os usuários da internet, 48% adquiriu ou usou algum tipo de serviço <i>on-line</i>, como aplicativos de carros, serviços de <i>streaming</i> de filmes e música, ou pedido de comida.

Fonte: De Leonardo, Livro - Projetos Integradores (2021a, p. 186).

Diante disso, destacamos que embora não haja uma homogeneização nas situações de Explicação das habilidades relativas ao conceito de Amostragem, tendo em vista que os livros de

projetos não tem a atribuição de explicar detalhadamente os conceitos como ocorre nos livros de conhecimento, a exploração dos resultados de pesquisas estatísticas com dados reais possibilita uma maior compreensão de mundo e podem contribuir para o aprimoramento dos elementos de Conhecimento e de Disposição (Gal, 2002, 2019) dos estudantes, acarretando em uma maior domínio e motivação para refletir sobre as suas crenças e atitudes frente a esses resultados.

No que diz respeito às situações de Resolução, observamos que há uma maior variedade de habilidades envolvidas, tendo uma maior frequência de situações voltadas para Realização de pesquisa Estatística. Nesse sentido, verificamos que as realizações de pesquisas estavam vinculadas às etapas do projeto, como forma dos estudantes irem a campo para pesquisarem dados em seus cotidianos que viabilizassem a execução dos projetos. Assim, como pontuado anteriormente, acreditamos que a abordagem e execução de pesquisas estatísticas é de grande valia porque possibilita os estudantes refletirem sobre os dados reais que estão presentes em seus contextos, o que pode potencializar seu conhecimento de mundo e a tomada de decisões.

No entanto, observamos que essas situações não exploravam todas as fases do ciclo investigativo (Guimarães e Gitirana, 2013), se concentrando apenas nas etapas do Problema de pesquisa, coletas de dados, representação dos dados, análise dos dados e conclusão. Logo, essas propostas podem não contribuir, por exemplo, para o desenvolvimento de habilidades, por parte dos estudantes, voltadas para o levantamento de hipóteses e a classificação dos dados, as quais são etapas essenciais de um ciclo de investigativo. Como exemplo, exemplificamos (Figura 6) a proposta de uma pesquisa estatística voltada para o levantamento de informações sobre os estudantes que possuem algum tipo de deficiência, no âmbito de um projeto que trata sobre a acessibilidade.

Figura 6

Situação de Resolução com a realização de pesquisa estatística



5. Para resolver esta atividade, junte-se a colegas e formem grupos com quatro integrantes. Vocês realizarão uma pesquisa estatística na escola em que estudam, ou em outra escola do município, com o objetivo de obter e analisar informações sobre estudantes com deficiência, tais como: quantidade, tipos de deficiência, desafios que eles enfrentam etc. Para isso, podem ser realizados os passos a seguir.

Fonte: Souza, Livro de Projetos Integradores (2021, p. 20).

Com relação ao conceito da Curva Normal, identificamos apenas uma situação de Explicação (Figura 7) que abordava esse conceito de forma implícita, envolvendo a habilidade de análise da representação gráfica que se aproxima do modelo normal em um contexto fictício. Nela,

o autor aborda a distribuição dos dados relativos à variável tempo (min) e, para isso, apresenta a representação gráfica desses dados, além de apresentar algumas medidas estatísticas relativas a esses dados, dando ênfase para a média e o desvio-padrão, os quais constituem os dois parâmetros que definem uma distribuição Normal.

Figura 7
Situação de Explicação com análise da representação gráfica



Fonte: Santos, Livro de Projetos Integradores (2021, p. 20)

Através de situações como essa, o professor pode ressaltar que quanto maior a quantidade de dados contínuos em uma distribuição, mais haverá a tendência da mesma se configurar como uma distribuição normal, caracterizando o formato de uma curva. Logo, a ideia de que determinados fenômenos na natureza seguem um determinado padrão (assemelhando-se à Curva Normal), pode ser explorada em sala de aula, favorecendo, aos estudantes, habilidades para analisarem de modo crítico uma variedade de fenômenos do nosso cotidiano que apresentam uma Distribuição Normal ou aproximadamente normal de dados.

Diante disso, acreditamos que a pouca abordagem desse conceito nos livros analisados se deve ao fato de que não há uma preocupação em se discutir, principalmente nas etapas de representação e análise de dados, sobre modelos probabilísticos que permitem a realização de inferências estatísticas. Verificamos que nesses livros há uma ênfase para a realização de pesquisas estatísticas, como etapas dos projetos, mas a partir delas é explorado predominantemente as análises descritivas em detrimento às inferências informais que podem ser realizadas, através dos referidos modelos, que possibilitem um maior poder de análise e conclusão da pesquisa, por parte dos estudantes.

Livros de Projetos de Vida

Ao fazermos o levantamento das situações relativas ao tema na nossa pesquisa, encontramos um

total de 49 situações envolvendo unicamente o conceito de amostragem, sendo 28 de explicação e 21 de resolução, uma quantidade menor comparada com os livros de projetos integradores. Como primeira categoria de análise, analisamos e classificamos as situações quanto à forma que o conceito de amostra é apresentado, seja explícito ou implícito (Tabela 5).

Tabela 5

Quantitativo das situações de Amostra por tipo de abordagem

Conceito	Situação	
	Explicação (n = 28)	Resolução (N= 21)
Explícito	22 (78%)	13 (62%)
Implícito	6 (22%)	8 (38%)

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

A análise dos dados revela uma predominância de situações que tratam explicitamente do conceito de amostra, tanto nas explicações quanto nas resoluções. Isso corrobora a importância de abordar esse conceito de forma explícita, como destacado em relação às obras de projetos integradores. A Figura 8 apresenta uma situação de resolução na qual são exibidos os resultados de uma pesquisa amostral, seguida de questionamentos baseados nesses resultados.

A segunda categoria de análise concentrou-se na classificação das situações de acordo com o contexto, distinguindo entre situações reais e fictícias. Ao examinarmos essa categoria, constatamos que todas as situações observadas apresentam exclusivamente dados reais. Esse dado é altamente positivo, conforme destacado anteriormente, haja vista que proporciona uma compreensão mais ampla do contexto social em que os estudantes estão inseridos, facilitando a compreensão de mundo e auxiliando na tomada de decisões.

Figura 8

Situação de Resolução com o conceito de amostra explícito

1. Segundo a Pnad Contínua, em 2018 cerca de 52% da população brasileira de 25 a 49 anos era formada por mulheres, enquanto cerca de 48% era formada por homens. Com base nessa informação e na leitura do trecho, avaliem se a proporção de mulheres em cargos de liderança em 2018 representa de forma real a população feminina naquele ano. Em seguida, reflitam sobre esta questão: a igualdade de gênero no mercado de trabalho significaria cargos ocupados igualmente por homens e mulheres (50% dos cargos para cada gênero)?

Fonte: Danza e Silva, Livro de Projetos de Vida (2021, p. 41)

Na sequência, através da terceira categoria de análise, observamos que todas as situações, tanto de explicação quanto de resolução, limitavam-se ao tipo de população/amostra apenas a pessoas (Figura 8). Essa constatação levanta uma preocupação semelhante àquela identificada na análise dos livros de Projetos Integradores, pelo fato de abordar a população/amostra apenas como

pessoas, limitando a compreensão dos estudantes. Portanto, enfatizamos a importância de os livros didáticos buscarem um equilíbrio na abordagem do conceito de população, incluindo situações que envolvam não apenas pessoas, mas também outros tipos de elementos. Por fim, verificamos ainda as habilidades que são exploradas nas situações de explicação e resolução (Tabela 6).

Tabela 6
Quantitativo das situações de Amostragem por habilidades

Habilidades	Situação	
	Explicação (n = 28)	Resolução (n = 21)
Seleção e Representatividade de Amostra	0	0
Análise dos dados de pesquisa amostral	28 (100%)	5 (13,2%)
Realização de Pesquisa Estatística	0	14 (42,4%)
Cálculo de medidas Estatísticas	0	2 (29,3%)

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

Diante disso, podemos observar que nas situações de explicação, há unicamente a exploração da habilidade de análise dos dados de pesquisas amostrais. Assim, de modo semelhante as obras de projetos integradores, esse índice se justifica pelo fato de que os autores recorreram a pesquisas já realizadas sobre diversos temas inerentes à nossa sociedade para explicarem as temáticas dos projetos, a serem desenvolvidas pelos estudantes. Já nas situações de resolução, há a predominância de situações envolvendo a realização de pesquisas estatísticas. Essas atividades, assim como nos livros de projetos integradores, estão ligadas a algumas etapas dos projetos, como forma dos estudantes pesquisarem dados relativos aos temas estudados. Como exemplo para uma situação com essa habilidade, destacamos a Figura 9, a qual apresenta uma proposta para a realização de uma pesquisa com idosos para que os estudantes conheçam suas histórias de vida.

Figura 9
Situação de Resolução com a realização de pesquisa estatística

Faça, com a turma e o professor, uma entrevista com idosos que morem ou frequentem os arredores da escola ou que sejam familiares de alguém da turma, a fim de conhecê-los e ouvir suas histórias de vida. Primeiramente, prepare-se criando um roteiro. Veja uma sugestão a seguir.

Lembre-se: você já realizou uma entrevista no primeiro bloco. **Quem é você?** Use o que você aprendeu naquele momento para fazer essa nova entrevista. **Junto com a turma, desenvolva um roteiro para realizar as entrevistas.**

- Comece com perguntas sobre os dados pessoais, como nome, local e data de nascimento. Depois, faça perguntas que ajudem a construir a narrativa de forma cronológica, como: Quem são seus pais e avós? Como e onde foi sua infância?
- Pergunte sobre experiências marcantes de sua trajetória de vida.
- Ajude o entrevistado a relacionar sua história de vida com o tempo presente, avaliando quais aspectos da sua vida contribuíram para que se tornasse quem é hoje.
- Para finalizar, pergunte ao entrevistado: Que conselho de vida você daria para os mais jovens?

Fonte: Alchorne e Carvalho, Livro Projetos de Vida (2021, p. 94)

No entanto, também verificamos que essas propostas de pesquisas não contemplam todas

as fases do ciclo investigativo (Guimarães e Gitirana, 2013), ficando restritas principalmente, ao problema de pesquisa, coleta de dados, representação dos dados, análise e conclusão. Diante disso, mais uma vez reiteramos sobre a importância do trabalho com todas as fases de uma investigação, como forma dos estudantes refletirem sobre as ações em cada etapa, ao mesmo tempo que aprofundam a aprendizagem de conceitos estatísticos.

Livros de Matemática e suas Tecnologias

Com relação ao conceito de Amostragem, verificamos que os 10 livros de Matemática e suas tecnologias que abordam a temática de Estatística e Probabilidade contemplam 436 situações, sendo 126 de explicação e 310 de resolução. Como primeira categoria de análise, classificamos essas situações de acordo com forma de abordagem do conceito de amostra, nos tipos explícito e implícito (Tabela 7).

Tabela 7

Quantitativo das situações de Amostra por tipo de abordagem

Conceito	Situação	
	Explicação (n = 126)	Resolução (N= 310)
Explícito	124 (71%)	300 (64%)
Implícito	3 (29%)	10 (36%)

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

Como podemos observar, há uma grande predominância de situações nos tipos explicação e resolução com a abordagem do conceito de amostra de forma explícita, o que é bem importante. Esse fato, assim como já observado e pontuado nos livros de projetos, possibilita uma melhor exploração desse conceito durante o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, possibilitando o professor abordá-lo em diferentes contextos e atividades, o que pode facilitar a aprendizagem dos estudantes. Em continuidade, através da segunda categoria de análise, verificamos que tanto nas situações de explicação como nas de resolução, há uma maior frequência de dados fictícios (Tabela 8).

Tabela 8

Quantitativo das situações de Amostragem por tipo de contexto

Contexto dos dados	Situação	
	Explicação (n = 126)	Resolução (n = 310)
Real	52 (41%)	120 (39%)
Fictício	74 (59%)	190 (61%)

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Figura 10

Situação de Explicação com dados fictícios

2. Uma empresa pretende fazer uma pesquisa com funcionários de diversos setores, garantindo que tenha representantes de forma proporcional de cada setor, pois não será possível realizar a pesquisa com todos os funcionários. Observe a seguir dados referentes a esses funcionários e responda às questões.

a) Determine quantos funcionários de cada setor precisam ser entrevistados para que 20% da empresa responda à pesquisa.

b) Que tipo de amostra é mais apropriada para esse estudo?

Resolução

a) Calculando 20% do total de funcionários, temos:
 $1600 \cdot 0,20 = 320$
Portanto, 320 funcionários vão responder à pesquisa.
Para escolher de forma proporcional os funcionários de cada setor, fazemos:
Setor A: $250 \cdot 0,20 = 50$ Setor C: $450 \cdot 0,20 = 90$ Setor E: $410 \cdot 0,20 = 82$
Setor B: $135 \cdot 0,20 = 27$ Setor D: $355 \cdot 0,20 = 71$
Portanto, deverão ser entrevistados 50, 27, 90, 71 e 82 funcionários, respectivamente, dos setores A, B, C, D e E.

b) A amostra estratificada é a recomendada para essa pesquisa.

Funcionários por setor	
Setor	Quantidade de funcionários
A	250
B	135
C	450
D	355
E	410
Total	1600

Fonte: Dados fictícios.

Fonte: Bonjorno *et al*, Livro Matemática e suas Tecnologias (2021, p. 65)

Diante disso, podemos concluir que os Livros de conhecimento de Matemática e suas tecnologias, nos volumes de Estatística e Probabilidade, vão na contramão dos livros de projetos ao apresentarem mais situações com dados fictícios. Guimarães e Gitirana (2013) apontam a necessidade dos livros didáticos priorizarem situações com dados reais tendo em vista que as situações que de fato refletem a realidade podem proporcionar uma maior reflexão por parte dos estudantes e colaborar para o desenvolvimento do seu Letramento Estatístico (Gal, 2002), permitindo comparações dos dados com as crenças e levantamentos de hipóteses. Em complemento, Ben-Zvi et al. (2015) enfatizam que a utilização de situações reais que contemplem o conceito de Amostragem pode facilitar o entendimento sobre a variabilidade e representatividade amostral. A seguir, destacamos na Figura 10 que representa uma situação com dados fictícios, envolvendo uma pesquisa com os funcionários de uma empresa.

Em sequência, na categoria de análise referente ao conceito de Amostragem, verificamos as situações quanto ao tipo de população/amostra (Tabela 9).

Tabela 9

Quantitativo das situações de Amostragem por tipo de população/amostra

População/Amostra	Situação	
	Explicação (n = 126)	Resolução (N= 310)
Pessoas	103 (82%)	249 (80%)
Objetos	23 (18%)	61 (20%)

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

A partir desses dados, podemos concluir que tanto nas situações de explicação como nas de resolução há uma maior frequência do tipo de população/amostra se referindo a pessoas (Figura 10). Assim como já discorremos na seção sobre os livros de projetos, é importante que as situações relativas ao conceito de Amostragem busquem um equilíbrio na abordagem do tipo de população/amostra, se referindo a pessoas e também a objetos ou animais (Gomes, 2013). Por fim, a última categoria de análise relativa ao conceito de Amostragem se voltou para verificar nos livros em questão, as habilidades que são exploradas em cada situação (Tabela 10).

Tabela 10
Quantitativo das situações de Amostragem por habilidades

Habilidades	Situação	
	Explicação (n=126)	Resolução (n=310)
Seleção e representatividade de amostra	13 (11%)	21 (7%)
Análise dos dados de pesquisa amostral	30 (24%)	27 (9%)
Realização de pesquisa estatística	12 (9%)	42 (14%)
Definir a pesquisa como censitária ou amostral	3 (2%)	19 (6%)
Cálculo de medidas Estatísticas	12 (9%)	91 (30%)
Técnicas de amostragem	38 (30%)	34 (11%)
Identificar a margem de erro	4 (3%)	11 (3%)
Comparação entre amostras	0	2 (1%)
Identificar o tamanho da amostra	1 (1%)	19 (6%)
Classificar o tipo de variável	1 (1%)	11 (3%)
Construção de gráficos para representação dos dados amostrais	7 (6%)	11 (3%)
Cálculo de probabilidades a partir dos dados amostrais	4 (3%)	18 (6%)
Realizar um tipo de contagem a partir dos dados amostrais	1(1%)	4 (1%)

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

Podemos observar, a partir dessa análise, que nas situações de explicação há uma maior frequência para a abordagem sobre as técnicas de Amostragem, o que possibilita ao estudante entender os diferentes processos para a formulação de uma amostra. No entanto, verificamos que a maioria dos livros abordam apenas as técnicas de Amostragem probabilísticas dos tipos Aleatória Simples, Estratificada e Sistemática. Poucos livros abordam os tipos de Amostragem não-probabilísticas, como amostras por conveniência ou por julgamento (Figura 11). Logo, acreditamos que os Livros Didáticos poderiam abordar os tipos de Amostragem em sua totalidade, o que inclui as não-probabilísticas que também estão presentes em diversas situações do nosso cotidiano.

abordavam esse conceito, sendo 15 de explicação e 37 de resolução. Destaca-se, inicialmente, que há uma disparidade entre a quantidade de situações sobre Amostragem e a da Curva Normal. Isso pode ser explicado pelo fato dos livros didáticos analisados explorarem com uma maior ênfase as análises descritivas dos dados amostrais e pouco abordam situações em que se pode realizar inferências estatísticas informais através de modelos de distribuição de dados, como o modelo da Curva Normal. A nossa primeira categoria de análise classificou as situações observadas de acordo com o tipo de abordagem do conceito da Curva Normal, isto é, explícito ou implícito (Tabela 11).

Tabela 11

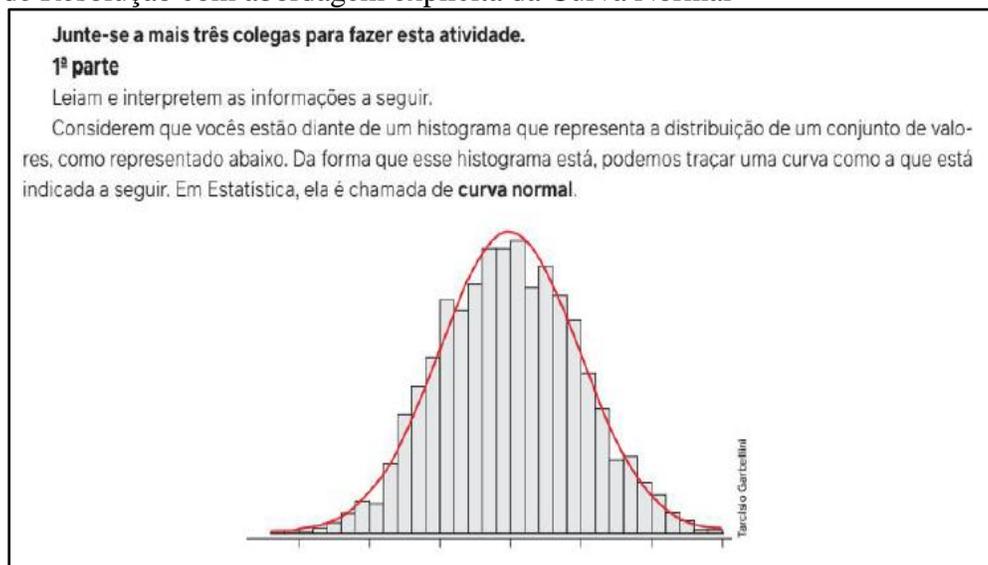
Quantitativo das situações de Curva Normal por tipo de abordagem

Conceito	Situação	
	Explicação (n = 15)	Resolução (N= 37)
Explícito	10 (67%)	20 (54%)
Implícito	5 (33%)	17 (46%)

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

Figura 13

Situação de Resolução com abordagem explícita da Curva Normal



Fonte: Freitas *et al*, Livro Matemática e suas Tecnologias (2021, p. 33)

Com base nesses dados, evidencia-se que as situações que contemplam o conceito da Curva Normal, são, em sua maioria, abordadas de forma explícita. Assim como pontuamos na seção sobre a Amostragem, acreditamos também que a abordagem explícita desse conceito pode facilitar as ações docentes e discentes no âmbito de seu processo de ensino e aprendizagem. A Figura 13 exemplifica o retrato de uma situação de resolução na qual os estudantes devem pesquisar

exemplos de distribuição simétricas, a exemplo da Curva Normal, na qual as medidas de centralidade representam o centro e o eixo de simetria da distribuição.

Em prosseguimento a nossa análise, verificamos por meio da segunda categoria que as situações, nos tipos explicação e resolução, referentes ao conceito da Curva Normal contemplam mais dados fictícios (Tabela 12).

Tabela 12

Quantitativo das situações de Curva Normal por tipo de contexto

Contexto dos dados	Situação	
	Explicação (n = 15)	Resolução (n = 37)
Real	4 (27%)	4 (11%)
Fictício	11 (73%)	33 (89%)

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Nesse contexto, assim como já discutido em seções anteriores, reforçamos que a maior frequência de situações com dados fictícios não é algo positivo porque não possibilita ao estudante e também ao professor, no processo de ensino e aprendizagem, a abordagem de situações reais ligadas aos seus contextos, o que pode instigar a uma maior reflexão sobre a suas realidades, como também refinar os elementos de conhecimento e de disposição relativos ao letramento estatístico. A terceira categoria de análise, por sua vez, foi direcionada para a verificação do tipo de representação dos dados da Curva Normal, podendo ser gráfica, algébrica ou numérica. Nesse sentido, ao analisarmos as 52 situações, observamos uma maior frequência para a representação gráfica (Tabela 13).

Tabela 13

Quantitativo das situações de Curva Normal por tipo de representação

Contexto dos dados	Situação	
	Explicação (n = 15)	Resolução (n = 37)
Gráfica	14 (93%)	29 (78%)
Numérica	1 (7%)	8 (22%)
Algébrica	0	0

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

A representação gráfica da Curva Normal é a forma ideal para o processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista que através dessa representação torna-se mais fácil visualizar a noção da Curva, bem como as medidas abarcadas por esse modelo, principalmente a média, que corresponde ao ponto central e o desvio-padrão que indica a dispersão do conjunto. Ao variá-los,

o gráfico pode apresentar movimentos de translação e achatamento. No entanto, também acreditamos que os professores podem abordar em sala de aula outros tipos de representação, como a numérica, em que os dados são apresentados em sequência e a algébrica, haja vista que a distribuição normal corresponde a uma função de densidade. Lima (2009) aponta que os estudantes do Ensino Médio são capazes de compreender as propriedades e as características da Curva Normal em diferentes contextos. Nesse sentido, concluímos que para o seu ensino é importante o professor abordar os diferentes tipos de representação para que o aluno conceba uma distribuição normal além de sua representação gráfica. Por fim, através da última categoria de análise, analisamos as habilidades que são exploradas nas situações envolvendo o conceito da Curva Normal (Tabela 14).

Tabela 14
Quantitativo das situações de Curva Normal por habilidades

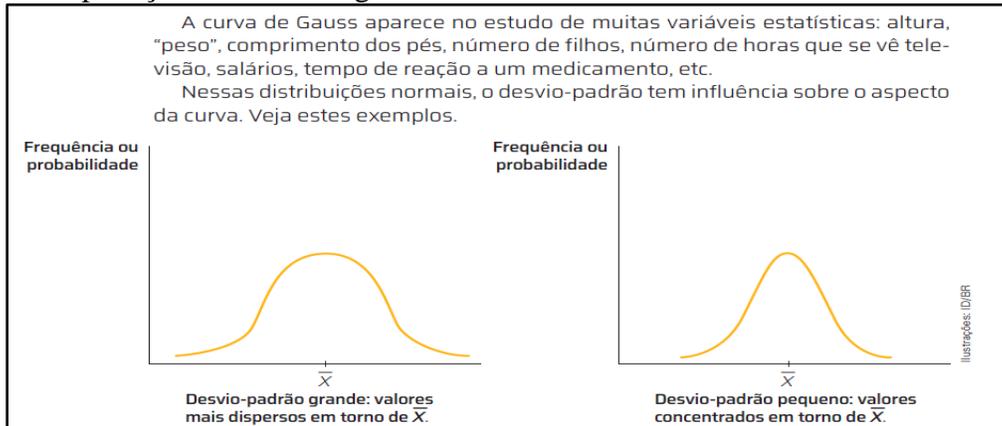
Habilidades	Situação	
	Explicação (n = 15)	Resolução (n = 37)
Análise Gráfica	3 (20%)	3 (8%)
Cálculo ou identificação das medidas de centralidade	3 (20%)	12 (32%)
Cálculo ou identificação das medidas de Dispersão	1 (7%)	7 (19%)
Cálculo ou identificação das medidas de Centralidade e Dispersão	1 (7%)	1 (3%)
Cálculo de Probabilidades	3 (20%)	6 (16%)
Cálculo da porcentagem associada a intervalos da Curva	2 (13%)	7 (19%)
Identificação da Frequência dos Dados	2 (13%)	1 (3%)

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

Com base nessas informações, podemos observar que há uma igualdade na quantidade situações de explicação que exploram as habilidades de análise gráfica, cálculo ou identificação das medidas de centralidade e o cálculo de probabilidades. Assim, como apontam González *et al* (2018) acreditamos que o ensino da Curva Normal, desde a Educação Básica, deve incluir a compreensão dos significados desse conceito e dos conceitos estatísticos e probabilísticos abarcados nesse modelo em diversos contextos, para que seja possível a correta interpretação dos fenômenos e problemas que fazem uso da Curva Normal. Assim, através dessas situações o professor pode explorar a representação gráfica desse modelo (Figura 14).

Figura 14

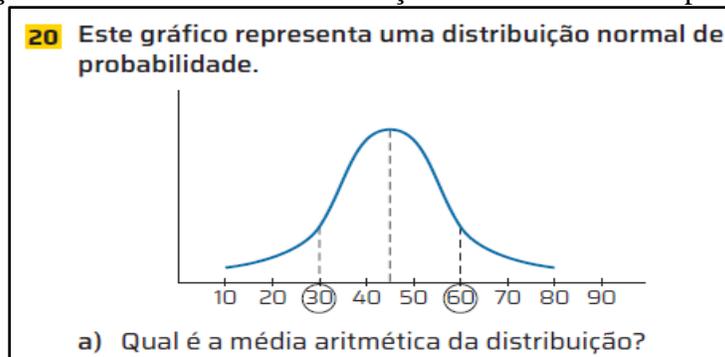
Situação de Explicação com análise gráfica



Já nas situações de resolução há uma frequência maior para o cálculo ou identificação das medidas de centralidade, que estão presentes no centro da Curva Normal e estabelecem o eixo de simetria da distribuição. A exploração de atividades que possibilitem a realização de inferências estatísticas e, mais especificamente, abordem as medidas de centralidade da Curva Normal vão além da simples aplicação dos cálculos e propriedades dessas medidas e propiciam aos professores os estudantes a leitura das mesmas em diferentes fenômenos que seguem uma distribuição normal (Figura 15).

Figura 15

Situação de Resolução com o cálculo ou identificação das medidas de dispersão



Fonte: Smole e Diniz, Livro Matemática e suas tecnologias (2021, p. 151)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a relevância que os livros didáticos possuem para as ações dos professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem, realizamos essa pesquisa com o objetivo de

analisar a abordagem dos conceitos de Amostragem e de Curva Normal nos livros didáticos de Projetos Integradores, Projetos de Vida e de Matemática e suas tecnologias do novo Ensino Médio brasileiro, aprovados e distribuídos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático do Brasil (PNLD 2021).

Com base nas análises realizadas, observamos que tanto os livros de projetos quanto aos de conhecimento, apresentam propostas interessantes para o trabalho de tópicos da Estatística e da Probabilidade, principalmente na abordagem dos resultados de pesquisas estatísticas e realização das mesmas. No que diz respeito, especificamente, aos livros de projetos, constatamos que a maioria das situações exploram dados reais e, assim, possibilitam uma maior reflexão dos estudantes sobre o contexto social ao qual estão inseridos e, conseqüentemente, uma maior compreensão de mundo. Dessa forma, essa perspectiva contribui para o aprimoramento do Letramento Estatístico e Probabilístico (Gal, 2002, 2005) dos estudantes. No entanto, também observamos uma predominância de situações que envolvem o conceito de população/amostra se referindo apenas a pessoas, pouca discussão sobre a seleção e representatividade da amostra, uma maior ênfase para as análises descritivas dos dados amostrais e pouca abordagem para o modelo da Curva Normal.

Já os livros de conhecimento, as obras de Matemática e suas Tecnologias exploram muito mais dados fictícios com ênfase para aplicação do cálculo de medidas estatísticas. Além disso, também há uma predominância de situações que envolvem o conceito de população/amostra se referindo apenas a pessoas. Verificamos ainda que nos tópicos sobre amostragem não são abordados todos os tipos de métodos para a seleção de amostra e pouco se discute os aspectos para a representatividade amostral. Com relação a Curva Normal, a partir de dados fictícios, há uma ênfase para a aplicação de técnicas operatórias para o cálculo das medidas de centralidade, dispersão e probabilidade. Assim, pouco se explora os significados dos conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo, bem como, como ele é aplicado e modelado em fenômenos do nosso cotidiano.

Diante disso, acreditamos que é possível, em sala de aula e nos livros didáticos, um maior aprofundamento na Estatística, através de uma proposta com a inferência informal que contemple aspectos da Amostragem relacionando com a Curva Normal, contemplando situações que envolvam, por exemplo, a incerteza, variabilidade amostral, propriedades da Amostragem e o

modelo da Curva Normal para a distribuição de probabilidades. Essa articulação propiciará aos estudantes um leque maior de possibilidades para a análise de dados.

REFERÊNCIAS

- Bayer, A., Echeveste, S., Bittencourt, H. e Rocha, J. (2005). *Preparação do formando em Matemática-licenciatura plena para lecionar estatística no Ensino Fundamental e Médio*. [Comunicação Oral] Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. Bauru, Brasil.
- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2004). Students' reasoning about the normal distribution. En Ben-Zvi, D. e J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 257-276). Springer.
- Ben-Zvi, D., Bakker, A. e Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291-303. <https://dx.doi.org/10.1007/s10649-015-9593-3>
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação.
- Brasil (2021). *Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático*. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação.
- Gal, I. (2002). Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1-33.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G.A Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.
- Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-15). Universidad de Granada.
- Guimarães, G.L. e Gitirana, V. (2013). Estatística no Ensino Fundamental: a pesquisa como eixo estruturador. En R. Borba e C.E. Monteiro (Eds.), *Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática* (pp. 93-132). UFPE.
- Gomes, T.M. (2013). *O todo é a soma das partes, mas uma parte representa o todo? Compreensão de Estudantes do 5º e 9º ano sobre Amostragem*. [Dissertação de Mestrado em Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco].
- Hernandes, L.A. (2023). *Isometrias em coleções de livros didáticos de matemática do Brasil e do Canadá*. [Dissertação de Mestrado em Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Campinas].
- Lima, O. A. (2009) *Distribuição Normal: Uma introdução voltada ao Ensino Médio por simulações via planilha eletrônica e exercícios interativos*. [Dissertação de Mestrado em Pós-graduação em Educação Matemática Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].
- Lima, E.T. (2020). Probabilidade em livros didáticos de matemática dos anos finais: diferentes

- concepções. *Zetetike*, 28, e020015. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656908>
- Luna, L. e Guimarães, G. L. (2021). Aprendizagem de amostragem nos PCN e na BNCC e a influência nos livros didáticos. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, 11(1), 1-20.
- Makar, K. e Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.
- Malhotra, N.K. (2005). *Introdução à pesquisa de marketing*. Editora Prentice Hall.
- Moore, D.S. (1995). *A Estatística básica e sua prática*. W.H. Freeman and Company.
- Richit, A., Venturin, S. e Rodrigues, B.M.B. (2021). Ensino da Estatística nos Livros Didáticos Ápis e Coopera do Quarto Ano do Ensino Fundamental. *Revista de Educação Matemática*, 19 (1), e022017. <https://doi.org/10.37001/remat25269062v19id568>
- Sá-Silva, J.R., Almeida, C.D. e Guindani, J.F. (2009). Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista Brasileira de História & Ciências Sociais*, 1(1), 1-15.
- Santos, L.C. (2020). Análise e o ensino de estatística em um livro didático. *Brazilian Journal of Development*, 6(6), 35598-35610.
- Santana, M. e Borba, R. (2016). O ensino de probabilidade nos anos iniciais: um olhar sobre a abordagem nos livros didáticos. *EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 7, 1-20.
- Triola, M.F. (2008). *Introdução à estatística: atualização da tecnologia*. LTC.

TEXTBOOKS OF THE NEW BRAZILIAN HIGH SCHOOL: AN ANALYSIS OF THE APPROACH OF THE CONCEPT OF SAMPLING AND NORMAL CURVE

Abstract

In this study we seek to investigate the approach to the concepts of Sampling and Normal Curve in textbooks for Brazilian High School. This is a documentary analysis of the 14 books on Integrative Projects, 24 books on Life Projects and 10 books on Mathematics and its Technologies approved by the National Book and Teaching Material Program - PNLD 2021. The results indicate that the books of projects address interesting proposals for the work of Statistics and Probability, in High School, with an emphasis on real data, analysing results of sample statistical research and proposals for carrying them out. However, they present a predominance of situations that involve the concept of population/sample referring only to people and little discussion about the Normal Curve model. Mathematics and its Technologies books present a perspective for applying the calculation of statistical measures, with an emphasis on fictitious data. Not all types of methods for sample selection are covered and little is discussed about aspects of sample representativeness. Regarding the Normal Curve, based on fictitious data, there is an emphasis on the application of operative techniques to calculate centrality, dispersion and probability measures. Given this, we argue that high school textbooks should explore informal inference in more depth, addressing aspects of Sampling in connection with the Normal Curve model, providing students with a greater set of tools for data analysis.

Keywords: Statistical Education, sampling, normal curve, high school, textbook.

LIBROS DE TEXTO DE LA NUEVA ESCUELA SECUNDARIA BRASILEÑA: UN ANÁLISIS DEL ABORDAJE DEL CONCEPTO DE MUESTREO Y CURVA NORMAL

Resumen

En este estudio buscamos investigar el abordaje de los conceptos de Muestreo y Curva Normal en los libros de texto de la enseñanza media brasileña. Se trata de un análisis documental de los 14 libros de Proyectos Integrativos, 24 libros de Proyectos de Vida y 10 libros de Matemáticas y sus Tecnologías aprobados por el Programa Nacional del Libro y Material Didáctico - PNLD 2021. Los resultados indican que los libros de proyectos abordan temas interesantes. propuestas para el trabajo de Estadística y Probabilidad, en la Enseñanza Media, con énfasis en datos reales, analizando resultados de investigaciones estadísticas muestrales y propuestas para su realización. Sin embargo, presentan predominio de situaciones que involucran el concepto de población/muestra refiriéndose únicamente a personas y poca discusión sobre el modelo de Curva Normal. Los libros de Matemáticas y sus Tecnologías presentan una perspectiva para aplicar el cálculo de medidas estadísticas, con énfasis en datos ficticios. No se cubren todos los tipos de métodos para la selección de muestras y se discute poco sobre aspectos de la representatividad de la muestra. En cuanto a la Curva Normal, basada en datos ficticios, se hace énfasis en la aplicación de técnicas operativas para calcular medidas de centralidad, dispersión y probabilidad. Ante esto, sostenemos que los libros de texto de secundaria deberían explorar la inferencia informal con más profundidad, abordando aspectos del muestreo en conexión con el modelo de curva normal, proporcionando a los estudiantes un mayor conjunto de herramientas para el análisis de datos.

Palabras clave: Educación Estadística, muestreo, curva normal, escuela secundaria, libro de texto.

André Fellipe Queiroz Araújo

Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, Brasil.

andrefellipeq93@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7060-0621>

Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco - UFPE. Professor da Educação Básica da rede estadual de Pernambuco, estado localizado no Nordeste Brasileiro. Possui experiência nas áreas de Matemática e Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Estatística e Probabilística, Ensino e Aprendizagem de Matemática e Formação de Professores que ensinam matemática.

Gilda Lisbôa Guimarães

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

gilda.lguimaraes@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-1463-1626>

Professora Titular do Departamento de Ensino e Currículo e da Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec, da Universidade Federal de Pernambuco. Doutora em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco (2002), com pós-doutorado na Universidad de Burgos/Espanha e na Université Laval/Canadá. Pesquisa e orienta estudos na área de Educação Estatística relacionados ao ensino e a aprendizagem de professores e alunos. É líder do Grupo de Pesquisa do CNPQ - Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental - GREF.

ANÁLISIS DEL SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO DE QUINTO Y SEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Víctor Torres-Escoriza
María del Mar López-Martín

RESUMEN

Considerando la creciente importancia que la probabilidad ha adquirido en las últimas décadas en todas las etapas educativas, así como el impacto significativo que los libros de texto tienen en el proceso educativo, el objetivo principal de la presente investigación se centra en analizar los significados de la probabilidad en los libros de texto del tercer ciclo de Educación Primaria en Andalucía (quinto y sexto curso). Mediante herramientas del enfoque ontosemiótico (EOS) y adoptando un enfoque cualitativo, se analizaron detalladamente los libros de texto del tercer ciclo de Educación Primaria en Andalucía, centrándose en las situaciones problemas para identificar los significados asociados a la probabilidad. Los resultados revelan discrepancias significativas entre los significados propuestos por las normativas educativas y los presentados en los libros de texto. Se observa una presencia marcada del significado intuitivo y una dependencia notable del significado clásico. Por lo que, se sugiere que los docentes realicen adaptaciones para una enseñanza más efectiva de la probabilidad, y se plantea que estas observaciones sean consideradas por las editoriales al mejorar los materiales educativos.

Palabras clave: Enfoque Ontosemiótico, probabilidad, libro de texto, Educación Primaria, significado.

INTRODUCCIÓN

En consonancia con las recomendaciones establecidas por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), que enfatizan la importancia de comenzar el estudio de la probabilidad desde etapas tempranas de la educación, diversos autores argumentan la necesidad de integrar este contenido en Educación Primaria (Azcárate y Cardeñoso, 2008). Este enfoque busca no solo enseñar a los estudiantes a comprender y gestionar la incertidumbre en situaciones cotidianas, sino también equiparlos con habilidades críticas para su desarrollo efectivo y autónomo en la sociedad.

Para facilitar el desarrollo de estas habilidades, es importante asegurar que los educadores posean tanto un adecuado conocimiento del contenido matemático, así como de su didáctica. No obstante, algunas investigaciones evidencian una formación docente insuficiente en términos iniciales y continuos para la enseñanza de la probabilidad (Franco y Alsina, 2022; Vásquez y Alsina, 2015), como por ejemplo el cálculo de probabilidades, la distinción entre eventos equiprobables y la comprensión de conceptos de aleatoriedad (Alsina y García, 2023; Batanero et al., 2014; Contreras, 2011). Además, se destaca la problemática pedagógica en la identificación y el tratamiento adecuado de los retos que enfrentan los estudiantes en la comprensión específica de la probabilidad (Mohamed, 2012). Esta realidad puede ser el principal motivo por el que numerosos docentes se vean en la necesidad de recurrir al libro de texto como un recurso esencial para impartir estos contenidos de manera efectiva (Jamieson-Proctor y Byrne, 2008; Suárez, 2019). Por ende, el libro de texto se consolida como un elemento fundamental dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, sirviendo no solo como una guía curricular indispensable, sino también como un instrumento para compensar las posibles carencias en su formación especializada.

La elección y la implementación adecuada de los libros de texto se presentan como elementos fundamentales (Braga y Bolver, 2016), con el fin de asegurar una preparación efectiva de los estudiantes. Este hecho destaca la importancia de reconocer que el análisis de libros de texto constituye un componente esencial del proceso de entender cómo el currículo escrito se interpreta y se traduce en la práctica educativa. Tal análisis constituye un eslabón importante entre el currículo pretendido y su implementación efectiva en el aula (Herbel-Eisenmann, 2007). En este contexto, Ortiz (2002a) destaca que el docente adquiere un rol de vigilancia epistémica sobre los contenidos presentados en los libros de texto, con el objetivo de discernir y prevenir la transmisión

de interpretaciones sesgadas a los estudiantes, garantizando así una enseñanza equilibrada y objetiva.

Las investigaciones centradas en el análisis de la probabilidad en libros de texto son limitadas, y las pocas existentes se enfocan principalmente en la etapa de secundaria (Azcárate y Serradó, 2006; Ortiz, 2002b). Esta escasez se atribuye, en gran parte, a su introducción relativamente tardía en el currículo de primaria en España, que comenzó en 1990 con la LOGSE. Sin embargo, en la última década, algunos estudios han comenzado a explorar la enseñanza de la probabilidad en la Educación Primaria, proporcionando un análisis más detallado de los libros de texto utilizados en esta etapa. Gómez et al. (2013) y Gómez, Ortiz, et al. (2014), analizaron la enseñanza de la probabilidad en libros de texto para la Educación Primaria en las series de libros de texto más utilizadas en la Comunidad Autónoma de Andalucía (España). Los hallazgos de 2013 resaltan una marcada prevalencia de lenguaje coloquial sobre el formal, así como un dominio del lenguaje numérico, gráfico y tabular. El estudio posterior de 2014 profundiza en los significados atribuidos a la probabilidad, indicando un predominio de la interpretación intuitiva desde el primer ciclo, una sólida presencia del significado clásico a partir del segundo ciclo, un tratamiento desigual del significado frecuencial según la editorial y una escasa mención del significado subjetivo. Alsina y Vásquez (2015) llevaron a cabo un análisis de dos colecciones de libros de texto de Educación Primaria, llegando a la conclusión de que el tratamiento de la probabilidad en estos materiales no siempre está en consonancia con las directrices establecidas por las normativas educativas. Este desacuerdo entre los contenidos presentados en los libros de texto y los currículos oficiales resalta la necesidad de reconsiderar la forma en que se enseña la probabilidad en los recursos educativos. En el contexto costarricense, Rosales-Fernández y Ortiz (2018), analizaron los significados de la probabilidad presentes en tres libros de texto y los resultados mostraron una gran diversidad de significados, predominando los significados intuitivo, frecuencial y subjetivo, mientras que el significado clásico sólo se presentó en uno de ellos.

En respuesta a esta carencia de estudios, el objetivo de esta investigación es analizar los significados de la probabilidad presentados en los libros de texto de quinto y sexto grado de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía (España), y en qué medida estos se alinean con las normativas educativas estatales y autonómicas. Con la presente investigación se pretende ofrecer a los docentes criterios para seleccionar textos que promuevan un enfoque más integral y efectivo de enseñanza de la probabilidad. Adicionalmente, se espera que los hallazgos

orienten a las editoriales en la mejora de sus materiales y contribuyan en este campo de investigación.

Para tal fin de abordar el tema de investigación, el presente trabajo se ha estructurado en cinco secciones; en la Sección 2, se presenta el marco teórico que sustenta el análisis de la probabilidad en los libros de texto, haciendo énfasis en el enfoque ontosemiótico y los distintos significados de la probabilidad. En la Sección 3, se detalla la metodología utilizada para examinar los libros de texto de quinto y sexto grado de la Educación Primaria seleccionados. Los resultados se discuten en la Sección 4, revelando las discrepancias entre los significados de la probabilidad presentados en los materiales didácticos y las directrices educativas. Finalmente, la última sección resume las principales conclusiones, reflexionando sobre el impacto de estos resultados en la práctica docente y la elaboración de materiales didácticos.

MARCO TEÓRICO

Enfoque ontosemiótico

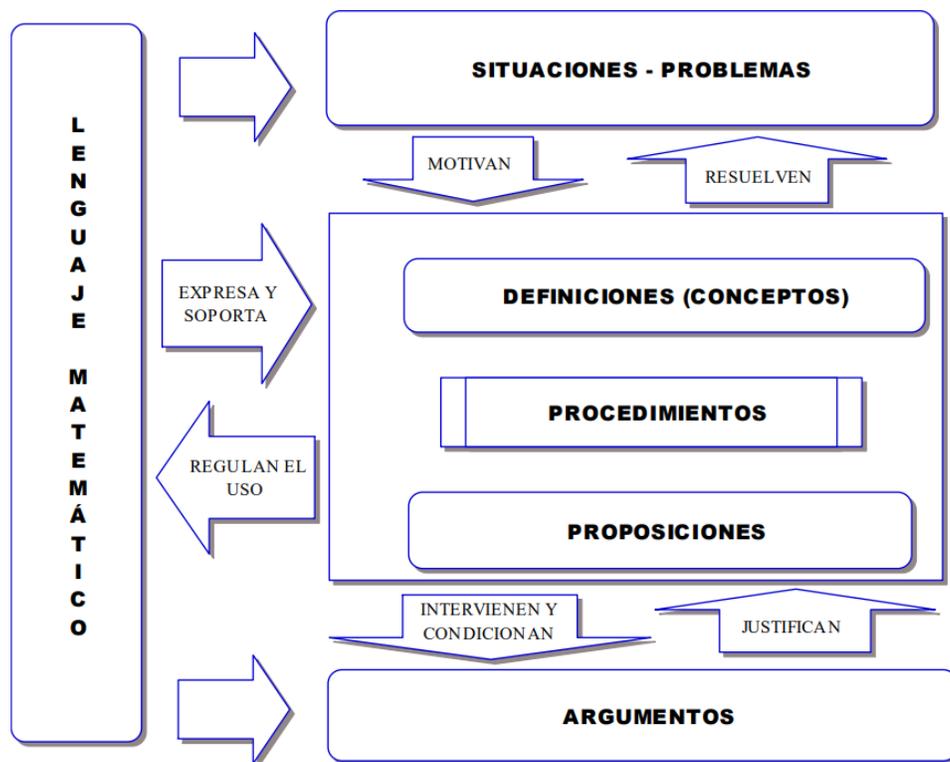
Para llevar a cabo la presente investigación es necesario apoyarse en un marco teórico sólido y herramientas metodológicas que faciliten un enfoque riguroso. En este contexto, se adopta el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), propuesto por Godino y colaboradores (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007, entre otros). Este marco, caracterizado por su inclusividad, dinamismo y apertura, busca promover un diseño instruccional efectivo, abarcando todas las facetas relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el ámbito específico de esta investigación, nos centramos en el sistema de prácticas que nos permitirá delimitar los significados tanto personales (significado de un sujeto en unas determinadas circunstancias) como institucionales (asociados a una institución) relacionados con la probabilidad. Si nos centramos en cómo un sujeto construye un significado sobre la probabilidad podemos decir que partirá de un significado inicial y, mediante un sistema de prácticas, se va a producir una modificación y ampliación del significado formándose así el significado final. Sin embargo, en el significado institucional, se parte del significado de referencia, que hace alusión al significado formal de la probabilidad.

Desde esta perspectiva, la comprensión de la probabilidad se extiende a través de una serie de prácticas aplicadas al abordar problemas probabilísticos. Este enfoque promueve una diversidad de objetos matemáticos asociados con la probabilidad: *situaciones-problema* (problemas, ejercicios que dan origen a la actividad matemática), *lenguaje* (términos, expresiones o gráficos que se van a utilizar para representar los datos, hacer operaciones con ellos y comunicar las soluciones), *conceptos* (definiciones sobre determinados objetos matemáticos empleadas en la resolución de las situaciones–problemas), *proposiciones* (propiedades de los conceptos o relaciones entre ellos), procedimientos (técnicas o algoritmos utilizadas en la resolución de una situación–problema) y argumentos (enunciados utilizados para explicar los procedimientos y proposiciones, o para dar por válidos los resultados obtenidos).

La interacción entre estas tipologías de objetos en la práctica matemática o en la enseñanza da lugar a configuraciones epistémicas (institución) o cognitivas (persona) tal y como se refleja en la Figura 1.

Figura 1.
Configuración de objetos matemáticos asociados a la probabilidad en el EOS



Fuente: Font y Godino (2006, p. 69)

En las configuraciones epistémicas, cuando surgen situaciones problemáticas que originan la actividad matemática, es necesario emplear un lenguaje específico y una serie de conceptos para resolver dichas situaciones. Por tanto, en línea con el objetivo de investigación, el presente estudio se centra en las configuraciones epistémicas que se establecen entre estos tres elementos matemáticos primarios a los significados de la probabilidad.

Significados de la probabilidad

En el ámbito de las matemáticas de Educación Primaria, la probabilidad se presenta con diversos significados. Uno de ellos es el *significado intuitivo*, donde se asigna a los eventos una probabilidad cualitativa basada en creencias personales. Este enfoque es particularmente adecuado para estudiantes de primaria, ya que los juegos, que generan un gran interés entre ellos, sirven como un medio eficaz para introducir conceptos de probabilidad de manera intuitiva y comprensible (Godino et al., 1988). Por otro lado, el *significado clásico*, basado en la Regla de Laplace, se define como el cociente entre el número de casos favorables sobre el número de casos posibles, asumiendo que todos los sucesos en el espacio muestral discreto son equiprobables. A pesar de las limitaciones de esta definición, ha sido la predominante en la educación primaria (Gómez, Batanero et al., 2014) debido a su aplicación práctica para calcular probabilidades simples en situaciones cotidianas que involucran monedas, dados y otros juegos de azar familiarizados por los estudiantes.

El *significado frecuencial* de la probabilidad emerge como un enfoque objetivo, fundamentado en la ley de los grandes números (Batanero et al., 2005) y se basa en la estimación de la probabilidad de un evento a través de la frecuencia relativa resultante de un gran número de repeticiones de este. Este enfoque facilita una comprensión más profunda y aplicada de la probabilidad debido a la posibilidad de realizar experimentos y obtener observaciones.

El *significado subjetivo* de la probabilidad, introducido a través del Teorema de Bayes, publicado en 1763, aborda la probabilidad desde la perspectiva de las creencias personales o el grado de convencimiento sobre la ocurrencia de un evento específico. Este enfoque no solo facilita la conexión de las experiencias previas de los alumnos con el estudio de la probabilidad, sino que también promueve el desarrollo de la inferencia estadística y la aplicación de conceptos probabilísticos más allá del ámbito matemático.

El *significado axiomático* de la probabilidad se define como una función que debe satisfacer un conjunto de axiomas, derivados de las propiedades observadas en los significados previamente mencionados de la probabilidad. Este enfoque formaliza la probabilidad dentro de un marco matemático riguroso y es esencial para el desarrollo teórico avanzado en la materia.

La introducción de la probabilidad mediante estos diferentes significados permite una comprensión más completa y matizada del concepto, preparando a los estudiantes para aplicaciones más complejas y teóricas a medida que avanzan en su educación. La identificación y profundización en estos significados es una tarea esencial que se complementa con el análisis de cómo los libros de texto presentan estos conceptos.

METODOLOGÍA

Tal y como se ha mencionado previamente, este estudio se centra en analizar los distintos significados atribuidos a la probabilidad, recurriendo a una metodología de análisis de contenido (Herrera, 2018) para examinar el significado institucional reflejado en los libros de texto del último ciclo de Educación Primaria. Se adoptó un enfoque metodológico cualitativo, que integra técnicas deductivas —fundamentadas en categorías establecidas previamente en la literatura— con estrategias inductivas, destinadas a la identificación y definición de nuevas categorías (Bingham y Witkowsky, 2022). A lo largo de este proceso, los investigadores realizaron evaluaciones independientes, convergiendo después para consensuar las categorías identificadas.

Se seleccionaron las tres editoriales de mayor influencia en el ámbito escolar andaluz, seleccionando el texto más predominante en las aulas de la comunidad autónoma bajo la vigencia de la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, LOMCE (MECD, 2014). Dado que el estudio está centrado en el último ciclo de Educación Primaria (quinto y sexto), la muestra analizada estuvo formada por seis libros de texto, perteneciendo los textos T1 y T2 a los manuales de quinto y sexto de primaria respectivamente de la primera editorial analizada, los textos T3 y T4 a la segunda editorial analizada y los textos T5 y T6 a la tercera editorial que compone nuestra muestra.

RESULTADOS

En primer lugar, en cada uno de los textos, se identificaron y cuantificaron las definiciones, ejemplos y actividades relacionadas con la probabilidad en cada libro, cuya distribución se recoge

en la Tabla 1. En el ámbito de las actividades, el 54% se orienta hacia el enfoque clásico y el 36% al intuitivo. Se observa que los textos T1 y T2 destacan por desarrollar los enfoques intuitivo y clásico de la probabilidad, especialmente en el quinto curso, donde la proporción de actividades respecto a las definiciones y ejemplos es notablemente alta. Aunque introduce el enfoque frecuencial en el sexto curso, el enfoque subjetivo está completamente ausente. En el caso de los manuales T3 y T4 se observa, un elevado número de actividades asociadas al significado clásico frente al resto; a diferencia del resto de editoriales, en este caso los libros de texto, tanto para quinto como para sexto curso, recogen actividades relacionadas con el resto de los significados. Por último, mientras que el texto T5 predomina el enfoque clásico sobre el intuitivo, en T6 hay un mayor número de actividades relacionadas con el enfoque intuitivo; sin embargo, se deja a un lado el significado subjetivo.

Para abordar el objetivo de esta investigación, a continuación, se realiza un análisis de los tres objetos matemáticos descritos en el marco teórico, cada uno en relación con los distintos significados de la probabilidad. Estos objetos matemáticos incluyen las situaciones-problema (SP), el lenguaje asociado a la probabilidad y los conceptos fundamentales de la probabilidad. Este análisis permitirá una comprensión más profunda de cómo está presente el significado de la probabilidad (intuitivo, clásico, subjetivo y frecuencial) en los manuales del último ciclo de Educación Primaria.

Tabla 1.
Distribución de los significados de la probabilidad según editorial, curso y contenido

Código	Curso	Contenido	Intuitivo	Clásico	Frecuencial	Subjetivo	Total
T1	5°	Defs./Ejmps.	2	2	0	0	4
		Acts.	14	14	0	0	28
T2	6°	Defs./Ejmps.	2	3	1	0	6
		Acts.	7	16	3	1	27
T3	5°	Defs./Ejmps.	1	1	1	0	3
		Acts.	8	13	3	2	26
T4	6°	Defs./Ejmps.	0	1	0	0	1
		Acts.	2	11	1	1	15
T5	5°	Defs./Ejmps.	2	1	0	0	3
		Acts.	3	8	1	0	12
T6	6°	Defs./Ejmps.	2	1	0	0	3
		Acts.	16	13	2	0	31
Total			59	84	13	4	160

Situaciones-problemas asociadas a los significados de la probabilidad

En primer lugar, se analizaron las situaciones problema (SP) relacionadas con cada uno de los significados de la probabilidad, estableciéndose dos categorías para el significado intuitivo (SPI), cinco para el clásico (SPC), dos para el subjetivo (SPS) y una para el frecuencial (SPF). A continuación, se detallan cada una de ellas:

SPI1. Manifestar el grado de creencia de que ocurran los sucesos. Se han clasificado en esta categoría aquellos enunciados enfocados en describir sucesos atendiendo a los tipos de sucesos. A modo de ejemplo, en la actividad de quinto del texto T1 se solicita identificar tres tipos de sucesos atendiendo al grado de creencia de que ocurran: “Considera la experiencia elegir al azar un compañero de mi clase y escribe un suceso posible, otro seguro y otro imposible” (T1, p.68).

SPI2. Determinar sucesos aleatorios y deterministas. Se consideran aquellas tareas donde se requiere diferenciar los términos de aleatoriedad y no aleatoriedad (determinista), por ejemplo:

De las siguientes experiencias, ¿cuáles son aleatorias?

- a) Sacar hielo del congelador y observar si se derrite.
- b) Calentar un cazo y observar si la temperatura del agua sube
- c) Girar una ruleta y observar el resultado (T1, p.62)

SPC1. Determinar el espacio muestral. Se han contemplado aquellas actividades en las que se solicita la obtención de todos los posibles resultados que se pueden obtener en la realización de un experimento aleatorio, por ejemplo: “Paula tiene en su armario un jersey rojo, uno azul y uno verde, y también tiene un pantalón azul, otro pantalón marrón y una falda rosa. ¿De cuántas formas posibles puede vestirse Paula?” ([T3], p.218)

SPC2. Cálculo de probabilidades. Esta categoría abarca las tareas centradas en la cuantificación de la probabilidad haciendo uso del enfoque clásico. A modo de ejemplo en la siguiente tarea, extraída de T2 (p.212) se observa que el experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de un dado, considerando que todos los posibles sucesos son equiprobables, se espera que los/as estudiantes utilicen la regla de Laplace con objeto de obtener tanto la fracción como la representación decimal de esta.

En la experiencia lanzar un dado, calcula la probabilidad, mediante una fracción y un número decimal, de estos sucesos

- a) Salir par
- b) Salir menos de 4.
- c) Salir impar.
- d) Obtener un 3.
- e) Salir más de 4.
- f) Salir 7.

SPC3. Comparación de probabilidades. Se consideran aquellas tareas en las que se debe establecer una comparativa entre dos o más probabilidades con objeto de identificar si existe mayor o menor probabilidad de que ocurra un suceso. A modo de ejemplo, [T6] recoge “Andrés, Laura y Carmen están jugando con una baraja española de 40 cartas. Andrés gana con una figura, Laura con un oro y Carmen con un as. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?” (p.156).

SPC4. Estimación de la probabilidad a partir de sucesos anteriores. A diferencia de la categoría SPC2, que involucra calcular probabilidades para un experimento aún no realizado, SPC4 incluye tareas que requieren calcular la probabilidad de un evento después de haberse llevado a cabo el experimento. Un ejemplo de esto se ilustra en la Figura 2, donde se presenta una tabla con los resultados de un partido de fútbol. A partir de estos datos recopilados, se solicita el cálculo de las probabilidades.

Figura 2.

Ejemplo de actividad asociada a la estimación de la probabilidad a partir de sucesos anteriores

Observa los goles conseguidos por Celia en 10 partidos jugados.

Partidos	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º
Tiros realizados	5	6	4	6	7	3	7	6	8	8
Goles conseguidos	2	1	0	3	1	1	0	2	1	1

a) ¿Cuál es la probabilidad de que meta gol en su próximo disparo?

Fuente: [T2] (p.213)

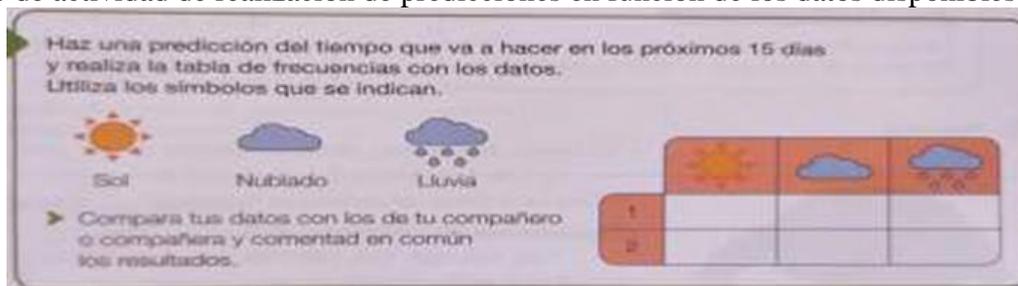
SPC5. Determinar si un juego de probabilidad es o no justo. Las tareas clasificadas en esta categoría se centran en analizar la equidad en juegos de probabilidad, considerando si los eventos relacionados con un experimento poseen la misma probabilidad de ocurrir. Este análisis incluye tareas que invitan a reflexionar sobre la imparcialidad de los juegos de azar. Un ejemplo de ello es la sexta actividad de la sección [T2] (p.227), que introduce un juego entre Pedro y Bruno con una bolsa de tarjetas numeradas del 1 al 20. El juego determina que Pedro gana si se extrae un divisor

de 20, y también si el número es mayor que 10. Ante esta situación, se formula la pregunta de si este juego es justo y se solicita una explicación al respecto.

SPS1. Hacer predicciones en función de los datos disponibles. Esta categoría se enfoca en la realización de predicciones basadas en los datos disponibles. Un ejemplo de tarea clasificada bajo esta categoría se ilustra en la Figura 3, donde se presenta una actividad que reta al estudiante a aplicar su entendimiento sobre las condiciones meteorológicas que podrían presentarse en los próximos 15 días. Esta tarea no solo implica hacer una predicción sino también fomenta el debate entre los estudiantes. A través de esta discusión, se espera que los estudiantes reflexionen sobre si sus predicciones coinciden o difieren y exploren las razones detrás de sus conclusiones.

Figura 3.

Ejemplo de actividad de realización de predicciones en función de los datos disponibles



Fuente: [T3] (p.225)

SPS2. Estudiar sucesos en los que la probabilidad va a depender de las experiencias individuales. La categoría SPS2 aborda el estudio de eventos cuya probabilidad se influencia por experiencias personales. Un ejemplo de tarea bajo esta clasificación es la actividad extraída del texto T3 en la que se plantea la pregunta: "¿Cuál es el número máximo de veces que se debe lanzar un dado para garantizar la repetición de cualquier resultado?" ([T3], p.231).

SPF1. Predicción de tendencias en experimentos aleatorios en función de los datos obtenidos. La categoría SPF1 se centra en la predicción de tendencias a partir de experimentos aleatorios, utilizando los datos recabados. Estas actividades están diseñadas para que el estudiante, una vez completado el experimento, pueda estimar la probabilidad asociada a un evento específico. Un ejemplo característico de esta es: "Lanza un dado 20 veces y registra en una tabla de frecuencias los resultados obtenidos. Identifica cuál ha sido el resultado que más veces apareció (frecuencia absoluta) y cuál tiene la mayor frecuencia relativa" ([T3], p.225).

La Tabla 2 muestra la presencia de las diferentes situaciones-problemas presentes en los libros de texto que conforman la muestra según los distintos significados de la probabilidad. Se

observa que existe un consenso en el desarrollo del grado de ocurrencia y en el cálculo de probabilidades mediante el enfoque clásico. Sin embargo, se nota una carencia en el tratamiento de los enfoques subjetivo y frecuencial, fundamentales para la aplicación práctica y el análisis crítico, lo que sugiere la necesidad de incorporar un análisis más profundo y reflexivo basado en datos.

Entre las editoriales analizadas, los textos T3 y T4 destacan porque trata todos los significados de la probabilidad, cubriendo todos los aspectos identificados en la muestra. Le sigue T5 y T6 en cuanto a la diversidad de significados tratados, mientras que T1 y T2, aunque cubre una amplia gama, no incluye tareas de naturaleza subjetiva. También podemos observar que todas las editoriales, a lo largo de los diferentes cursos, dan importancia tanto a la probabilidad intuitiva como al cálculo de probabilidades, indicando un consenso sobre la relevancia de estos conceptos básicos en la educación primaria. Además, se destaca que T1 y T2 pone un especial énfasis en la diferenciación entre sucesos aleatorios y deterministas, una aproximación que no es tan destacada en los materiales de las otras editoriales. Por otro lado, T5 y T6 no solo se centra en el cálculo de probabilidades, sino que también aborda la comparación de probabilidades, demostrando un enfoque más analítico en su método de enseñanza de este tema.

Tabla 2.

Tabla resumen de las situaciones problemas en los libros de texto

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Intuitivo						
SPI1. Manifestar el grado de creencia de que ocurran los sucesos	X	X	X	X	X	X
SPI2. Determinar sucesos aleatorios y deterministas	X	X				X
Clásico						
SPC1. Determinar el espacio muestral	X	X		X		
SPC2. Cálculo de probabilidades	X	X	X	X	X	X
SPC3. Comparación de probabilidades				X	X	X
SPC4. Estimación de la probabilidad a partir de sucesos anteriores (También frecuencial)		X				X
SPC5. Determinar si un juego de probabilidad es o no justo			X			X
Subjetivo						
SPS1. Hacer predicciones en función de los datos disponibles			X	X		
SPS2. Estudiar sucesos en los que la probabilidad va a depender de las experiencias individuales			X			X
Frecuencial						
SPF1. Predicción de tendencias en experimentos aleatorios en función de los datos obtenidos			X	X	X	X

Lenguaje asociado a los significados de la probabilidad

La siguiente variable que se analizó fue el lenguaje, la cual juega un papel determinante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y en el desarrollo del razonamiento probabilístico. Además, en Godino et al. (2007) se resalta que el lenguaje matemático es fundamental en el EOS, ya que es un elemento representacional y operativo que se pone en juego cuando se intentan dar respuesta a las diferentes situaciones problemas.

Al analizar el lenguaje se encontró, por un lado, la presencia de un lenguaje cotidiano para referirse a la probabilidad con expresiones como adivinar, acertar, sin mirar, predecir, creer, etc. Por otro lado, se identificó que ciertas expresiones lingüísticas se alinean con los distintos significados atribuidos a la probabilidad. Por ejemplo, términos como suceso seguro, posible, probable, imposible, y azar se asocian al significado intuitivo de la probabilidad, mientras que el significado clásico se caracteriza por un vocabulario más especializado, incluyendo cálculo de probabilidades, espacio muestral, y lanzar una moneda. En referencia al significado frecuencial podemos asociar expresiones como frecuencia absoluta, frecuencia relativa, repeticiones, observar o predecir y en alusión al significado subjetivo expresiones como crees, próximos o no asegurar.

En cuanto a los tipos de números, resaltar que predominan los números naturales para trabajar todos los significados de la probabilidad, los números fraccionarios y decimales tienen una mayor presencia en el significado clásico de la probabilidad y sobre todo en el cálculo de probabilidades, aunque los números fraccionarios también se utilizan para el cálculo de las frecuencias relativas propias del significado frecuencial.

Además, estos lenguajes coexisten con un lenguaje simbólico, relacionado fundamentalmente con el significado clásico de la probabilidad y que está presente en el cálculo y comparación de la probabilidad. Entre los símbolos encontrados destacamos [P] como abreviatura del término probabilidad, [P(S)] para referirnos a la probabilidad de un suceso, [E] como abreviatura de espacio muestral, símbolos que se identifican con las operaciones aritméticas como son [(+), (=) y (/)], símbolos que aluden a la comparación de probabilidades como [(>), (=), (<)] y símbolos que hacen referencia a las diferentes formas de expresar la probabilidad [(3/6), (0,5) y (50 %)].

Igualmente nos encontramos con un lenguaje tabular relacionado fundamentalmente con el significado frecuencial de la probabilidad mediante la construcción de tablas de frecuencias y tablas relacionadas con el significado clásico de la probabilidad y en concreto con la construcción

del espacio muestral. Destacar que los textos T5 y T6 no recogen tablas mientras trabaja la probabilidad, en los textos T3 y T4 aparecen con el fin de trabajar el significado frecuencial de la probabilidad y en especial mención a las frecuencias relativas y la editorial de los manuales T1 y T2 es la que más tablas utiliza, ya sea para trabajar el significado frecuencial de la probabilidad con frecuencias absolutas, el significado clásico para el cálculo de la probabilidad estimada o la construcción del espacio muestral con tablas en columnas y tablas de doble entrada y la probabilidad intuitiva con la organización de la información en una tabla para trabajar los sucesos aleatorios y deterministas.

Finalmente, resaltar que en las tres editoriales analizadas hacen un uso residual del lenguaje gráfico para trabajar la probabilidad. En todas ellas, el tema de la probabilidad se enseña junto a la estadística y aunque hay un apartado del tema específico que hace referencia a los gráficos en estadística, ninguna editorial establece ninguna conexión con la probabilidad.

Conceptos asociados a los significados de la probabilidad

En la construcción del conocimiento matemático que se pone en juego en la resolución de las situaciones-problemas, el estudio de los conceptos matemáticos adquieren un papel relevante. Dentro del contexto de la Educación Primaria, estos conceptos suelen ser introducidos de manera implícita, a menudo a través de ejemplos que emplean un lenguaje cotidiano. De acuerdo con Skemp (1980), la introducción de los conceptos matemáticos debería realizarse por medio de ejemplos prácticos seguidos de ejercicios, sin recurrir a definiciones formales desde el inicio.

Los libros de texto analizados presentan una extensa gama de conceptos matemáticos clave, especialmente en lo que respecta a su aplicación en el estudio de la probabilidad. Entre estos conceptos, se enfatiza la importancia de diferentes tipos de números, fundamentales para entender plenamente las diversas nociones ligadas a la probabilidad. Las fracciones, en particular, reciben una atención destacada, siendo ampliamente discutidas en textos de tres diferentes editoriales. En contraste, la mención de decimales y porcentajes es notablemente más limitada, apareciendo exclusivamente en el T2. Además, se abordan los diferentes tipos de sucesos — simples/elementales y compuestos— cuando se trabaja el significado intuitivo y clásico.

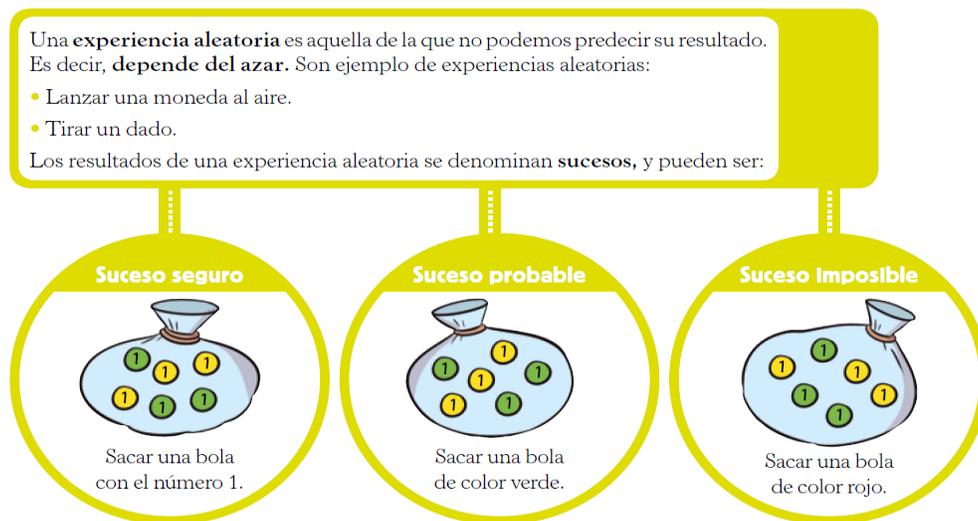
Para analizar los conceptos (C) en el ámbito de la probabilidad, se definieron diversas categorías correspondientes a cada uno de los significados de la probabilidad: Intuitivo (CI), Clásico (CC), Subjetivo (CS) y Frecuencial (CF). La clasificación que se muestra a continuación

ha permitido identificar y examinar cómo se presentan y desarrollan los conceptos fundamentales de la probabilidad en los materiales educativos para la primaria.

CII. Azar y aleatoriedad. El azar y la aleatoriedad son conceptos profundamente interconectados que abordan la naturaleza impredecible de ciertos sucesos. El azar se describe como la cualidad inherente a un evento cuyo resultado no se puede prever, como ilustra el texto T5 con el lanzamiento de un dado, donde el resultado es incierto debido a la naturaleza aleatoria del acto ([T5], p.144). Mientras que la aleatoriedad amplía esta idea, refiriéndose a la imposibilidad de predecir el resultado de un evento debido a la intervención del azar. A modo de ejemplo, en la Figura 4 se observa que el manual T2 introduce dicho concepto asociando ambos conceptos y conectándolos con los conceptos de los tipos de sucesos (descritos en CI2).

CI2. Suceso imposible, posible/probable y seguro. Un suceso posible se define como aquel que puede ocurrir bajo determinadas condiciones. En contraposición, un suceso imposible es aquel que no se materializa en ninguna circunstancia, y un suceso seguro se distingue por su ocurrencia garantizada en cada situación. Esta clasificación se mantiene constante en las tres editoriales, salvo por la excepción del texto T4.

Figura 4.
Ejemplo de actividad para trabajar el concepto de aleatoriedad



Fuente: [T2] (p.210)

CI3. Posibilidad y grado de ocurrencia. La posibilidad de ocurrencia se aborda en la editorial de los textos T1 y T2 y en la editorial de los textos T3 y T4, resaltando esta última el análisis de la probabilidad de que ocurran diversos sucesos, describiéndolos como más probables

o menos probables (a modo de ejemplo, véase Figura 5). Este enfoque promueve un entendimiento intuitivo entre los estudiantes acerca de que ciertos sucesos poseen una posibilidad de ocurrencia distinta en comparación con otros. Sin embargo, el grado de ocurrencia no se menciona de manera explícita en los textos revisados.

Figura 5.

Ejemplo de actividad sobre posibilidad (o grado) de ocurrencia

1 Observa cada situación y escribe cada frase en tu cuaderno completándola con la expresión adecuada.

más probable

igual de probable

menos probable



- Salir el color rojo es ... que salir el color verde.
- Salir el color verde es ... que salir el color morado.
- Salir el color amarillo es ... que salir el color morado.
- El color amarillo es el color ... y el rojo es el color ...

Fuente: [T3] (p.220)

Los conceptos asociados al significado clásico de la probabilidad sobresalieron en número en comparación con otros enfoques de la probabilidad. Este predominio se debe, en gran medida, a que el enfoque clásico incorpora una amplia gama de conceptos, compartiendo algunos básicos con otros significados de la probabilidad, como, por ejemplo, azar, aleatoriedad, sucesos simples/elementales y compuestos, entre otros. Los conceptos analizados son:

CC1. Espacio muestral. En el ámbito clásico de la probabilidad, el concepto de espacio muestral es fundamental, ya que engloba todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Esta definición proporciona una base sobre la cual se pueden calcular las probabilidades de diferentes eventos. La Figura 6 ilustra esta idea utilizando el experimento del lanzamiento de un dado para clarificar la definición de espacio muestral y, a partir de ahí, explicar la naturaleza de un suceso.

CC2. Casos favorables y casos posibles. En el contexto de la probabilidad, los casos favorables se refieren a aquellos sucesos que son pertinentes o deseables según el experimento en cuestión, mientras que los casos posibles engloban todos los sucesos elementales que pueden ocurrir, es decir, son todos los sucesos que forman el espacio muestral. A partir de dichos conceptos, la Regla de Laplace nos proporciona una manera cuantitativa de calcular la probabilidad de un evento, pues se define como el cociente entre el número de casos favorables

sobre el número de casos posibles, bajo la condición de que todos los sucesos simples en el espacio muestral sean equiprobables. A modo de ejemplo, la Figura 7 muestra la definición asociada a la Regla de Laplace.

Figura 6.

Definición de espacio muestral

Ten en cuenta

El conjunto de todos los resultados posibles de una experiencia se denomina **espacio muestral** y se representa por la letra **E**.

En la experiencia lanzar un dado, el espacio muestral es:

$$E = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Los subconjuntos del espacio muestral se llaman sucesos.

Salir impar = (1, 3, 5)

Fuente: [T2] (p.212)

CC3. Suceso contrario. En el contexto del significado clásico de la probabilidad, el concepto de suceso contrario se define como el conjunto de todos los resultados posibles del espacio muestral excluyendo aquellos que pertenecen al suceso de interés. Para calcular su probabilidad, se puede restar la probabilidad del suceso de interés de la unidad, o bien, se determina la proporción entre el número de casos que no corresponden al suceso de interés (casos desfavorables) y el total de casos posibles. Teniendo en cuenta el ejemplo recogido en el texto T3, se tiene que, si la probabilidad de extraer un caramelo de menta es de ocho quinceavos, puede obtenerse como resultado de la diferencia $1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$ o alternativamente, como el cociente entre 7 (número de caramelos que no sean de menta) y 15 (número total de caramelos).

En una bolsa hay 15 caramelos, de menta y de otros sabores. La probabilidad de sacar un caramelo de menta es de ocho quinceavos. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caramelo que no sea de menta? [T3] (p.223)

Figura 7.

Definición de Regla de Laplace o de casos favorables/posibles

Probabilidad de un suceso

Para hallar la probabilidad de un suceso, se divide el número de casos favorables entre el número de casos posibles.

¿Cuál es la probabilidad de que Ainhoa saque bola roja?

- Casos favorables: 3
- Casos posibles: 7

La probabilidad es: $\frac{3}{7}$

Probabilidad de un suceso: $P = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$



Fuente: [T1] (p.64)

CC4. *Suceso independiente y dependiente, probabilidad condicionada.* Los sucesos independientes se caracterizan por no afectar la probabilidad de ocurrencia de otros eventos, a diferencia de los sucesos dependientes, donde la ocurrencia de un evento específico tiene un impacto directo en la probabilidad de otro. Un ejemplo claro de suceso dependiente es cuando la extracción de una bola roja, sin su posterior reposición, altera la probabilidad de extraer otra bola roja. La actividad extraída del texto T4 pone de relieve el concepto de probabilidad condicionada, donde la probabilidad de extraer la segunda tarjeta roja está condicionada por el resultado de la primera extracción. Esta relación demuestra cómo el resultado previo puede influir en la probabilidad de eventos futuros, subrayando la interconexión entre sucesos dependientes y la aplicación de la probabilidad condicionada.

En una bolsa hay 10 tarjetas verdes y 5 tarjetas rojas. Se van sacando tarjetas al azar y no se devuelve. Calcula la probabilidad de que: 1) La primera tarjeta sea verde. 2) Si la primera ha sido roja, la segunda también lo sea. [T4] (p.229)

CC5. *Juego justo.* El concepto de “juego justo” se refiere a aquel en el que todos los participantes tienen igualdad de condiciones y oportunidades para ganar. La evaluación de las probabilidades de ganar es importante para determinar la equidad del juego. Teniendo en cuenta la actividad extraída de T4, Pedro gana si extrae un divisor de 20, mientras que Bruno gana si saca un número par superior a 10. Para determinar si es un juego justo, se analizan las probabilidades de ganar de cada jugador (casos favorables asociados a cada jugador). Se puede concluir que el juego no es justo porque Pedro tiene más opciones de ganar (6) frente a Bruno (5).

Pedro y Bruno tienen una bolsa con tarjetas numeradas del 1 al 20. Sacan un número al azar. Gana Pedro si sale un divisor de 20 y Gana Bruno si sale un número par mayor que 10. 1) ¿Es un juego justo?, ¿Por qué? 2) ¿Qué probabilidad hay de que ganen los dos?, ¿Y de que no gane ninguno? [T4] (p.227)

Referente al significado subjetivo, el cual apenas encuentra lugar en la editorial de los textos T1 y T2 y tiene una presencia casi residual en la editorial de los textos T5 y T6, los pocos conceptos que se han puesto en juego son los dos ejemplos que se presentan a continuación, obtenidos de la editorial de los textos T3 y T4.

CS1. Suceso incierto. Se define como aquel cuyo resultado no puede determinarse de antemano con certeza y, por consiguiente; esto implica que, dependiendo de las experiencias personales, cada aprendiz puede asignarle una probabilidad distinta. Por ejemplo, en la actividad que se plantea en T3, “¿Cuántas veces hay que tirar un dado, como máximo, para asegurar que se repite un resultado?” ([T3], p. 231), los estudiantes, basándose en su experiencia, especificarán cuántas veces es necesario lanzar un dado para garantizar la repetición de un resultado.

CS2. Probabilidad como creencia personal. La probabilidad como creencia personal se refiere a la percepción que cada individuo tiene sobre la posibilidad de que un determinado suceso ocurra. Esta creencia se basa en la experiencia previa de cada individuo, de la información que posea, de la propia intuición o de los sesgos que cada discente posea. En este sentido, la probabilidad como creencia personal no necesariamente está respaldada por el cálculo matemático riguroso, sino que se podría considerar como una estimación subjetiva de la posibilidad de que pueda ocurrir un determinado suceso. Por ejemplo, en la actividad presentada en la Figura 3 el alumnado debe predecir el clima apoyándose en sus propias creencias. Resulta importante subrayar que las predicciones de los alumnos no serán numéricas, permitiendo así que cada estudiante aporte una visión distinta basada en su interpretación individual.

En relación con el enfoque frecuencial del significado de probabilidad, es importante destacar que en la editorial de los manuales T5 y T6 se centran en conceptos vinculados a la ejecución de ensayos repetitivos y la estimación de probabilidades basada en los resultados de ensayos previos. Por otro lado, en el resto de los manuales, se detalla el procedimiento para calcular frecuencias absolutas y relativas, apoyándose, en ocasiones, en la construcción de tablas.

CF1. Frecuencia absoluta/ Frecuencia relativa. La frecuencia absoluta se refiere al número de veces que se repite un valor específico dentro de un conjunto de datos. Por otro lado, la frecuencia relativa se refiere a la proporción o porcentaje de veces que se repite un valor específico en relación con el total de datos en el conjunto, es decir, se calcula dividiendo la frecuencia absoluta entre el tamaño total de la muestra. A modo de ejemplo, el T3 propone una actividad en el que se pide a los estudiantes lanzar un dado 20 veces y registrar los resultados en

una tabla de frecuencias. Dado el limitado número de lanzamientos requeridos, es probable que cada estudiante genere una tabla de frecuencias con resultados considerablemente variados, promoviendo un análisis crítico sobre la variabilidad de los datos y discutir sobre las probabilidades teóricas frente a las observadas.

Realiza y contesta.

Lanza un dado 20 veces y haz la tabla de frecuencia con los números que has obtenido como resultados.

- ¿Cuál ha sido el resultado con mayor frecuencia absoluta? ¿Y relativa?
- ¿Coinciden tus resultados con los de tus compañeros? [T3] (p.224)

CF2. Ensayos repetidos. Los ensayos repetidos hacen referencia a la repetición de un mismo experimento aleatorio bajo las mismas condiciones. Esta técnica es fundamental para recopilar información, que posteriormente se utiliza para determinar patrones de comportamiento o tendencias en situaciones de aprendizaje. En el libro T5 (véase Figura 8), se destaca este concepto mediante ejercicios prácticos como el lanzamiento repetido de un dado o una moneda, proporcionando situaciones para una mejor comprensión sobre los fenómenos aleatorios y el desarrollo de un enfoque más intuitivo hacia la probabilidad.

Figura 8.

Ejemplo de actividad sobre ensayos repetidos

- 1 Por parejas, lanzad un dado 10 veces. Anotad los resultados.
 - ¿Cuántas veces ha salido un número par?
 - ¿Cuántas veces ha salido un número menor que 3?
 - ¿Cuántas veces ha salido el número 8?
 - ¿Cuántas veces ha salido un número del 1 al 6?Ahora, comparad vuestros resultados con los de otra pareja.



Fuente: [T5] (p.144)

CF3. Probabilidad estimada. La probabilidad estimada representa una técnica utilizada para predecir la ocurrencia de un evento específico, basándose en la información obtenida de experiencias previas. En el texto T2 se incorpora la definición apoyándose en la información recogida en una tabla en la que se resume el rendimiento de una niña en baloncesto durante los últimos cinco primeros partidos, contabilizando el número de canastas logradas frente al total de intentos (véase Figura 9). A partir de la frecuencia de estos eventos, se ilustra cómo calcular la probabilidad estimada de que la niña enceste en su próxima oportunidad, proporcionando un

ejemplo práctico de cómo se puede aplicar este concepto para hacer inferencias basadas en el rendimiento pasado.

Con objeto de tener una visión más completa, la Tabla 3 sintetiza los conceptos de probabilidad examinados, diferenciados por editorial y nivel educativo. Resalta la variedad de conceptos tratados, evidenciando, de forma general, una notable coherencia en la impartición de los conceptos fundamentales de la probabilidad en todas las editoriales y cursos. Aspectos como el azar, la aleatoriedad, y la clasificación de los sucesos en imposibles, posibles/probables y seguros son abordados frecuentemente, estableciendo una sólida base intuitiva para el aprendizaje de la probabilidad. Sin embargo, se observa una menor frecuencia en la exploración de conceptos tales como la posibilidad y el grado de ocurrencia. En lo que respecta al enfoque clásico, la cobertura uniforme de temas clave como sucesos posibles y favorables, la Regla de Laplace, y la conceptualización del espacio muestral refuerza un método de enseñanza enfocado y estructurado que proporciona a los estudiantes las herramientas necesarias para comprender e implementar el enfoque teórico de la probabilidad.

Figura 9
Definición de probabilidad estimada

En ciertas situaciones se pueden estimar la probabilidad a partir de los datos recogidos en experiencias anteriores. Observa la estadística de tiros de tres puntos encestados por Yaiza en los primeros cinco partidos jugados:

Partidos	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	Total
Tiros lanzados	13	10	15	10	12	60
Canastas	10	8	11	8	8	45

Con estos datos podemos hacer una estimación de la probabilidad que tiene de acertar su próximo lanzamiento de tres puntos:

$$\text{Probabilidad estimada} = \frac{\text{N.º de canastas}}{\text{N.º de tiros lanzados}} = \frac{45}{60} = 0,75$$

La probabilidad estimada de que acierte el próximo tiro es de 0,75.
La probabilidad estimada es más fiable cuantos más datos contabilicemos.



Fuente: [T2] (p.213)

Tabla 3.

Tabla resumen de los conceptos presentes en los libros de texto

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Intuitivo						
CI1. Azar y aleatoriedad	X	X	X		X	X
CI2. Suceso imposible, posible/probable y seguro	X	X	X		X	X
CI3. Posibilidad, grado de ocurrencia	X		X	X	X	X
Clásico						
CC1. Espacio muestral	X	X	X	X	X	X
CC2. Casos favorables y casos posibles	X	X	X	X	X	X
CC3. Suceso contrario	X	X	X	X	X	
CC4. Casos independiente y dependiente, probabilidad condicionada.	X	X	X	X	X	X
CC5. Juego justo			X	X		X
Subjetivo						
CS1. Suceso incierto			X			X
CS2. Probabilidad como creencia personal			X	X		
Frecuencial						
CF1. Frecuencia absoluta/Frecuencia relativa	X		X	X		
CF2. Ensayos repetidos			X	X	X	X
CF3. Probabilidad estimada		X	X		X	X

CONCLUSIÓN

El análisis de los libros de texto permite identificar las tendencias predominantes en la enseñanza de conceptos específicos, como, por ejemplo, la probabilidad. Este enfoque analítico sobre los libros de texto es indispensable para comprender cómo se introducen y desarrollan los conceptos matemáticos a lo largo de la Educación Primaria y la Educación Secundaria (Castro-Fernández et al., 2023; Díaz-Levicoy et al., 2019; Gómez et al., 2015). La evaluación de cómo se presentan los diferentes significados de la probabilidad en estos materiales educativos puede revelar la efectividad de distintos métodos pedagógicos y su alineación con los avances teóricos y las mejores prácticas en la enseñanza de la matemática. Además, puede proporcionar directrices valiosas para la selección de recursos didácticos y el diseño curricular, asegurando que los estudiantes reciban una formación matemática integral y coherente que respalde su desarrollo académico y personal.

Nuestro estudio se centra en el análisis de libros de texto de Educación Primaria, contextualizados bajo la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, LOMCE; (MECD, 2014). Los resultados muestran una discrepancia entre las directrices pedagógicas oficiales de esta ley, que promueven un enfoque práctico y vivencial en la enseñanza de la probabilidad (Vásquez

y Alsina, 2014). Este enfoque se alinea con las recomendaciones de Alsina et al. (2020), quienes destacan la importancia de integrar situaciones cotidianas y el uso de tecnologías de información y comunicación (TIC) en el proceso educativo. Sin embargo, observamos una marcada divergencia entre estas intenciones pedagógicas y las prácticas efectivas reflejadas en los libros de texto examinados. A pesar de que nuestra investigación se enmarca en el periodo de vigencia de la LOMCE, cabe destacar que la normativa educativa actual (MEFP, 2022) mantiene una alineación general con los principios de la ley precedente. Además, es importante resaltar la discrepancia existente con las recomendaciones de iniciar el aprendizaje de la probabilidad desde edades tempranas, ya que se traslada la introducción de estos contenidos al segundo ciclo de la Educación Primaria.

Del análisis se puede concluir que el significado de la probabilidad que más se trabaja en el último ciclo de primaria es el clásico, seguido del significado intuitivo, siendo la presencia de los significados frecuencial y subjetivo prácticamente residual. Por otra parte, cabe destacar que la editorial de los textos T3 y T4 fue la que presentó la mayor variedad de significados de la probabilidad, abarcando la probabilidad intuitiva, clásica, subjetiva y frecuencial. Le siguen los libros T5 y T6, que también trabajaron todos estos enfoques, aunque la probabilidad subjetiva solo aparece en un ejercicio. En los textos T1 y T2, en cambio, no se abordó la probabilidad subjetiva.

Respecto a las situaciones-problemas, las referidas al significado intuitivo de la probabilidad se centraron en expresar los grados de creencia de que ocurra un determinado suceso y en la diferenciación entre los sucesos aleatorios y deterministas. Las que más presencia tuvieron fueron las asociadas al significado clásico, siendo las más abundantes el cálculo y la comparación de probabilidades. En el resto de las editoriales se aborda la evaluación de la equidad de los juegos de probabilidad, determinando si son justos o no. Las situaciones-problemas que hacen referencia al significado subjetivo, en T5 y T6, se centraron en hacer predicciones en función de los datos disponibles y en estudiar sucesos en los que la probabilidad va a depender de las experiencias individuales y las situaciones problemas referidas al significado frecuencial iban enfocadas a la predicción de tendencias a partir de los datos obtenidos.

Resaltar la importancia del lenguaje en todos los significados de la probabilidad, ya que se utiliza una gran variedad de expresiones cotidianas que son muy valiosas para determinar el significado de la probabilidad que se quiere transmitir al alumnado. En cuanto al lenguaje numérico, la editorial que mejor lo trabaja es la correspondiente a T1 y T2, ya que presenta la

probabilidad en fracción, decimal y porcentaje. Sin embargo, uno de los grandes inconvenientes encontrados en el análisis es que la presencia del lenguaje tabular y de los gráficos es muy escasa y poco relevante, apareciendo como un contenido propio de la estadística y desligado de la probabilidad.

Para concluir, en referencia a los conceptos relacionados con la probabilidad que aparecen en los libros de texto analizados, estos se presentaron bien mediante ejemplos, sin profundizar en una terminología probabilística, o bien de una forma muy intuitiva, sin una explicación ni ejemplificación formal, lo cual puede provocar que aparezcan conflictos semióticos, sesgos o heurísticas en nuestro alumnado.

A pesar de las recomendaciones académicas, encontramos que los textos dependen en exceso de ejemplos relacionados con juegos de azar y es poco variado. Esta aproximación, aunque inicialmente puede resultar atractiva para los estudiantes, corre el riesgo de limitar su capacidad para relacionar los conceptos de probabilidad con su entorno inmediato y sus experiencias diarias. Tal enfoque puede no solo disminuir el interés del estudiante en la probabilidad, sino también generar una predisposición negativa hacia el aprendizaje matemático en su conjunto.

Además, la integración de las TIC, esencial para el aprendizaje de la aleatoriedad y conceptos asociados al significado frecuencial de la probabilidad mediante simulaciones (Ramírez y Batalha, 2020) es notoriamente insuficiente y se debería de promover el uso de las TIC en la enseñanza de la probabilidad, puesto que va a permitir que en el aula se generen dinámicas favorecedoras del uso de un lenguaje probabilístico a la vez que se va a promover el razonamiento estocástico del alumnado (Beltrán-Pellicer et al., 2020).

Aunque los libros de texto presentan una variedad de interpretaciones de la probabilidad, la predominancia del significado clásico sobre los demás y la falta de conexiones claras entre estos distintos significados pueden conducir a un sesgo de equiprobabilidad en los estudiantes. Este sesgo se caracteriza por la errónea suposición de que todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrir, un concepto que se distancia notablemente de la comprensión profunda y aplicada de la probabilidad en contextos reales y diversificados.

La presente investigación ofrece una contribución significativa al campo de la Didáctica de la Estadística, completando la escasez de estudios en esta línea (Díaz–Levicoy et al., 2024). A pesar de que este análisis se centra únicamente en tres editoriales destacadas y se enfoca exclusivamente en los últimos cursos de la Educación Primaria, este estudio facilita la

identificación de la manera en que se trata el tema de la probabilidad antes de su introducción más formal en Educación Secundaria. Además, sirve de fundamento para investigaciones futuras sobre la eficacia de diversas metodologías de enseñanza de la probabilidad. Siguiendo la línea de Gómez, Batanero et al. (2014), el impacto de un libro de texto se ve influenciado tanto por el lector como por el profesor, y no solo por el contenido del libro en sí. A pesar de la importancia del texto en el proceso educativo, recae finalmente en el docente la responsabilidad de elegir los recursos y metodologías más apropiados, siendo necesario que este posea un conocimiento adecuado que permita analizar críticamente los libros de texto. Este estudio puede guiar a futuros educadores en la selección de materiales que mejor se adapten a sus necesidades educativas.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 y HUM-886 (Junta de Andalucía, España)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, Á. y García I. (2023). La estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de maestros en España. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 6(2), 11-27.
- Alsina, Á. y Vásquez, C. (2015). La enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria: el currículo vs el libro de texto. En P.A. Sánchez (Ed.), *17 Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. JAEM.
- Alsina, Á., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez Muñiz, L.J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Epsilon*, 104, 99-128.
- Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2008). Probabilidad. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en Educación Primaria* (pp. 591-620). Síntesis.
- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J.M. y Gea, M. (2014). Assessing and developing prospective teachers' understanding of random sequences. En U. Sproesser, S. Wessolowski, y C. Wörn (Eds.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt* (pp. 1-11). Springer https://doi.org/10.1007/978-3-658-04669-9_1
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (vol. 40, pp. 15-37). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2

- Beltrán-Pellicer, P., Begué, N. y Roldán López de Hierro, A.F. (2020). Experiencias y recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. *Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática*, 1, 15-22. <https://doi.org/10.7203/ietem.1.16287>
- Bingham, A. y Witkowsky, P. (2022). Qualitative analysis: Deductive and inductive approaches. En C. Vanover, P. Mihás y J. Saldaña (Eds.), *Analyzing and Interpreting Qualitative Data: After the Interview* (pp. 133-146). SAGE Publications.
- Braga, G. y Belver, J.L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218. http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688
- Castro-Fernández, F., Fortoul-Díaz, A., González-Alfaro, N. y Hernández-Rebollar, L.A. (2023). Significados de probabilidad en las definiciones de conceptos de libros de texto de educación media superior en México. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 8, 1-19. <https://doi.org/10.46618/iime.179>
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/17607>
- Díaz-Levicoy, D., Olate-Penroz, C., Ferrada, C. y Bustamante-Valdés, M. (2024). Análisis de libros de texto en estadística y probabilidad en la base de datos Scopus: una revisión sistemática. *Bibliotecas. Anales de Investigación*, 20(1), 1-13.
- Díaz-Levicoy, D., Ferrada, C., Salgado-Orellana, N. y Vásquez, C. (2019). Análisis de las actividades evaluativas sobre estadística y probabilidad en libros de texto chilenos de Educación Primaria. *Premisa*, 21(80), 5-21.
- Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Franco, J. y Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta*, 51(1), 7-16. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16>.
- Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3) 237-284.
- Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1988). Azar y probabilidad. Síntesis.
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J.M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28(48), 209-229. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11>

- Gómez, E., Ortiz, J.J. y Gea, M. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49-71. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.63>
- Gómez, E., Ortiz, J.J., Batanero, C. y Contreras, J.M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 35, 75-91.
- Gómez, E., Contreras, J.M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). SEIEM.
- Herbel-Eisenmann, B.A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369. <https://www.jstor.org/stable/30034878>
- Herrera, C.D. (2018). Investigación cualitativa y análisis de contenido temático. Orientación intelectual de revista Universum. *Revista General de Información y Documentación*, 28(1), 119-142.
- Jamieson-Proctor, R. y Byrne, C. (2008). Primary teachers' beliefs about the use of mathematics textbooks. En M. Goos, R. Brown y K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 295-302). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- MECD (2014). *Real Decreto de 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Boletín Oficial del Estado.
- MEFP (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Boletín Oficial del Estado.
- Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/239807>
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Ortiz, J.J. (2002a). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.
- Ortiz, J.J. (2002b). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los libros de texto de Bachillerato*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/55166>
- Ramírez, G. y Batalha, C. (2020). Aprendizaje de la aleatoriedad y conceptos asociados: un estudio en secundaria con apoyo de Geogebra. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 20(1), 1-13.
- Rosales-Fernández, N. y Ortiz, J.J. (2018). Tratamiento de la probabilidad en libros de texto de educación primaria en Costa Rica. En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F.J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 659). SEIEM.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Morata.

- Suárez, M. (2019). Libro de texto, práctica educativa y competencia comunicativa. *Polyphōnia. Revista de Educación Inclusiva*, 3(1), 26-45.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, 85, 5-23.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Conocimiento didáctico–matemático del profesorado de Educación Primaria sobre probabilidad: Diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Bolema*, 29(52), 681-703. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13>

ANALYSIS OF THE MEANING OF PROBABILITY IN FIFTH AND SIXTH GRADE PRIMARY EDUCATION TEXTBOOKS

Abstract

Considering the increasing importance that probability has gained in recent decades in all educational stages, as well as the significant impact that textbooks have on the educational process, the main objective of this research is to analyze the meanings of probability in the textbooks of the third cycle of Primary Education in Andalusia (fifth and sixth grade). Using tools from the onto-semiotic approach (EOS) and adopting a qualitative approach, the textbooks of the third cycle of Primary Education in Andalusia were thoroughly analyzed, focusing on problem situations, in order to identify the meanings associated with probability. The results reveal significant discrepancies between the meanings proposed by educational regulations and those presented in textbooks. There is a marked presence of intuitive meaning and a notable dependence on classical meaning. Therefore, it is suggested that teachers make adaptations for a more effective teaching of probability, and it is proposed that these observations be considered by publishers when improving educational materials.

Keywords: Ontosemiotic Approach, probability, textbook, Primary School, meaning.

ANÁLISE DO SIGNIFICADO DE PROBABILIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS DO QUINTO E SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Resumo

Considerando a crescente importância que a probabilidade adquiriu nas últimas décadas em todas as etapas educativas, bem como o impacto significativo que os livros didáticos têm no processo educacional, o principal objetivo desta pesquisa é analisar os significados da probabilidade nos livros didáticos do terceiro ciclo do Ensino Fundamental na Andaluzia (quinto e sexto ano). Utilizando ferramentas da abordagem ontossemiótica (EOS) e adotando uma abordagem qualitativa, os livros didáticos do terceiro ciclo do Ensino Fundamental na Andaluzia foram analisados detalhadamente, com foco nas situações-problema, a fim de identificar os significados associados à probabilidade. Os resultados revelam discrepâncias significativas entre os significados propostos pelas normativas educacionais e os apresentados nos livros didáticos. Observa-se uma presença marcante do significado intuitivo e uma dependência notável do significado clássico. Portanto, sugere-se que os professores realizem adaptações para um ensino mais eficaz da probabilidade, e propõe-se que essas observações sejam consideradas pelas editoras ao aprimorar os materiais educativos.

Palavras-chave: Abordagem Ontossemiótica, probabilidade, livro de texto, Educação Primária, significado.

Víctor Torres Escoriza

Universidad de Almería, Almería, España.

vte3284@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0005-3907-8766>

Graduado en Educación Primaria por la Universidad de Almería en 2020 y titulado en el Máster en Investigación y Evaluación Didáctica en el Aula para el Desarrollo profesional Docente en la Universidad de Almería con Mención Honorífica. Esta formación didáctica se complementa con una formación matemática y estadística previa, con la realización de una Diplomatura en Ciencias Empresariales y una Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas en la Universidad de Almería.

María del Mar López-Martín

Universidad de Almería, Almería, España.

mdm.lopez@ual.es

<https://orcid.org/0000-0001-8677-9606>

Doctora en Didáctica de la Matemática y Doctora en Técnicas Avanzadas en Gestión Empresarial. Profesora Titular de Universidad en el Área de Didáctica de la Matemática del Departamento de Educación de la Universidad de Almería. Sus líneas de investigación son estadística aplicada y didáctica de la estadística.

ESTUDO DE DADOS E PROBABILIDADES EM MANUAIS ESCOLARES PORTUGUESES DOS PRIMEIROS ANOS ESCOLARES

José António Fernandes

Paula Maria Barros

RESUMO

Neste capítulo analisam-se manuais escolares portugueses de matemática, do 5.º e 6.º ano de escolaridade, no tema Dados e Probabilidades, tendo-se estabelecido as duas seguintes questões de investigação: 1) Quais as orientações dos manuais escolares portugueses dos primeiros anos na exploração do tema Dados e Probabilidades? e 2) Os manuais escolares dos primeiros anos, no tema Dados e Probabilidades, refletem as diretrizes curriculares portuguesas? Para tal, foram selecionados seis manuais escolares, três do 5.º ano e três do 6.º ano, que correspondiam aos três manuais mais adotados pelas escolas nos respetivos anos. A análise dos manuais desenvolveu-se através da análise de conteúdo, partindo de categorias e subcategorias pré-estabelecidas. Em termos de resultados, verificou-se que os manuais incluem tarefas em contextos variados, em que se salientam os relacionados com alunos e os relativos a jogos de sorte e azar (no tópico Probabilidades), sugerem com pouca frequência o uso de tecnologias digitais na exploração das tarefas e propõem poucas tarefas de investigação. Já quanto às diretrizes curriculares, a maior discrepância aconteceu nas investigações estatísticas, em que a grande relevância que lhes é dada nos programas escolares não se repercute plenamente nos manuais escolares.

Palavras-chave: manuais escolares, Dados e Probabilidades, primeiros anos escolares.

INTRODUÇÃO

Em Portugal, as diretrizes curriculares dos programas escolares oficiais, que se aplicam a todo o país, estabelecem o que deve ser ensinado nas escolas portuguesas do ensino básico e secundário (Ministério da Educação, 2021, 2023). Por sua vez, tais diretrizes curriculares são também influenciadas, direta ou indiretamente, por orientações curriculares defendidas por associações profissionais de professores e de investigadores, e mesmo por pedagogos e investigadores individualmente. No caso da matemática, salientam-se as intervenções da Associação de Professores de Matemática e da Sociedade Portuguesa de Matemática, ambas portuguesas, o National Council of Teachers of Mathematics, nos Estados Unidos da América e Canadá, e da American Statistical Association, esta última focada no ensino da Estatística e Probabilidades.

Uma vez estabelecidas as diretrizes curriculares oficiais pelas autoridades educacionais, o passo seguinte consiste em transpor essas prescrições curriculares para as salas de aula. Nesse processo, os professores desempenham um papel fundamental que, por sua vez, é também condicionado pelas suas referências pedagógicas e pelos materiais didáticos que têm à sua disposição.

De entre os materiais didáticos, destacam-se os manuais escolares, que em Portugal são de uso obrigatório pelos alunos. Ora, tal obrigatoriedade, obviamente, confere aos manuais uma grande importância no ensino e na aprendizagem das diferentes disciplinas curriculares (Carvalho, 1999; Díaz-Levicoy e Roa, 2014). Adicionalmente, os professores encontram nos manuais escolares sugestões da sequencialização dos conteúdos, os objetivos de aprendizagem e, mais recentemente, propostas de estratégias de ensino a serem desenvolvidas na sala de aula, permitindo dar resposta às recomendações dos programas escolares (Ministério da Educação, 2021, 2023).

O caráter acentuadamente prescritivo de certas dimensões dos programas escolares, como seja ao nível dos conteúdos e objetivos, terá certamente um grande impacto sobre o ensino e a aprendizagem nas diferentes disciplinas do currículo, em que se inclui a matemática, influenciando o ensino dos professores, os manuais escolares, os exames e a aprendizagem dos alunos (Vergnes, 2001).

Face ao exposto, no presente estudo analisam-se as orientações de manuais escolares portugueses dos primeiros anos escolares, especificamente do 2.º ciclo do ensino básico (5.º e 6.º ano), relativas ao tema Dados e Probabilidades, bem como a forma como neles são modeladas as diretrizes curriculares oficiais. Desta problemática, derivaram-se as duas seguintes questões de

investigação: 1) Quais as orientações dos manuais escolares portugueses dos primeiros anos na exploração do tema Dados e Probabilidades? e 2) Os manuais escolares dos primeiros anos, no tema Dados e Probabilidades, refletem as diretrizes curriculares portuguesas?

Uma vez apresentada a problemática do estudo e a sua importância, nas secções seguintes refere-se e discute-se o enquadramento teórico, focado nos manuais escolares e nas diretrizes curriculares do tema Dados e Probabilidades dos primeiros anos escolares (do 1.º ao 6.º ano), descrevem-se os aspetos metodológicos do estudo e relata-se a análise realizada ao tema Dados e Probabilidades dos manuais escolares do 2.º ciclo do ensino básico (5.º e 6.º ano), confrontando-se esses resultados com a literatura publicada no âmbito do tema. Por fim, na secção de conclusão sintetizam-se e discutem-se os principais resultados da análise efetuada e extraem-se algumas implicações para o ensino do tema Dados e Probabilidades.

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Face à problemática do estudo, o seu enquadramento teórico desenvolve-se em três subsecções: na primeira, intitulada “Os manuais escolares no ensino”, trata-se a relação entre os manuais e os programas escolares, bem como a importância e o enquadramento da problemática dos manuais escolares; na segunda, intitulada “Prescrições curriculares no tema Dados e Probabilidades dos primeiros anos escolares (do 1.º ao 6.º ano)”, analisam-se e registam-se essas prescrições referentes ao tema em estudo; e na terceira, intitulada “As prescrições curriculares face às recentes recomendações para o ensino de Probabilidades e Estatística”, discutem-se e comparam-se as prescrições curriculares com as recentes recomendações para o ensino do tema em estudo.

Os manuais escolares no ensino

Do ponto de vista político e legislativo, evidentemente que os manuais escolares devem estar de acordo com as diretrizes curriculares oficiais (Herbel, 2007), pois estas devem informar aqueles e não o recíproco. Corroborando esta perspetiva, é habitual existirem nos diferentes países, em que se inclui Portugal, comissões de avaliação dos manuais escolares para estudar a conformidade dos manuais com os programas escolares.

Os manuais escolares ao funcionarem como elemento estruturador dos conteúdos de uma determinada disciplina e dos processos da sua transmissão, constituem-se como importantes instrumentos de regulação da prática pedagógica (Carvalho, 1999; Díaz-Levicoy e Roa, 2014). No

mesmo sentido, Vieira et al. (1999) defendem que estes instrumentos de trabalho desempenham “uma função fortemente reguladora das práticas institucionais e sociais na sala de aula” (p. 539), sendo que tal regulação resulta também de a obrigatoriedade das escolas portuguesas adotarem manuais escolares que, por sua vez, os alunos deverão adquirir.

Por outro lado, os manuais escolares são também valorizados por oferecerem uma organização do currículo e propostas de trabalho, assumindo-se como um instrumento necessário e útil no trabalho de professores e alunos (Pereira e González, 2011). Complementarmente, uma análise criteriosa permite “traçar planos de intervenção para além do manual, incluindo a seleção ou elaboração de outros materiais que expandem, complementam ou, se necessário, contrariam as orientações nele propostas” (Vieira et al., 1999, p. 539).

Embora haja a convicção muito generalizada de que o manual escolar tem uma importância considerável no trabalho do professor, incluindo o de matemática, talvez, em alguns casos, se verifique uma excessiva dependência do manual, resultante de um uso incondicional e acrítico. Esta visão é sustentada pelos resultados de um estudo sobre a utilização do manual escolar pelo professor de matemática, onde se concluiu que “este instrumento, tudo indica, continua a ter um papel fundamental no processo de ensino/aprendizagem – não obstante prolifere cada vez mais a oferta de outras alternativas nos mais variados suportes” (Cabrita, 1999, p. 160).

O uso de materiais diversos no ensino é também preconizado por Brito (1999) e, no caso dos livros de texto, deve ser feita uma seleção cuidada (Ortiz, 1999), pois, no caso do Estatística (que aqui é objeto de estudo), embora existam livros de texto excelentes, a investigação didática começa a revelar que alguns erros conceituais e uma pedagogia inadequada acontecem com alguma frequência, maior do que seria desejável (Ortiz, 1999; Sánchez-Cobo, 1996).

Prescrições curriculares do tema Dados e Probabilidades dos primeiros anos escolares (do 1.º ao 6.º ano)

As prescrições curriculares oficiais de matemática, em vigor em Portugal, são reguladas pelo documento Aprendizagens Essenciais (AE) de matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2021) e do ensino secundário (Ministério da Educação, 2023). No caso do ensino básico (que decorre do 1.º ao 9.º ano), o programa organiza-se em temas, tópicos, subtópicos, conteúdos, objetivos de aprendizagem e ações estratégicas de ensino do professor a serem desenvolvidos no estudo da disciplina.

Na análise, apresentada a seguir, organizam-se os subtópicos do tópico Dados, em cada um dos anos escolares, a partir das etapas do processo investigativo especificadas no programa: 1) questões de investigação; 2) dados; 3) organização e análise; 4) interpretação e conclusão; e 5) comunicação e divulgação. Já no tópico Probabilidades organiza-se a sua análise a partir dos subtópicos seguintes: 1) experiência aleatória; 2) acontecimentos; e 3) probabilidade. Em qualquer dos tópicos tem-se que um dado subtópico é referido apenas no ano escolar em que são introduzidos pela primeira vez novos conteúdos, sendo que nos anos escolares seguintes a sua alusão implica necessariamente algum aprofundamento do seu estudo.

Seguidamente analisam-se os tópicos, subtópicos e conteúdos em cada ano escolar, do 1.º ao 6.º do ensino básico. Na Tabela 1 registam-se os tópicos, subtópicos e conteúdos introduzidos pela primeira vez do 1.º ao 6.º ano no tema Dados e Probabilidades. Embora se estudem apenas manuais do 5.º e 6.º ano, a inclusão também do 1.º ao 4.º ano permite-nos obter uma melhor visão dos programas.

Tabela 1.

Tópicos, subtópicos e conteúdos introduzidos pela primeira vez em cada ano escolar do 1.º ao 6.º ano do ensino básico

Ano	Tópicos	Subtópicos e conteúdos
1.º ano	Dados	<ul style="list-style-type: none"> •Questões de investigação •Dados: características qualitativas; limpeza de dados; fontes primárias de dados •Organização e análise: tabela de contagem; pictograma (correspondência um para um); gráfico de pontos •Interpretação e conclusão •Comunicação e divulgação: apresentações orais.
2.º ano	Dados	<ul style="list-style-type: none"> •Organização e análise: tabela de frequências absolutas; diagrama de Carroll; pictograma (correspondência um para vários); gráfico de barras (uso de recursos tecnológicos para construir gráficos de barras); moda •Interpretação e conclusão: relações entre duas características qualitativas; gráficos/infográficos reais (estudo em grupo) •Comunicação e divulgação: elaborar um poster
3.º ano	Dados	<ul style="list-style-type: none"> •Dados: variáveis quantitativas discretas; fontes secundárias •Organização e análise: diagrama de caule-e-folhas (simples); valores extremos (mínimo e máximo); valores atípicos •Comunicação e divulgação: elaborar um infográfico
	Probabilidades	<ul style="list-style-type: none"> •Acontecimentos: “impossível”; “possível” e “certo” •Probabilidade: grau de convicção sobre a ocorrência de acontecimentos para fazer previsões e tomar decisões

Ano	Tópicos	Subtópicos e conteúdos
4.º ano	Dados	<ul style="list-style-type: none"> •Organização e análise: diagrama de caule-e-folhas (duplo); gráfico de barras duplas (justapostas) •Interpretação e conclusão: gráficos presentes nos <i>media</i> •Comunicação e divulgação: preparação de infográficos; realização de uma exposição sobre um estudo efetuado
	Probabilidades	•Acontecimentos: “impossível”; “improvável”; “igualmente provável”; “provável” e “certo”
5.º ano	Dados	<ul style="list-style-type: none"> •Dados: recolher dados por questionário •Organização e análise: tabela de frequências relativas (em percentagem); gráfico circular (utilizar tecnologia na construção de gráficos circulares); média (interpretação equitativa ou ponto de equilíbrio, medida sensível a cada um dos dados) •Interpretação e conclusão: análise de gráficos da vida quotidiana •Comunicação e divulgação: elaboração de um poster digital
	Probabilidades	•Probabilidade: probabilidade de um acontecimento como valor compreendido entre 0% e 100%; frequência relativa como estimativa de probabilidade
6.º ano	Dados	<ul style="list-style-type: none"> •Dados: valores de características quantitativas contínuas •Organização e análise: elaborar infográficos digitais, construção de classes (de igual amplitude); gráfico de linha; histograma; classe modal •Comunicação e divulgação: efetuar um relatório do estudo; recorrer a infográficos digitais
	Probabilidades	<ul style="list-style-type: none"> •Acontecimentos: identificar acontecimentos aleatórios equiprováveis •Probabilidade: acontecimentos aleatórios equiprováveis têm igual probabilidade

Fonte: Elaboração dos autores a partir do programa escolar (Ministério da Educação, 2021).

Comece-se por analisar o tópico Dados, considerando as diferentes etapas do processo investigativo. Na etapa *formulação de questões de investigação* espera-se que os alunos tenham uma participação ativa, eventualmente com a colaboração do professor, sugerindo temas do seu interesse, com eles relacionados, envolvendo outras disciplinas ou da atualidade e próximos dos alunos. Naturalmente, com o progresso de ano escolar, o aluno deve revelar uma maior autonomia na formulação das questões de investigação.

Na etapa *dados*, os alunos devem decidir, eventualmente com a colaboração do professor, sobretudo nos primeiros anos, que dados devem recolher para responder a uma questão estatística e como os obter, se por observação/medição ou por inquirição. Nos primeiros anos (1.º e 2.º ano), os dados são valores de características qualitativas e de fontes primárias, o que implica que esses dados são obtidos por observação/medição ou inquirição. Posteriormente (3.º e 4.º ano), os dados

podem ser obtidos de fontes secundárias, significando que podem ser obtidos a partir de publicações ou de sítios confiáveis da internet. Agora, os dados podem também ser valores de variáveis quantitativas discretas e recomenda-se a limpeza dos dados no sentido de identificar valores atípicos e decidir sobre a sua aceitação ou rejeição. Finalmente, os dados podem ser obtidos através da construção e aplicação de um questionário simples (5.º ano) e incluindo valores de características quantitativas contínuas (6.º ano). Os questionários devem incluir questões de resposta fechada e advoga-se o uso de tecnologias digitais no processo de construção dos questionários.

Na etapa *organização e análise de dados* recorre-se a tabelas, gráficos e estatísticas descritivas. Na representação tabular, introduz-se a tabela de contagem (1.º ano), a tabela de frequências absolutas (2.º ano) e a tabela de frequências relativas (em percentagem) (5.º ano); na representação gráfica, introduz-se o pictograma (correspondência um para um) e o gráfico de pontos (ambos no 1.º ano), o pictograma (correspondência um para vários) e o diagrama de Carroll (ambos no 2.º ano), o diagrama de caule-e-folhas (simples) (no 3.º ano), o diagrama de caule-e-folhas (duplo) e o gráfico de barras duplas (justapostas) (ambos no 4.º ano), o gráfico circular (5.º ano) e a construção de classes (de igual amplitude), o gráfico de linhas, histograma e infográficos (todos no 6.º ano); e nas medidas estatísticas, introduz-se a moda (2.º ano) e valores extremos (mínimo e máximo) e valores atípicos (ambos no 3.º ano), a estatística média, a partir de uma interpretação equitativa ou ponto de equilíbrio e observando que se trata de uma medida sensível a cada um dos dados (5.º ano) e a classe modal (6.º ano). Nesta etapa sugere-se o uso de recursos tecnológicos para construir gráficos de barras e gráficos circulares.

Relativamente aos gráficos, salienta-se a necessidade de usar escalas adequadas (quando for pertinente) e de incluir o título, legendas, rótulos das variáveis envolvidas e a fonte dos dados representados. Toda esta informação desempenha um papel importante ao relevar o contexto dos dados e, portanto, facilitar a sua interpretação.

Ainda na etapa *organização e análise de dados*, ao longo de todos os anos, advoga-se a análise crítica de gráficos, incluindo a escolha dos tipos de gráficos adequados às situações de estudo e a justificação dessa escolha, quer se trate de gráficos por eles construídos ou publicados em suporte de papel ou digital. Nas representações gráficas dos *media*, sugere-se que os alunos analisem e comparem essas representações, discutindo a sua adequabilidade e reconhecendo possíveis manipulações gráficas tendo em vista prosseguir propósitos ilegítimos.

Uma vez organizados os dados em tabelas e gráficos e determinados os valores das estatísticas, na etapa *interpretação e conclusão* espera-se que os alunos atribuam significado às representações tabelares e gráficas construídas e aos valores obtidos das estatísticas para extraírem conclusões. Ainda nesta etapa, recomenda-se a análise de representações gráficas/infográficos já construídos e presentes nos *media*, inclusive referentes à vida quotidiana, eventualmente em pequenos grupos de alunos.

Por fim, na etapa *comunicação e divulgação*, advoga-se que os alunos façam apresentações orais (1.º ano), acrescentando-se a elaboração de um poster (2.º ano), a elaboração de um infográfico (3.º ano), a realização de uma exposição sobre o estudo realizado (4.º ano), a elaboração de um poster digital (5.º ano) e um relatório do estudo realizado e infográficos digitais para divulgação do estudo (6.º ano).

O tópico Probabilidades surge apenas a partir do 3.º e nele introduz-se o estudo de *acontecimentos* a partir do uso das expressões “impossível”, “possível” e “certo” (3.º ano), acrescentando-se as expressões “improvável”, “igualmente provável” e “provável” (4.º ano), para exprimir o grau de convicção na realização de acontecimentos de um fenómeno aleatório, a *probabilidade* de um acontecimento como um valor compreendido entre 0% e 100% e a frequência relativa (ambos no 5.º ano) e identificação de acontecimentos equiprováveis e suas iguais probabilidades (6.º ano).

As prescrições curriculares face às recentes recomendações para o ensino de Probabilidades e Estatística

Da análise das prescrições curriculares, antes efetuada no tema Dados e Probabilidades, destacam-se aqui os três aspetos seguintes: 1) a relevância do tema; 2) as tarefas e seu contexto; e 3) o uso da tecnologia digital.

Relevância do tema. Nas últimas décadas, vem-se assistindo a um aprofundamento sistemático do estudo de Probabilidades e Estatística nas escolas (GAISE, 2005; NCTM; 2000). Ainda no século passado, estas temáticas começaram por ser introduzidas pela primeira vez no ensino secundário, para posteriormente serem também inseridas no ensino básico. Atualmente, constata-se que estas temáticas são estudadas ao longo de toda a escolaridade (básica e secundária) na generalidade dos países, reconhecendo-se a sua importante contribuição para a formação de cidadãos esclarecidos, críticos e integrados nas sociedades atuais (Carvalho e César, 2001).

Seguindo a tendência de aprofundamento do estudo do tema, nas novas prescrições curriculares do subtema Dados verifica-se um estudo mais sistemático e abrangente dos diferentes tipos de gráficos estatísticos, alguns dos quais são mesmo introduzidos mais precocemente, como acontece com os histograma que é introduzido no 6.º ano e antes era introduzido no 9.º ano, a validação de dados, a análise crítica de gráficos publicados nos *media*, a seleção de gráficos adequados para a representação de dados e a comunicação e divulgação de interpretações e resultados estatísticos.

Analogamente, nas Probabilidades também se assiste a uma introdução mais precoce deste tópico. Enquanto antes este tópico estava concentrado no 9.º ano, nas novas prescrições curriculares ele começa a ser estudado logo no 3.º ano e continua a ser estudado em todos os anos subsequentes do ensino básico (do 4.º ao 9.º ano).

Tarefas e seu contexto. Na literatura, relativamente às tarefas propostas no ensino de Estatística, consideram-se importantes os dois seguintes aspetos: 1) o tipo de tarefas propostas e 2) o contexto das tarefas. No tipo de tarefas, advoga-se cada vez mais o recurso a tarefas abertas, nas quais os alunos têm de escolher as ferramentas estatísticas adequadas para o tratamento dos dados, particularmente as chamadas investigações estatísticas ou projetos estatísticos de natureza investigativa (Batanero et al., 2011; MacGillivray e Pereira-Mendonza, 2011).

Nas prescrições curriculares atuais dá-se um grande destaque à utilização de investigações estatísticas ao longo de todos os anos do ensino básico, tal como acontece em outros países. Por exemplo, no Brasil, as investigações estatísticas são igualmente muito valorizadas na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), como é bem patente na análise realizada por Fernandes e Diniz (2022). Acrescenta-se que a importância dada às investigações nos programas escolares vem reforçada pela estruturação dos próprios programas, na medida em que os subtópicos do tópico Dados coincidem com as etapas de uma investigação estatística.

O contexto das tarefas constitui outro aspeto a que a investigação em Educação Estatística e de Probabilidades tem dado atenção. Em particular, preconiza-se o recurso a tarefas envolvendo dados reais, relativos aos alunos, com eles relacionados e do seu interesse ou que promovam a interdisciplinaridade (Damin et al., 2016; Fernandes et al., 2007; MacGillivray e Pereira-Mendonza, 2011), as quais, por sua vez, estão amplamente presentes em todos os programas escolares de matemática do ensino básico. Ora, estes contextos das tarefas, em que o contexto é

especialmente saliente, são muito importantes para o desenvolvimento de significado e da própria Estatística.

Tecnologias digitais. De entre as diferentes áreas da matemática, talvez seja na área da Estatística e Probabilidades que maior consenso existe acerca do uso das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem. Segundo Jolliffe (2007), as maiores alterações no ensino da Estatística resultaram da chamada revolução tecnológica, ao permitir a resolução de problemas com dados reais e relatar resultados de uma forma que não era possível no passado e, em consequência, contribuir para a motivação dos alunos em aprenderem Estatística e de gostarem de o fazer.

Já, para Ben-Zvi (2000), os atributos dos computadores contribuem para promover o desenvolvimento do sentido e significados dos alunos, como sejam: operar de forma rápida e precisa; exibir e relacionar dinamicamente múltiplas representações; simplificar procedimentos; fornecer feedback instantâneo; e transformar uma representação como um todo num objeto manipulável. Pratt et al. (2011) apontam também potencialidades do uso de tecnologia no estudo da Estatística, como sejam: usar representações como instrumentos dinâmicos de análise; expressar modelos pessoais; explorar modelos; armazenar e processar dados; e compartilhar e comunicar. Batanero (2004) reforça e acrescenta outras vantagens ao uso das tecnologias digitais no ensino da Estatística, como sejam: a redução do tempo gasto com cálculos; explorar na aula aplicações reais, a simulação e a criação de micromundos estocásticos virtuais que permitem explorar os conceitos de probabilidade e inferência; e valorizar raciocínios mais intuitivos face a demonstrações formais.

Nas prescrições curriculares de matemática do ensino básico recomenda-se a utilização pontual de tecnologias digitais no tópico de Estatística, designadamente, na construção de gráficos estatísticos, na elaboração de questionários e na preparação de relatórios de investigações estatísticas.

METODOLOGIA

Este estudo tem por propósito analisar as orientações de manuais escolares do 2.º ciclo do ensino básico (5.º e 6.º ano) no tema Dados e Probabilidades, confrontando-as com as diretrizes curriculares oficiais (Ministério da Educação, 2021). Na sequência, formularam-se as duas seguintes questões de investigação: 1) Quais as orientações dos manuais escolares portugueses dos primeiros anos na exploração do tema Dados e Probabilidades? e 2) Os manuais escolares dos

primeiros anos, no tema Dados e Probabilidades, refletem as diretrizes curriculares portuguesas? No estudo adotou-se uma abordagem quantitativa numa vertente descritiva (Gall et al., 2003).

Os dados do estudo foram obtidos através da análise do tema Dados e Probabilidades, estudado em manuais escolares de matemática do 2.º ciclo do ensino básico (5.º e 6.º ano). Concretamente, foi analisado o referido tema em seis manuais escolares, três do 5.º ano e três do 6.º ano. Na sua seleção teve-se em conta o facto de serem os manuais adotados por mais escolas e haver continuidade, em termos editoriais, entre os manuais do 5.º e do 6.º ano.

A escolha do 2.º ciclo resultou do facto dos respetivos manuais estarem já elaborados de acordo com os novos programas escolares e estarem a ser utilizados nas escolas (5.º ano, em 2022/2023 e 6.º ano, em 2023/24). Já no 1.º ciclo (do 1.º ao 4.º ano) e no 3.º ciclo (do 7.º ao 9.º ano) a elaboração dos novos manuais escolares não estava ainda concluída em todos os anos escolares (Despacho n.º 12055/2021; Despacho n.º 10389/2022). Tal processo de publicação e introdução dos manuais escolares nas escolas explica-se pela recente aprovação dos programas escolares de matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2021) e pela aplicação sequencial dos programas escolares, ano após ano escolar, dentro de cada ciclo. A seguir, na Tabela 2, apresentam-se os manuais escolares selecionados para o estudo.

Tabela 2.

Manuais escolares utilizados no estudo e respetivas designações abreviadas

Designação original	Designação abreviada
Neves, M. A., Ribeiro, B., Roque, B., & Faria, L. (2022). <i>MX - Matemática - 5.º Ano</i> . Porto Editora.	M5A
Faneco, C., & Valério, N. (2022). <i>Missão 5 – Vol. II, Matemática – 5.º Ano</i> . Texto Editores.	M5B
Conceição, A., Almeida, M., Castanheira, I., & Cebolo, V. (2022). <i>MSI 5 – Matemática Sob Investigação 5</i> . Areal Editores.	M5C
Neves, M. A., Ribeiro, B., & Roque, B. (2023). <i>MX - Matemática - 6.º Ano</i> . Porto Editora.	M6A
Faneco, C., & Valério, N. (2023). <i>Missão 5 – Vol. II, Matemática – 6.º Ano</i> . Texto Editores.	M6B
Conceição, A., Almeida, M., Castanheira, I., & Cebolo, V. (2022). <i>MSI 6 – Matemática Sob Investigação 6</i> . Areal Editores.	M6C

Nota: As siglas M5A, M5B e M5C designam os três manuais do 5.º ano e as siglas M6A, M6B e M6C designam os três manuais do 6.º ano.

Em termos de análise de dados, procedeu-se à análise de conteúdo do tema Dados e Probabilidades nos seis manuais escolares selecionados (Bardin, 2002). Assim, para permitir

confrontar as orientações dos manuais escolares com as diretrizes curriculares dos programas escolares, estabeleceram-se as seguintes categorias de análise: estrutura do tema; contexto das tarefas; uso de tecnologias digitais e tópicos. Na categoria tópicos consideraram-se ainda várias subcategorias. No tópico de Estatística fez-se coincidir essas subcategorias com as várias etapas de um estudo estatístico, que estruturam o respetivo tópico no programa escolar oficial: 1) questões de investigação, 2) dados, 3) organização e análise, 4) interpretação e conclusão e 5) comunicação e divulgação; já no tópico de Probabilidades consideraram-se as subcategorias: 6) experiência aleatória, 7) acontecimentos e 8) probabilidade. Concluída a análise do tema Dados e Probabilidades nos manuais escolares, registaram-se as ocorrências dos vários atributos de cada categoria ou subcategoria, determinaram-se as respetivas frequências e sintetizou-se essa informação em tabelas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados da análise dos manuais escolares, que se apresentam nesta secção, organizam-se a partir das categorias e das subcategorias, estas últimas, referentes aos subtópicos da categoria tópicos, foram antes referidas.

Estrutura do tema

Nesta subsecção apresentam-se os dados referentes aos vários aspetos considerados na categoria “Estrutura do tema”, que se registam na Tabela 3.

Tabela 3.

A estrutura do tema Dados e Probabilidades nos manuais escolares

Estrutura do tema	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
N.º total de páginas do tema	71	51	52	60	51	41
Tarefas de revisão sobre aprendizagens anteriores	8	6	4	8	6	4
Tarefas de introdução de novos conteúdos	15	8	11	7	6	6
Tarefas de aplicação/consolidação de conteúdos	53	67	73	39	49	32
Tarefas avaliação/autoavaliação	40	10	17	23	7	11
Tarefas de investigação	4	1	3	4	3	1
Total de tarefas	120	92	108	81	71	54

O número total de páginas do tema Dados e Probabilidades em todos os manuais varia entre 41 e 71, destacando-se os manuais M5A e M6A com o maior número de páginas. Verifica-se também uma tendência de maior número de páginas nos manuais do 5.º ano do que do 6.º ano, excetuando o caso dos manuais M5B e M6B, que têm o mesmo número de páginas.

Em termos gerais, os manuais iniciam com tarefas de revisão sobre as aprendizagens de anos anteriores, sendo depois propostas tarefas iniciais para introdução dos conteúdos, logo seguidas de tarefas para a sua aplicação e consolidação. Normalmente, após a abordagem dos subtópicos, é apresentada uma síntese dos principais conceitos introduzidos, seguida por um novo conjunto de tarefas para a consolidação dos conteúdos e finaliza-se com tarefas de avaliação /autoavaliação. Por fim, apresentam-se as soluções de todas as tarefas propostas.

Todos os manuais analisados têm pelo menos uma proposta de tarefa de investigação. Especialmente, nos manuais M5B e M6B existem também algumas tarefas que pressupõem recolha de dados pelos alunos e algum tratamento dessa informação, mas as sugestões de exploração ou são limitadas ou são demasiado vagas, pelo que podem não abarcar as diferentes fases de um estudo estatístico (integraram-se na categoria aplicação/consolidação de conteúdos). Porém, tais tarefas, com mais algumas sugestões de exploração, que podem ser debatidas na própria aula, podem ser aproveitadas como tarefas de investigação estatística pelo professor.

Sendo que o número de tarefas de investigação varia entre um e quatro, conclui-se que esse tipo de tarefas não é muito explorado nos manuais escolares, contrastando com a valorização de tais tarefas na literatura e nos programas escolares portugueses (Ministério da Educação, 2021). Como foi antes referido, os programas escolares organizam-se a partir das etapas de uma investigação estatística e pressupõem a introdução de conteúdos através dessas investigações, enquanto nos manuais escolares as investigações são essencialmente de aplicação/consolidação de conteúdos antes abordados.

Contextos das tarefas

Nesta subsecção apresentam-se os dados referentes aos vários contextos subjacentes às tarefas na categoria “Contextos das tarefas”, que se registam na Tabela 2.

Pela Tabela 4 observa-se que os contextos das tarefas são diversificados, notando-se que em alguns manuais há uma preocupação com a abordagem de temas atuais, como os problemas

ambientais ligados à reciclagem, ou desperdício/consumo de água (M5B, M5C, M6B, M6C), assim como à utilização do telemóvel e das redes sociais (M5B).

Tabela 4.

Os contextos das tarefas do tema Dados e Probabilidades nos manuais escolares

Contextos das tarefas	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
Pessoas/alunos	52	39	59	38	30	36
Saúde e desporto	19	9	11	20	11	7
Alimentação	14	8	13	7	2	1
Telecomunicações e redes sociais	—	6	—	—	—	—
Cultura	7	6	3	4	9	2
Jogos de sorte e azar e outros jogos	14	11	6	10	10	8
Clima, natureza e ambiente	4	8	10	6	16	2
Animais e plantas	3	8	3	5	6	4
Vendas e finanças	—	6	3	—	5	3
Veículos, trânsito e transportes	5	2	—	3	5	—
Sem contexto	20	13	15	9	12	4
Outros	12	3	6	12	2	2

É também de realçar que, em todos os manuais, uma grande parte das tarefas se centra em contextos que envolvem pessoas ou, particularmente, alunos. No caso dos alunos, uma parte significativa das tarefas reporta-se a características próprias dos alunos ou relativas à escola. Este contexto reveste-se de grande importância, na medida em que se relaciona com os interesses dos alunos e facilita a aquisição de significados (Wild e Pfannkuch, 1999), tendo sido também referido pelas três professoras do 7.º ano que participaram no estudo de Fernandes et al. (2007).

No caso específico das Probabilidades, o contexto predominante é o de jogos de sorte e azar, sendo o recurso a tarefas com bolas, ou sacos com bolas, comuns a todos os manuais. Assim, a prevalência deste contexto implica que os manuais escolares optaram por valorizar tarefas simples e mais objetivas, o que é especialmente pertinente nos primeiros anos escolares (Fernandes e Diniz, 2022).

Por fim, as tarefas sem contexto aparecem em todos os manuais e constituem um número relevante na maior parte deles. Nestas tarefas não se clarifica a proveniência dos dados, correspondendo, por exemplo, a tarefas de cálculo mental, cálculo de médias, identificação da moda, cálculo de percentagens, construção de tabelas de frequências e comparação de gráficos.

Consideraram-se aqui também as tarefas que remetem para um contexto mais matemático, incluindo números sem contexto e definições de conceitos, que envolvem a exploração de grandezas como, por exemplo, medida de ângulos (cálculo de amplitudes de setores) ou comprimento (relação milhas/quilômetros ou polegadas/centímetros), permitindo, assim, estabelecer conexões com o tema de Proporcionalidade direta.

Uso de tecnologias digitais

Em todos os manuais são propostas tarefas para as quais é pedido explicitamente que se recorra a tecnologias digitais para a sua concretização, como, por exemplo, usar a folha de cálculo para construir gráficos circulares (M5A, M5B, M5C, M6C), gráficos de barras/barras justapostas (M5A, M6C, M6A), gráficos de linhas (M6A) ou histogramas (M6A); para calcular as frequências relativas (M5A, M6A) ou determinar a média/moda (M5A, M6A).

No caso do subtópico Organização e análise, também há manuais que propõem recorrer a outro *software* como o Geogebra, para construir um histograma (M6A), ou o Scratch, para construir um gráfico circular (M6A). No âmbito de trabalhos de projeto, também é recomendado, de forma explícita, o uso de meios tecnológicos para recolha de dados recorrendo a formulários online (M5A), para a organização e tratamento de dados (M5A, M5B, M6A, M6C), por vezes sugerindo a folha de cálculo, e para divulgar os resultados, como a elaboração de um poster digital (M5B, M5C), de um vídeo (M6B) ou apresentações multimédia (M5A). Esta tendência também está presente no tópico Probabilidades de alguns manuais, na medida em que há tarefas em que é sugerida a realização de um projeto no *Scratch* para gerar números ao acaso (M6B), gerar números aleatórios usando o Geogebra (M6A) ou o recurso ao *Kahoot* para criar jogos (M5B). Resumindo, na globalidade dos manuais escolares analisados, varia entre duas e seis (sendo algumas constituídas por mais do que um item) o número de tarefas em que é solicitado explicitamente o recurso a tecnologias digitais para a sua resolução.

Por outro lado, ao longo das suas páginas, todos os manuais são acompanhados de orientações (notas laterais) para a consulta da componente digital, acessíveis a partir de hiperligações existentes no manual digital. Nessas hiperligações pode-se visualizar animações, vídeos (por exemplo, remetendo para instruções para criar questionários ou construir gráficos na folha de cálculo), simuladores (por exemplo, com base no Geogebra), testes interativos, quizzes, jogos ou outro tipo de exercícios, apresentações/explicações, dependendo da respetiva editora.

Porém, excetuando algumas tarefas pontuais em alguns manuais (M5A, M6A, M5B, M6B), não há indicações diretas no “manual físico” para a utilização desses recursos para resolver as tarefas propostas.

Embora, atualmente, o uso de tecnologias digitais seja muito recomendado internacionalmente (e.g., Ben-Zvi, 2000; Jolliffe, 2007; MacGillivray e Pereira-Mendonza, 2011), constata-se que, nos manuais escolares analisados, a proposta explícita de tarefas cuja resolução se apoie nesses recursos ainda não é muito frequente. Assim, um maior aprofundamento do uso das tecnologias digitais neste tema é deixado ao cuidado do professor e dos alunos.

Tópicos

Tal como foi referido anteriormente, no estudo consideraram-se cinco subtópicos referentes ao tópico Dados, que coincidem com as etapas de uma investigação estatística estabelecidas no programa escolar, e três subtópicos relativos ao tópico Probabilidades. Seguidamente, apresentam-se os resultados da análise dos manuais nesses subtópicos.

Questões de investigação

No que se refere ao subtópico Questões de investigação, são poucas as tarefas propostas em que se pede que sejam os alunos a formulá-las, o que acontece nos manuais M5B (1 tarefa), M5C (4 tarefas) e M6C (1 tarefa), havendo casos em que as questões de investigação são apresentadas explicitamente nas tarefas (M5A). Noutras situações (por exemplo, nos manuais, M5B e M6B) é apresentado o tema do estudo, mas não é muito claro se se pretende que os alunos explicitem as questões de investigação, para além da formulação das questões de inquirição para a recolha de dados, ou apenas é pedida a formulação destas últimas, ficando assim ao critério do professor alargar ou não a discussão à formulação das questões de investigação. Portanto, conclui-se que a formulação de questões de investigação não é muito valorizada nos manuais escolares, o que também reflete as poucas tarefas de investigação propostas nos manuais, pois é nesse tipo de tarefas que a formulação dessas questões é especialmente relevante.

Dados

Neste subtópico estudou-se a origem dos dados nas tarefas do tópico Dados nos manuais escolares, cujos resultados se encontram registados na Tabela 5.

Pela Tabela 5 verifica-se que, em todos os manuais escolares, muitas das tarefas propostas fornecem os dados brutos sobre os quais os alunos devem trabalhar, seguindo-se o número de tarefas em que os dados devem ser obtidos ou fornecidos pelos próprios alunos, recorrendo a medição, inquirição ou pesquisa. Nem todos os manuais escolares apresentam tarefas que questionam os alunos sobre a fonte dos dados e a forma como obter tais dados; já a limpeza de dados é residual em três manuais (M5B, M5C e M6C). Finalmente, na maioria das tarefas dos manuais escolares os dados já se encontram classificados, organizados principalmente em tabelas ou gráficos.

Tabela 5.

Origem dos dados das tarefas do tópico Dados nos manuais escolares

Dados	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
Fornecidos na tarefa	20	16	22	12	21	7
Obtidos/Fornecidos pelos alunos	6	9	3	4	7	4
Fonte dos dados/Como obter os dados	—	3	12	—	2	1
Limpeza de dados	—	3	1	—	—	1

Portanto, tal como no caso das questões de investigação, também no caso dos dados são poucas as tarefas em que é solicitado aos alunos a sua recolha, forma de obtenção de dados que está especialmente presente nas tarefas de tipo investigativo.

Organização e análise

O estudo do subtópico Organização e análise nos manuais escolares, referente ao tópico Dados, produziu os resultados que se encontram registados na Tabela 6.

No que concerne ao subtópico Organização e análise (ver Tabela 4), verifica-se que calcular frequências, construir tabelas de frequências e construir/completar gráficos são os conteúdos que têm mais itens associados, em quase todos manuais. De entre esses itens, destaca-se o número daqueles que envolvem frequências relativas, tabelas de frequências relativas e gráficos circulares no 5.º ano, pois é nesse ano que esses conteúdos são introduzidos, e a organização em classes e os gráficos de linhas e histogramas no 6.º ano, que são conteúdos introduzidos nesse ano. Também se observam nos manuais alguns itens em que se requer a transformação de representações (tabela↔gráfico e gráfico↔gráfico), o que contribui para o

aprofundamento da aprendizagem dos alunos (Duval, 2006; Wild e Pfannkuch, 1999) e para atenuar as suas dificuldades (Fernandes e Freitas, 2019).

Tabela 6.

Resultados da análise dos itens do subtópico Organização e análise nos manuais escolares

Organização e análise	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
Organizar em classes	—	—	—	11	9	4
Calcular frequências	16	6	23	8	6	14
Construir tabelas de frequências	18	12	17	15	9	17
Construir/completar gráficos	26	12	31	14	12	15
Análise crítica de gráficos e de erros cometidos em gráficos	—	—	11	—	6	4
Selecionar um gráfico adequado	—	4	3	4	5	2
Calcular a média/possibilidade de cálculo	14	11	44	6	6	6
Indicar a moda	13	10	12	14	1	11
Indicar valores extremos/amplitude	2	—	4	1	6	7
Sugestões para o estudo das investigações estatísticas	4	1	1	3	1	1

Apesar de pouco frequentes, em três manuais (M5C, M6A e M6C) propõem-se itens em que é solicitado a escolha de gráficos adequados para representar os dados. Este tipo de item reveste-se de grande importância em tarefas abertas porque os alunos sentem dificuldades na seleção dos gráficos adequados à situação em estudo (Fernandes e Freitas, 2019).

Há, porém, alguma diferenciação em relação à relevância que os manuais dão a alguns conteúdos desta etapa. Por exemplo, nos gráficos são propostos, em alguns manuais (M5C, M6B e M6C), itens envolvendo a análise crítica de gráficos e de erros cometidos em gráficos, indo, assim, ao encontro das recomendações dos programas escolares. O manual M5C apresenta mais itens que envolvem o cálculo da média, que, pelas orientações curriculares, deve ser introduzida no 5.º ano, do que para qualquer outro conteúdo. De realçar que, este e o manual M6C são os únicos que contemplam itens que implicam a discussão sobre a impossibilidade de calcular a média aritmética em dados de variáveis qualitativas. Estas questões são importantes porque os alunos tendem a determinar a média mesmo nestas situações, ignorando os valores da variável e recorrendo apenas às suas frequências (Fernandes e Barros, 2005).

Também se constata que a média é essencialmente pedida a partir dos dados brutos, sendo apenas em dois manuais do 5.º ano (M5A e M5C) que aparecem itens que implicam o recurso à média ponderada. Destaca-se também o manual M5B que apresenta 4 itens em que solicita o

cálculo da média sem recorrer ao algoritmo, trabalhando assim a média na perspectiva de interpretação equitativa ou ponto de equilíbrio.

No caso da moda, considerou-se, neste subtópico, apenas os casos em que ela é pedida em dados brutos, sendo a referência implícita ou explícita à moda em tabelas de frequências e gráficos avaliada em termos de interpretação dessas representações. Atente-se que o manual M6B dedica menos atenção à moda, provavelmente por já ser um conceito trabalhado nos anos escolares anteriores.

Por último, em todos os manuais escolares são apresentadas sugestões ao nível da organização e análise das investigações estatísticas. Apesar do número dessas sugestões ser reduzido, deve ter-se em conta que a atividade investigativa é pouco frequente nos manuais escolares.

Interpretação e conclusão

No estudo do subtópico Interpretação e conclusão, nos manuais escolares, referente ao subtema Dados, obtiveram-se os resultados que se encontram registados na Tabela 5.

Tabela 7.
Resultados da análise dos itens do subtópico Interpretação e conclusão nos manuais escolares

Interpretação e conclusão	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
Frequências/Tabelas de frequências	12	19	17	2	28	17
Gráficos	43	32	42	39	46	33
Infográficos	—	7	—	5	14	—
Moda/classe modal	—	—	7	—	6	6
Média/algoritmo invertido	12	4	20	—	—	1
Valores extremos/amplitude	—	—	2	—	—	—
Tirar conclusões	—	—	3	—	—	3
Sugestões para o estudo das investigações estatísticas	4	1	1	3	2	—

Pela Tabela 7, verifica-se que a maior incidência dos itens de interpretação ocorre nos conteúdos frequências/tabelas de frequências e gráficos. Já nos infográficos são muito menos os itens de interpretação e são relativos apenas a três manuais escolares (M5B, M6A e M6B).

Também os itens de interpretação do conteúdo moda/classe modal aparecem com alguma frequência em apenas três manuais escolares (M5C, M6B e M6C). Nestes itens espera-se que os

alunos atribuam significado à moda/classe modal, eventualmente a partir do contexto dos dados, que constitui um aspeto valorizado nos programas escolares.

Comparativamente com os infográficos e moda/classe modal, nos itens de interpretação da média assiste-se a um aumento do seu número e praticamente todos eles ocorrem nos manuais do 5.º ano, que é o ano em que é introduzido o conceito de média. Incluímos, aqui, itens que envolviam o significado da média e itens que implicavam a inversão do algoritmo da média. Neste último caso, considera-se que a inversão do algoritmo da média assume-se como um nível de compreensão superior do conceito de média, o que se traduz numa maior dificuldade de os alunos explorarem esse tipo de itens (Fernandes e Barros, 2005).

Aquando da análise dos itens de interpretação de tabelas de frequências e gráficos registamos os níveis de leitura e interpretação desses itens segundo Curcio (1987). Dessa análise, verifica-se uma grande predominância do nível 2, *ler entre os dados*, em todos os manuais escolares, sendo o nível 1, *ler os dados*, e o nível 3, *ler para além dos dados*, muito marginais. Portanto, nesses itens, muito poucas vezes os alunos são confrontados sobre a leitura de dados explícitos em tabelas ou gráficos (nível 1) e a inferência de informação total e o conhecimento prévio aprofundado do contexto dos dados (nível 3), enquanto, quase sempre, se espera que os alunos combinem e integrem informação e identifiquem relações matemáticas a partir de algum conhecimento prévio sobre o assunto tratado na tabela ou gráfico (nível 2). Esta tendência de destaque do nível 2 tem também sido observada em outros estudos (e.g., Fernandes e Morais, 2011; Friel et al., 2001).

Por fim, observa-se que a apresentação de sugestões ao nível da interpretação e conclusão das investigações estatísticas ocorre em cinco dos manuais escolares e em pequeno número, analogamente ao que aconteceu no subtópico Organização e análise.

Comunicação e divulgação

O estudo do subtópico Comunicação e divulgação nos manuais escolares, referente ao tópico Dados, deu origem aos resultados que se encontram assinalados na Tabela 8.

Por observação da Tabela 8, destaca-se imediatamente um menor número de itens no subtópico Comunicação e divulgação, muito inferior ao número de itens que se verificaram nos subtópicos Organização e análise e Interpretação e conclusão. Além disso, não se verificam muitas coincidências nesses tipos de itens entre os manuais escolares, ou seja, observa-se que tais itens, à

exceção da elaboração de um texto/relatório e de um poster digital/cartaz, referidos em quatro manuais, são comuns a apenas três manuais ou menos.

Tabela 8.

Resultados da análise dos itens do subtópico Comunicação e divulgação nos manuais escolares

Comunicação e divulgação	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
Realizar debates na aula	—	4	—	—	—	—
Produzir um comentário/explicação	7	3	—	7	—	—
Elaborar um poster digital/cartaz	—	1	2	—	1	2
Elaborar infográficos	—	—	—	—	1	2
Elaborar um vídeo	—	—	—	—	1	—
Elaborar um texto/relatório	—	3	—	2	7	3
Sugestões para o estudo das investigações estatísticas	4	—	1	2	—	—

De entre as formas de comunicação e divulgação, na globalidade dos manuais escolares, destaca-se produzir um comentário/explicação e elaborar um texto/relatório, seguindo-se as sugestões para o estudo das investigações estatísticas, elaborar um poster digital/cartaz, realizar debates na aula, elaborar um infográfico e um vídeo.

Finalmente, embora em número um pouco menor, continua a apresentarem-se sugestões para o estudo das investigações estatísticas, agora no que toca à comunicação e divulgação. As sugestões referidas neste subtópico e as que são também mencionadas nos subtópicos Organização e análise e Interpretação e conclusão, sendo demasiado orientadoras, podem limitar o papel dos alunos na tomada de decisões implicadas nas investigações estatísticas.

Experiência aleatória

Na Tabela 9 registam-se os resultados do estudo do subtópico Experiência aleatória, relativo ao tópico Probabilidades.

Como se pode observar na Tabela 9, o tipo de experiência aleatória que está mais presente nas tarefas dos manuais escolares é a extração/seleção aleatória, sendo mais frequentes as experiências aleatórias que envolvem urnas, ou sacos com bolas, e pessoas. Os modelos de urna ou roleta constituem modelos concretos universais para a exploração do conceito de probabilidade, o que destaca a sua importância. Apesar disso, Steinbring (1991) afirma que usar no ensino um

modelo exclusivo comporta o risco do modelo escolhido se tornar ele próprio o único objeto de ensino para a construção concetual estocástica, levando o aluno a confundir objeto e modelo.

Tabela 9.

Resultados da análise das tarefas do subtópico Experiência aleatória nos manuais escolares

Experiência aleatória	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
Girar uma roleta	4	4	3	5	1	1
Lançar um (ou dois) dado (s)/moeda	4	3	1	5	2	6
Extração/seleção aleatória	16	6	20	10	7	10
Lançar um copo/carta	—	—	—	—	1	—

Simultaneamente, verifica-se que os manuais escolares valorizam o recurso aos jogos de sorte e azar no ensino de Probabilidades. Esta escolha parece adequada para as primeiras aprendizagens de Probabilidades (Fernandes e Diniz, 2022), pois trata-se de situações simples e objetivas.

Acontecimentos

O estudo do subtópico Acontecimentos nos manuais escolares, referente ao tópico Probabilidades, produziu os resultados que se apresentam na Tabela 10.

Tabela 10.

Resultados da análise dos itens do subtópico Acontecimentos nos manuais escolares

Acontecimentos	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
Certo, possível, provável, improvável, impossível	9	19	7	—	9	4
Mais prováveis e menos prováveis	3	13	7	1	10	4
Equiprováveis	3	2	3	12	8	20
Envolvendo potenciais crenças	2	—	—	5	—	1

Comparando os manuais escolares da mesma editora, constata-se que o número de itens de tarefas relativas à classificação, identificação e comparação de acontecimentos diminui do 5.º ano para 6.º ano, e aumenta no caso dos acontecimentos equiprováveis. Este último resultado, possivelmente, deve-se ao facto de o estudo dos acontecimentos equiprováveis ser introduzido no 6.º ano.

No estudo dos acontecimentos destacam-se duas atividades distintas: a classificação de acontecimentos dados e a formulação de acontecimentos, que são igualmente importantes. Todavia, nos manuais escolares está praticamente ausente a formulação de diferentes tipos de acontecimentos, o que pode ser considerado uma lacuna desses manuais. Essa ausência é negativa porque a investigação tem mostrado que os alunos revelam mais dificuldades na formulação do que na classificação de acontecimentos (Fernandes e Barros, 2005; Fischbein et al., 1991).

Finalmente, em dois manuais escolares (M6A e M6C) são propostos alguns itens que podem desencadear potenciais crenças dos alunos, como sejam os efeitos recentes negativo (numa experiência aleatória, depois de obter várias vezes o mesmo resultado é mais provável obter um resultado distinto na próxima experiência) e positivo (numa experiência aleatória, depois de obter várias vezes o mesmo resultado é mais provável obter o mesmo resultado na próxima experiência) (Fischbein, 1975). Embora mais esporadicamente, nesses manuais também se questiona o papel das habilidades pessoais na obtenção de um certo resultado aleatório (Falk et al. 1981). A explicitação e avaliação dessas crenças, frequentemente erradas, são de primordial importância para a aquisição de um adequado conceito de probabilidade.

Probabilidade

No estudo do subtópico Probabilidade nos manuais escolares, referente ao tópico Probabilidades, obtiveram-se os resultados que se encontram registados na Tabela 11.

Tabela 11.

Resultados da análise dos itens do subtópico Probabilidade nos manuais escolares

Probabilidade	Manuais escolares					
	M5A	M5B	M5C	M6A	M6B	M6C
Sob a forma de percentagem (entre 0 e 100%)	12	8	14	15	1	4
Sob a forma de fração	5	—	—	1	—	3
Representar probabilidades na reta numérica	3	5	4	—	4	—
Interpretar probabilidades	9	6	7	—	1	—
Envolvendo potenciais crenças	1	—	—	1	—	—

No 2.º ciclo do ensino básico (5.º e 6.º ano), o cálculo da probabilidade de um acontecimento é, essencialmente, efetuado através da frequência relativa, representando essa probabilidade por um valor compreendido entre 0 e 100%. Assim, seria expectável que os itens mais frequentes estivessem integrados nesta categoria, como acontece em quase todos os manuais

escolares analisados. Há, no entanto, alguns itens nos manuais escolares M5A, M6A e M6C em que a determinação da probabilidade é mais óbvia através de uma fração, embora tal não seja impeditivo do recurso a uma percentagem.

Já a representação de probabilidades na reta numérica ou na escala de probabilidades, como é designada por alguns manuais, é menos explorada, mas tem ainda alguma expressão em quatro dos manuais (M5A, M5B, M5C, M6B), incluindo todos os do 5.º ano.

A interpretação de probabilidades é um pouco mais explorada, sobretudo nos manuais escolares do 5.º ano. Nessa interpretação, maioritariamente, os alunos são inquiridos sobre o significado de valores de probabilidade em determinados contextos. Naturalmente, estas tarefas contribuem para melhor compreender o conceito de probabilidade.

Por último, os itens envolvendo potenciais crenças são muito residuais em dois manuais escolares (M5A e M6A) e diferem dos correspondentes itens do subtópico anterior na medida em que se focam na noção de probabilidade e não na de acontecimento.

CONCLUSÃO

No estudo dos manuais escolares dos primeiros anos estabeleceram-se as duas questões de investigação: 1) Quais as orientações dos manuais escolares portugueses dos primeiros anos na exploração do tema Dados e Probabilidades? e 2) Os manuais escolares dos primeiros anos, no tema Dados e Probabilidades, refletem as diretrizes curriculares portuguesas?

Em relação à primeira questão de investigação do estudo, salientam-se as seguintes orientações na globalidade dos manuais estudados: são poucas as investigações estatísticas propostas que, em geral, são apresentadas depois de introduzidos os conteúdos, assumindo, assim, um papel de aplicação e consolidação de conteúdos e, algumas vezes, são dadas sugestões para a realização dessas investigações; os contextos das tarefas são variados e enfatizam características e interesses dos alunos, o que promove a construção de significados; apesar de incentivarem o uso das tecnologias digitais, são poucas as tarefas em que se pede para utilizar essas tecnologias; e, por último, nos vários subtópicos destaca-se a quase ausência da formulação de questões de investigação, os dados são, quase sempre, fornecidos nas tarefas, raramente se pede a escolha de gráficos estatísticos adequados e a impossibilidade de determinação da média em caracteres qualitativos, mais vezes se trata a inversão do algoritmo da média e poucas vezes se questiona sobre potenciais crenças em Probabilidades.

Na segunda questão de investigação do estudo deve considerar-se que as orientações dos manuais escolares não são sempre coincidentes, variando, mais ou menos, de manual escolar para manual escolar. Daqui decorre que, nem sempre, os manuais escolares incorporam todas as diretrizes curriculares dos programas escolares. No mesmo sentido, outra fragilidade das orientações dos manuais escolares, relativamente às diretrizes curriculares, resulta da pouca ênfase que é dada a algumas dessas orientações, como foi mencionado no primeiro objetivo.

Em conclusão, embora, em geral, as orientações dos manuais escolares tenham em conta as diretrizes curriculares, torna-se necessário, em futuras edições, desenvolver e enfatizar algumas dessas orientações, o que constitui a principal contribuição do presente estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bardin, L. (2002). *Análise de conteúdo*. Edições 70.
- Batanero, C. (2004). Retos para la formación estadística de los profesores. Em J.A. Fernandes, M.V. Sousa e S.A. Ribeiro (Eds.), *I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 7-21). Universidade do Minho.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. e Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. Em C. Batanero e C. Díaz (Eds.), *Estatística con proyectos* (pp. 9-46). Universidad de Granada.
- Ben-Zvi, D. (2000). Toward understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 127-155.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular — Educação é a Base*. Ministério da Educação.
- Brito, A. (1999). A problemática da adopção dos manuais escolares. Critérios e reflexões. Em R. V. Castro, A. Rodrigues, J.L. Silva e M.L. Sousa (Eds.), *Manuais escolares: estatuto, funções, história – Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares* (pp. 139-148). Universidade do Minho.
- Cabrita, I. (1999). Utilização do manual escolar pelo professor de Matemática. Em R.V. Castro, A. Rodrigues, J.L. Silva e M.L. Sousa (Eds.), *Manuais escolares: estatuto, funções, história – Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares* (pp. 149-160). Universidade do Minho.
- Carvalho, C. e César, M. (2001). Interagir para aprender: Um caso de trabalho colaborativo em estatística. En B. Silva e L. Almeida (Eds.), *Actas do VI Congresso Galaico Português de Psicopedagogia* (vol. 2, pp. 65-80). Universidade do Minho.
- Carvalho, J.A. (1999). A escrita nos manuais escolares de Língua Portuguesa: Objecto de ensino/aprendizagem ou veículo de comunicação? Em R.V. Castro, A. Rodrigues, J.L. Silva e M.L. Sousa (Eds.), *Manuais escolares: estatuto, funções, história – Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares* (pp. 179-187). Universidade do Minho.

- Curcio, F.R. (1989). *Developing graph comprehension: elementary and middle school activities*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Damin, W., Santos Junior, G. e Pereira, R.S.G. (2016). Desenvolvimento de competências estatísticas: análise de um caso de ensino por investigação. *Góndola*, 11(1), 55-69.
- Despacho n.º 10389/2022 de Educação. (2022). Diário da República: II Série, n.º 164/2022.
- Despacho n.º 12055/2021 de Educação. (2021). Diário da República: II Série, n.º 238/2021.
- Díaz-Levicoy, D. e Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica*, 13(1), 9-19.
- Duval, R. A. (2006). Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Falk, R., Falk, R. e Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 181-204.
- Fernandes, J.A. e Barros, P.M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (V CIBEM) (pp. 1-13). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- Fernandes, J.A. e Diniz, L.N. (2022). Ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Fundamental da Base Nacional Comum Curricular do Brasil. *Góndola*, 17(2), 392-406.
- Fernandes, J.A. e Freitas, A. (2019). Selection and Application of graphical and numerical statistical tools by prospective primary school teachers. *Acta Scientiae*, 21(6), 82-97.
- Fernandes, J.A. e Morais, P.C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 95-115.
- Fernandes, J.A., Carvalho, C. e Ribeiro, S.A. (2007). Caracterização e implementação de tarefas de Estatística: um exemplo no 7.º ano de escolaridade. *Zetetiké*, 15(28), 27-61.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. D. Reidel Publishing Company.
- Fischbein, E., Nello, M.S. e Marino, M.S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.
- Friel, S., Curcio, F. e Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- GAISE (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. The American Statistical Association.
- Gall, M.D., Gall, J.P. e Borg, W.R. (2003). *Educational research: An introduction* (7.ª ed.). A & B Publications.
- Herbel, B.A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- Jolliffe, F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. Em B. Phillips e L. Weldon (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics* (pp. 1-6). International Statistical Institute.

- MacGillivray, H. e Pereira-Mendonza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. Em C. Batanero, G. Burril e C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 109-120). Springer.
- Ministério da Educação (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Básico*. Direção-Geral da Educação.
- Ministério da Educação (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Secundário, Matemática A*. Direção-Geral da Educação.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- Ortiz, J.J. (1999). *Significado de conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato*. [Tese de Doutorado, Universidade de Granada]. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/55166>
- Pereira, F. e González, G. (2011). Análisis descriptivo de textos escolares de Lenguaje y Comunicación. *Literatura y Lingüística*, 24, 161-182.
- Pratt, D., Davies, N. e Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics. Em C. Batanero, G. Burril e C. Reading, (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 97-107). Springer.
- Sánchez-Cobo, F.T. (1996). *Análisis de la exposición teórica y de los ejercicios de correlación y regresión en los textos de Bachillerato*. [Memoria de Tercer Ciclo, Universidade de Granada].
- Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. Em R. Kapadia e M. Brorvcnik (eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 135-167). Kluwer Academic Publishers.
- Vergnes, D. (2001). Effets d'un stage de formation en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(2), 99-121.
- Vieira, F., Marques, I. e Moreira, M.A. (1999). Para o desenvolvimento da autonomia com o manual escolar. Em R.V. Castro, A. Rodrigues, J.L. Silva e M.L. Sousa (Eds.), *Manuais escolares: estatuto, funções, história – Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares* (pp. 527-544). Universidade do Minho.
- Wild, C. e Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248,

STUDY OF DATA AND PROBABILITY IN PORTUGUESE SCHOOL TEXTBOOKS FOR THE EARLY SCHOOL YEARS

Abstract

This chapter analyzes Portuguese mathematics textbooks for the 5th and 6th years of schooling, on the theme of Data and Probabilities, establishing the following two research questions: 1) What are the guidelines of Portuguese textbooks for the early years in exploring the theme of Data and Probability? and 2) Do textbooks for the early years, on the theme of Data and Probability, reflect Portuguese curricular guidelines? To this end, six school manuals were selected, three from the 5th year and three from the 6th year, which corresponded to the three manuals most chosen by schools in the respective years. The analysis of the manuals was developed through content analysis, starting from pre-established categories and subcategories. In terms of results, it was found that the textbooks include tasks in varied contexts, in which they highlight those related to students and those related to games of chance (in the Probability topic), infrequently suggest the use of digital technologies in exploration of tasks, and they propose few research tasks. As for curricular guidelines, the biggest discrepancy occurred in statistical investigations, where the great importance given to them in school programs is not fully reflected in textbooks.

Keywords: textbooks, Data and Probability, early school years.

ESTUDIO DE DATOS Y PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO ESCOLARES PORTUGUESES PARA LOS PRIMEROS AÑOS ESCOLARES

Resumen

Este capítulo analiza los libros de texto portugueses de matemáticas para el 5.º y 6.º año de escolaridad, sobre el tema Datos y Probabilidad, estableciendo las siguientes dos preguntas de investigación: 1) ¿Cuáles son las directrices de los libros de texto portugueses para los primeros años al explorar el tema de Datos y Probabilidad? y 2) ¿Los manuales escolares de los primeros años, sobre el tema de Datos y Probabilidad, reflejan las directrices curriculares portuguesas? Para ello se seleccionaron seis libros de texto, tres de 5.º año y tres de 6.º año, los cuales correspondieron a los tres textos más elegidos por las escuelas en los respectivos años. El análisis de los libros de texto se desarrolló a través del análisis de contenido, con base en categorías y subcategorías preestablecidas. En cuanto a los resultados, se encontró que los manuales incluyen tareas en contextos variados, incluyendo aquellas relacionadas con los estudiantes y aquellas relacionadas con los juegos de azar (en el tópico Probabilidad), sugieren raramente el uso de tecnologías digitales en la exploración de tareas y proponen pocas tareas de investigación. En cuanto a las directrices curriculares, la mayor discrepancia se da en las investigaciones estadísticas, donde la gran importancia que se les otorga en los programas escolares no se refleja plenamente en los manuales escolares.

Palabras clave: libros de texto. Datos y Probabilidad, primeros años escolares.

José António Fernandes

Universidade do Minho, Braga, Portugal.

jfernandes@ie.uminho.pt

<https://orcid.org/0000-0003-2015-160X>

Doutor em Educação, área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática, pela Universidade do Minho (UM). Professor associado aposentado do Instituto de Educação da Universidade do Minho (UM) e membro do Centro de Investigação em Educação (CIEE), Braga, Portugal.

Paula Maria Barros

Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal.

pbarros@ipb.pt

<https://orcid.org/0000-0002-6297-0868>

Doutora em Ciências da Educação, especialidade de Educação Matemática, pela Universidade do Minho (UM). Professora Adjunta do Instituto Politécnico de Bragança (IPB) e membro do Centro de Investigação em Educação Básica (CIEB), Bragança, Portugal.

REPRESENTACIÓN DE GÉNERO EN TAREAS DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD DE LOS LIBROS DE MATEMÁTICA DE 3° Y 4° DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN CHILE

Chia-Shih Su

RESUMEN

En este estudio, se analizó la representación de género y su vinculación con el objetivo de desarrollo sostenible (ODS) 5 en tareas de matemática en libros de texto de 3° y 4° medio en Chile. El objetivo buscó evaluar la integración del enfoque de género en las tareas derivadas de las actividades estadísticas y de probabilidad del currículo de matemática de 3° y 4° de la Educación Secundaria en Chile, en relación con el desarrollo sostenible. Para ello, se realizó un análisis de contenido de las tareas seleccionadas en términos de género, acción protagónica, labor realizada y su vinculación con el ODS5 en el marco de la Educación para el desarrollo sostenible (EDS) con estas tareas. Los resultados evidencian una disminución en la representación de personajes femeninos de 3° a 4° medio y un aumento notorio en las tareas sin especificación de género y casi nula vinculación con el ODS5. Esto sugiere una necesidad de incluir tareas con mayor diversidad en la representación de géneros, y de ajuste de los materiales para garantizar una representación equitativa y evitar la perpetuación de estereotipos de género en el contexto educativo.

Palabras clave: libro de texto, Educación Secundaria, estadística y probabilidades, género, educación para el desarrollo sostenible.

INTRODUCCIÓN

El tema de género ha sido identificado como prioritario dentro de los 17 Objetivos para el Desarrollo Sostenible (ODS), específicamente en el ODS5 (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO], 2020). A nivel global y particularmente en América Latina, la desigualdad de género representa una problemática extendida que incide en diversos aspectos de la vida, desde la participación económica y política hasta el acceso a la educación y los servicios de salud (Asociación latinoamericana de integración [ALADI], 2021; United Nations, 2015). En este contexto, es crucial integrar desde los primeros cursos escolares una perspectiva de género alineada con el Objetivo de Desarrollo Sostenible 5 (ODS5) a través de la Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS). Esta integración no solo impulsa el desarrollo del ODS5, sino que también promueve la equidad de derechos y responsabilidades entre estudiantes de todos los géneros, reforzando sus habilidades comunicativas y preparándolos para contribuir activamente en la creación de una sociedad más justa y equitativa.

En Chile, el Ministerio de Educación (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2009, 2018, 2019a) ha progresivamente integrado la enseñanza de estadística y probabilidad en los currículos desde la Educación Primaria hasta la Secundaria, con el objetivo de mejorar las competencias de los estudiantes en el manejo de datos estadísticos y en la interpretación de incertidumbres en la vida diaria. Este enfoque recibió un impulso adicional en 2019 con la implementación de reformas curriculares en la Educación Secundaria, que incluyeron la creación de un curso especializado en probabilidades y estadísticas, tanto descriptivas como inferenciales.

Por otra parte, los libros de texto son herramientas esenciales en el ámbito educativo, cruciales tanto para la enseñanza (Díaz-Levicoy et al., 2016) como para la transmisión de valores sociales (Sievert et al., 2019). Particularmente en la sección de estadística y probabilidades, estos libros no solo promueven el análisis de datos, sino también el desarrollo de competencias genéricas, matemática y la concienciación sobre igualdad de género y sostenibilidad (UNESCO, 2017). Sin embargo, estudios como los de Aragonés-González et al. (2019), Brugeilles y Sylvie (2009) y Vaillo-Rodríguez (2016) han evidenciado la persistencia de sesgos de género en el sistema educativo y en los materiales educativos, los cuales pueden afectar negativamente la autoestima y las aspiraciones profesionales de las niñas desde una edad temprana.

Dentro de este marco, Karama (2020) y Nurlu (2021) han analizado la representación de género en libros de texto de matemática, abarcando desde el primer grado a duodécimo grado y de

primero a cuarto grado de la Educación Primaria de Palestina y Turquía, respectivamente. Ambos estudios encontraron un predominio de representaciones masculinas y la reproducción de estereotipos de género en roles profesionales y actividades. Asimismo, Su et al. (2023a) investigaron once libros de texto de matemática chilenos de Educación Primaria, centrando su análisis en la igualdad de género en actividades de estadística y probabilidad y revelaron la necesidad de mejorar la representación de género más equitativa en los materiales educativos.

Por otro lado, Su et al. (2024a) se enfocaron en analizar cómo se integra la EDS en los libros de texto de matemática en la Educación Primaria en Chile. Aunque observaron una alineación con varios ODS, recalcaron la importancia de incorporar tareas que fomenten habilidades avanzadas y un aprendizaje más profundo.

La mayoría de los estudios recientes con enfoque de género sobre libros de texto de matemática se han centrado en la Educación Primaria. Sin embargo, resulta esencial determinar si la tendencia sexista en la representación de género y la inclusión de competencias de sostenibilidad persisten en las etapas finales de la escolaridad, un periodo crítico en el que los estudiantes están a punto de ingresar a la educación superior o al ámbito laboral (Cerbara et al., 2022; Subsecretaría de Educación Superior [SES], 2022). Desde esta perspectiva, este estudio tiene como objetivo evaluar la integración del enfoque de género en las tareas derivadas de las actividades relacionadas con estadísticas y probabilidad del currículo de matemática de 3° y 4° de la Educación Secundaria en Chile. Para ello, se han establecido los siguientes objetivos específicos (OE):

OE1: Identificar las tareas relacionadas con estadísticas y probabilidades de estos libros seleccionados.

OE2: Analizar la integración del enfoque de género en estas tareas en términos de género, acción protagónica, labor realizada y su vinculación con el ODS5 en el marco de la EDS.

MARCO REFERENCIAL

La investigación sobre libros de texto desde una perspectiva de género ha emergido como una prioridad en el ámbito educativo, buscando abordar las disparidades de género (Vaillo-Rodríguez, 2016). Desde los años 90, la Red Internacional de Investigación de Libros de Texto, respaldada por la UNESCO (2001, 2005), ha fomentado alianzas internacionales para examinar críticamente los materiales educativos y ha impulsado significativos progresos en la creación de recursos educativos centrados en las estadísticas de género que profundizan en la integración de

perspectivas de género en el análisis estadístico, con el fin de promover una educación más equitativa y sostenible.

Por otro lado, desde la década de 1960, numerosas organizaciones internacionales han expresado preocupaciones sobre el medio ambiente y han propuesto diversas estrategias de mitigación para enfrentar los desafíos derivados de la rápida urbanización e industrialización (UNESCO, 2014). Estas estrategias consideran múltiples perspectivas, incluidos aspectos políticos, sociales, culturales y económicos (Silveira y Petrini, 2018). Entre las medidas más significativas se encuentra el Informe Brundtland, que introdujo el concepto de sostenibilidad por primera vez (Stevenson et al., 2017), refiriéndose a un tipo de desarrollo que considera dimensiones sociales, económicas y ambientales mientras preserva recursos para futuras generaciones (Kuhlman y Farrington, 2010).

En el contexto contemporáneo, marcado por las complejas dinámicas económicas, sociales y ambientales que se reflejan en los 17 ODS (United Nations, 2015), incluido el ODS 5 que aborda la igualdad de género, se vuelve crucial identificar soluciones sostenibles generadas a través de la colaboración entre ciudadanos dotados de habilidades críticas y de implementación vinculadas a la sostenibilidad (Quelhas et al., 2019).

Además, las habilidades estadísticas han sido declaradas como habilidades fundamentales que deben ser formadas en las futuras generaciones. Diversas organizaciones, como la UNESCO, el Instituto de Estadísticas de la UNESCO (UIS), y el Instituto para el Desarrollo de la Capacidad Estadística (respaldado por varias entidades internacionales como la OCDE y PARIS21), se han propuesto metodologías para cultivar habilidades cuantitativas esenciales en las futuras generaciones, incluyendo la formulación y aplicación de conceptos, procedimiento matemáticos y datos con incertidumbre (OCDE, 2018). El impulso por mejorar las habilidades analíticas se refleja también en el reconocimiento de la necesidad de cultivar el pensamiento crítico a través del estudio de la estadística y la probabilidad, aspectos cruciales en diversos campos profesionales y académicos.

Asimismo, Naciones Unidas (2015) resalta la utilidad de la estadística para examinar cuestiones de género en situaciones concretas, ilustrando el papel actual de hombres y mujeres en la sociedad y su participación en diversos ámbitos. La amplia difusión de estas estadísticas es crucial no solo para desafiar estereotipos y redefinir roles de género, sino también para promover un equilibrio más justo en roles familiares y profesionales, incluyendo posiciones de liderazgo.

Los datos de este tipo son fundamentales para analizar y comprender la desigualdad de género, sus causas culturales, sociales y económicas, y para evaluar cómo la falta de igualdad en el acceso a oportunidades afecta a ambos géneros, fomentando así la investigación y el avance hacia la igualdad.

En el contexto de fomentar habilidades estadísticas con enfoque de género y sostenibilidad, la United Nations (2015) y UNESCO (2017) ha instado a la incorporación de la EDS en los currículos académicos de todos los niveles educativos, incluyendo la formación en estadística y probabilidad. La integración de la EDS en los programas educativos, tanto en el ámbito escolar como en el superior, especialmente en cursos relacionados con Datos y Probabilidades, al analizar conjuntos de datos en escenarios reales impregnados de incertidumbre y enmarcados en los ODS, favorecerá el cultivo del pensamiento crítico y de habilidades en sostenibilidad entre los estudiantes (Su et al., 2022; 2023b). Desde esta óptica, la conjunción de la educación estadística y probabilística con la EDS para abordar los ODS puede generar ciudadanos preparados para enfrentar los retos multifacéticos del entorno global actual, basándose en un enfoque informado y sostenible.

ODS5 desde el marco de la EDS

En 1979, la Asamblea General de las Naciones Unidas marcó un hito al aprobar la Convención sobre la Eliminación de todas las Formas de Discriminación contra la Mujer (CEDAW), que enfatizó la importancia de la educación en la promoción de los derechos de las mujeres (Convención sobre la eliminación de todas las formas de discriminación contra la mujer [CEDAW], 1983). Este evento histórico subrayó el compromiso internacional con la igualdad de género y sentó las bases para futuras iniciativas en el ámbito educativo y más allá.

Desde entonces, se han implementado numerosas iniciativas tanto a nivel internacional como nacional para concienciar y educar sobre la igualdad de género, con un enfoque en mejorar el estatus social de las mujeres y las niñas. Este esfuerzo continuo refleja la evolución de las políticas globales hacia la igualdad de género y la inclusión social en todo el mundo (Leal Filho et al., 2023).

La vinculación entre la Asamblea General de 1979, los ODS y la EDS es crucial para entender cómo la educación puede ser una herramienta poderosa para abordar la desigualdad de género y promover un desarrollo sostenible (Kopnina, 2020). Estos elementos forman parte de un

continuo esfuerzo por construir un mundo más justo y equitativo para las generaciones presentes y futuras.

El ODS5, enfocado en lograr la igualdad de género y el empoderamiento de todas las mujeres y niñas, como muestra la Tabla 1, se alinea estrechamente con los principios de la EDS, que promueve un enfoque educativo integral y transformador para fomentar la formación ciudadana y la sostenibilidad en todos los niveles (UNESCO, 2017). Esta conexión entre los ODS y la EDS destaca la importancia de integrar la educación en los esfuerzos más amplios para lograr un desarrollo sostenible y equitativo.

Tabla 1.
Meta e indicadores de ODS5

Meta	Descripción
5.1	Poner fin a todas las formas de discriminación contra todas las mujeres y las niñas en todo el mundo.
5.2	Eliminar todas las formas de violencia contra todas las mujeres y las niñas en los ámbitos público y privado, incluidas la trata y la explotación sexual y otros tipos de explotación.
5.3	Eliminar todas las prácticas nocivas, como el matrimonio infantil, precoz y forzado y la mutilación genital femenina.
5.4	Reconocer y valorar los cuidados y el trabajo doméstico no remunerados mediante servicios públicos, infraestructuras y políticas de protección social, y promoviendo la responsabilidad compartida en el hogar y la familia, según proceda en cada país.
5.5	Asegurar la participación plena y efectiva de las mujeres y la igualdad de oportunidades de liderazgo a todos los niveles decisorios en la vida política, económica y pública.
5.6	Asegurar el acceso universal a la salud sexual y reproductiva y los derechos reproductivos según lo acordado de conformidad con el Programa de Acción de la Conferencia Internacional sobre la Población y el Desarrollo, la Plataforma de Acción de Beijing y los documentos finales de sus conferencias de examen.
5.a	Emprender reformas que otorguen a las mujeres igualdad de derechos a los recursos económicos, así como acceso a la propiedad y al control de la tierra y otros tipos de bienes, los servicios financieros, la herencia y los recursos naturales, de conformidad con las leyes nacionales.
5.b	Mejorar el uso de la tecnología instrumental, en particular la tecnología de la información y las comunicaciones, para promover el empoderamiento de las mujeres.
5.c	Aprobar y fortalecer políticas acertadas y leyes aplicables para promover la igualdad de género y el empoderamiento de todas las mujeres y las niñas a todos los niveles.

Fuente: adaptación al UNESCO (2017)

La EDS aboga por un proceso educativo que coloque al estudiante en el centro, fomente la participación activa y la colaboración, y promueva prácticas más sostenibles en la sociedad (UNESCO, 2014). Al adoptar un enfoque holístico de la educación, la EDS busca capacitar a las

personas para que se conviertan en agentes de cambio positivo en sus comunidades y en el mundo en general.

Al integrar el ODS5 dentro de la EDS, se enriquece el currículo educativo y se facilita un profundo entendimiento sobre la igualdad de género, preparando a los estudiantes para una contribución significativa y consciente hacia un futuro sostenible, empoderando a mujeres y niñas (UNESCO, 2017). La EDS actúa como un vehículo para la realización de las metas del ODS5, promoviendo un conocimiento sobre género, la crítica a los roles de género tradicionales, y la promoción de una participación igualitaria y empoderada en todos los ámbitos de la vida (UNESCO, 2014, 2020).

En el marco de la EDS, los objetivos de aprendizaje, detallados en la Tabla 2, abordan de manera integral las desigualdades de género y promueven el empoderamiento de mujeres y niñas. Estos objetivos enfatizan una comprensión profunda de los conceptos de género, la igualdad y las distintas formas de discriminación y violencia, destacando la necesidad de un enfoque holístico que incluya aspectos cognitivos, socioemocionales y conductuales. Por un lado, se busca equipar a los estudiantes con el conocimiento necesario para reconocer y desafiar las desigualdades y proteger los derechos de las mujeres en múltiples contextos, desde el ámbito local hasta el global. Por otro, se incentiva el cuestionamiento de roles de género tradicionales y se promueve la colaboración para erradicar la violencia y la discriminación, todo mientras se respeta la diversidad cultural y se fomenta la empatía.

La integración de estos objetivos en el currículo no solo enriquece la educación, sino que también prepara a los estudiantes para contribuir activamente hacia un futuro más equitativo y sostenible. Este enfoque refuerza la necesidad de incorporar la EDS dentro de las enseñanzas aplicadas, como la estadística y la probabilidad, en todos los niveles educativos (UNESCO, 2017). Esto es esencial para la formación de ciudadanos capaces de interpretar críticamente los datos y enfrentar los desafíos complejos de un mundo incierto, preparando a los futuros graduados para impulsar una sociedad sostenible y justa (MINEDUC, 2019a).

Desde esta perspectiva, resulta esencial que la enseñanza de estadística y probabilidad se integre de manera efectiva en la EDS a lo largo de los diversos niveles educativos (Su et al., 2024a). La habilidad para analizar datos de forma crítica es especialmente crucial en Chile, donde aproximadamente el 26% de los egresados de la Educación Secundaria entran directamente al

mercado laboral (SES, 2022). Esta competencia se vuelve determinante para su éxito profesional y su capacidad para contribuir al desarrollo de una sociedad más sostenible y equitativa.

Tabla 2.

Objetivo de aprendizaje de ODS5 en el marco de EDS

Dominio	Descripción
Cognitivo	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender los conceptos de género, igualdad de género y discriminación, así como sus diversas manifestaciones como mutilación genital femenina, desigualdad salarial, etc. • Conocer los derechos básicos de las mujeres y las niñas, incluyendo la protección contra explotación y violencia, y los derechos reproductivos. • Reconocer las desigualdades de género a nivel local y global, considerando la interseccionalidad con otras categorías sociales. • Entender los beneficios de la igualdad de género en la legislación, el mercado laboral y la toma de decisiones públicas y privadas. • Comprender el papel de la educación, la tecnología y la legislación en el empoderamiento y la participación plena de todos los géneros.
Socio-emocional	<ul style="list-style-type: none"> • Cuestionar los roles de género tradicionales desde una perspectiva crítica y respetuosa con la diversidad cultural. • Identificar y denunciar cualquier forma de discriminación de género. • Conectar con otros para colaborar en la erradicación de la violencia y la discriminación de género, así como para promover la igualdad. • Reflexionar sobre la propia identidad de género y los roles sociales, mostrando empatía y solidaridad con aquellos que desafían las expectativas de género.
Conductual	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluar y empoderar a quienes son discriminados por su género. • Participar en decisiones sobre igualdad de género. • Apoyar el desarrollo de empatía entre géneros y detener discriminación y violencia. • Observar e identificar discriminación de género. • Planificar, implementar y evaluar estrategias para la igualdad de género.

Fuente: Adaptada de UNESCO (2017)

Enfoque de género en los libros de texto

Los libros de texto, como artefactos culturales, desempeñan un papel esencial en la promoción de la paz y la tolerancia (UNESCO, 2017). Según UNESCO (2001, 2005), estos materiales educativos han sido reconocido en eventos destacados como la Conferencia General de la UNESCO de 1946 y las conferencias del Consejo de Europa de 1953 a 1958. Durante estas reuniones, se revisó la representación de la historia europea en los materiales educativos, lo que condujo a la elaboración de informes, directrices y recomendaciones orientadas a purificar los

textos escolares, eliminando sesgos y prejuicios. En este sentido, los libros de texto desempeñan un rol importante en forjar una conciencia colectiva para inclusividad educativa.

Posteriormente, la evolución de los estudios feministas en la evaluación de libros de texto ha revelado la tendencia de estos recursos educativos a perpetuar discriminación, especialmente hacia las mujeres y otros grupos en situación de marginalidad, identificando a estos como medio de prejuicios basados en sexo, clase y raza (Vaillo-Rodríguez, 2016). Estos hallazgos enfatizan la urgencia de un análisis y una actualización rigurosa y constante del contenido educativo, vinculando el impacto de los sesgos presentes en los materiales de enseñanza con la imperiosa necesidad de implementar reformas estructurales profundas en el sistema educativo.

Ante estos desafíos, la UNESCO (2017) enfatiza la necesidad de empoderamiento y educación en igualdad de género. En este sentido, la educación actúa como un catalizador fundamental para el cambio, proveyendo a los individuos las herramientas requeridas para desafiar las normas y prácticas de género tradicionales, y promoviendo un compromiso activo hacia los principios de sostenibilidad (MINEDUC, 2018). En este marco, la enseñanza de estadística y probabilidad en el currículo escolar se presenta como una oportunidad destacada para emplear conceptos estocásticos en pro del desarrollo sostenible.

La transversalidad de la estadística y la probabilidad en los libros de texto de matemática escolares no solo enriquece el aprendizaje de los estudiantes en campo de sostenibilidad, sino que también les ayuda a aplicar estos conceptos a situaciones reales (Su et al., 2024b). Al integrar tareas que reflejan los desafíos de igualdad de género desde la perspectiva de la EDS, los profesores pueden utilizar estas actividades para vincular los conceptos estocásticos con temas de desarrollo sostenible. Esta integración no solo fomenta una educación matemática más contextualizada, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar y resolver problemas reales con un enfoque crítico y consciente (Su et al., 2024a), promoviendo un entorno más justo y equitativo conforme a los ODS y el ODS5 (UNESCO, 2017).

La importancia de un enfoque holístico en la educación se manifiesta claramente en la manera en que los libros de texto integran contenidos científicos y culturales. Según las directrices curriculares que se adaptan a cada nivel educativo, estos materiales están diseñados para transmitir valores e ideologías adecuados para la edad de los estudiantes (Braga y Belver, 2016; MINEDUC, 2018). Por otra parte, Sievert et al. (2019) señalan que los profesores, particularmente durante el período de escolaridad obligatoria, tienden a depender casi exclusivamente de los libros de texto.

Esto subraya la importancia de seleccionar cuidadosamente los contenidos, actividades y estrategias pedagógicas que no solo cubran aspectos matemáticos y pedagógicos, sino también culturales y sociológicos para asegurar un aprendizaje integral.

Desde esta perspectiva, las actividades y tareas propuestas en los libros deben reflejar un compromiso firme con la equidad de género, evitando sesgos que favorezcan predominantemente a los estudiantes masculinos. Así, las funciones y roles asignados a los personajes en los problemas deben comunicar no solo los conceptos y valores alineados con el ODS5, sino también adoptar un enfoque que integre las dimensiones cognitiva, socioemocional y conductual del aprendizaje (Su et al., 2022). Este enfoque no solo promueve la equidad de género, sino que también estimula el desarrollo del pensamiento matemático a través de actividades innovadoras que desafían y disminuyen el sesgo de género presente en los paradigmas educativos tradicionales (Ceballos y Blanco, 2008).

Según el INE (2015), las labores asociadas al género que se realizan en la vida se clasifican en las siguientes categorías: 1) cuidados personales; 2) trabajo educativo y de aprendizaje; 3) ocio y vida social; 4) trabajo no remunerado; 5) carga de trabajo global, como se muestra en la Tabla 3. Es importante destacar que, si bien tanto hombres como mujeres dedican tiempo a estas labores a lo largo del día, se han observado diferencias significativas entre ambos géneros. Estas diferencias evidencian una clara desigualdad de género y una distribución desequilibrada de las actividades que consumen el tiempo de las mujeres (INE, 2015).

Al examinar cómo los libros de texto categorizan y describen estas actividades, podemos determinar si estos reflejan las desigualdades observadas o si, por el contrario, contribuyen a la perpetuación de estereotipos de género. Esta evaluación es fundamental para entender cómo la educación desde edades tempranas puede influir en la formación de percepciones y roles de género, lo que a su vez puede reforzar o desafiar las estructuras de género existentes en la sociedad.

En este marco, la EDS se presenta como una herramienta poderosa para combatir las disparidades de género, promoviendo el empoderamiento y la igualdad a través de un enfoque educativo integral, permitiendo desarrollar valores, actitudes y competencias en los estudiantes para enfrentar los retos del desarrollo sostenible, especialmente en temas de igualdad de género (UNESCO, 2017).

Tabla 3.**Labores asociadas a género**

Labor	Descripción
Cuidados personales	Se trata de actividades relacionadas con la higiene, el arreglo personal y el cuidado de la salud personal o de miembros de la familia.
Trabajo educativo y de aprendizaje	Se refiere a labores relacionadas con la educación formal, la formación y el desarrollo de habilidades.
Ocio y la vida social	Se refiere a actividades de tiempo libre, como la vida social, la asistencia a eventos, los juegos, los hobbies, los deportes y el uso de medios de comunicación.
Trabajo no remunerado	Se refiere a labores que no reciben una compensación económica, como el trabajo doméstico, el cuidado de la familia, la participación comunitaria y el autoconsumo.
Carga de trabajo global	Se refiere a la carga total de trabajo, considerando tanto las labores remuneradas como las no remuneradas.

Fuente: adaptado de INE (2015)

Por esta razón, la UNESCO enfatiza la importancia de incorporar la EDS en todos los componentes del currículo escolar, extendiéndose más allá de las ciencias sociales y ética hasta incluir matemática y ciencias (UNESCO, 2014). Este enfoque holístico no sólo fomenta el desarrollo de las “habilidades básicas, sino también habilidades transferibles, tales como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, el activismo y la resolución de conflictos, para ayudarlos a convertirse en ciudadanos globales responsables” (UNESCO, 2014, p. 36).

A través de actividades relacionadas con estadística y probabilidad que abordan el ODS5, incorporadas en los libros de texto de matemática, los estudiantes no solo adquieren conocimientos específicos del área, sino que también desarrollan habilidades listadas en la Tabla 1. Además, favorecería la creación de acción efectiva para enfrentar el sesgo de género, respondiendo así a los retos y exigencias de la sociedad contemporánea y futura (Brugeilles y Sylvie, 2009; CEDAW, 1983; İncikabı y Ulusoy, 2019; Su et al., 2023a). Por lo tanto, analizar las tareas propuestas, utilizando las categorías del INE y los principios de la EDS, permite evaluar en qué medida se presenta la desigualdad de género en estos materiales educativos.

MATERIAL Y MÉTODOS

En el estudio, se ha seleccionado un enfoque metodológico cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo con el propósito de recabar información sobre las variables de investigación Hernández-Sampieri et al. (2014). Con el fin de alcanzar dicho objetivo, se ha empleado la técnica de análisis de contenido, la cual se distingue por su naturaleza inductiva y cíclica (Galeano, 2020).

Mediante esta técnica, se ha procedido a codificar los datos recolectados y a generar tablas de frecuencia con miras a extraer resultados pertinentes respecto a los objetivos planteados en la investigación.

Muestra

La muestra seleccionada incluye libros de texto de matemática para 3° y 4° año de Educación Secundaria (MINEDUC, 2019b), distribuidos gratuitamente por el Ministerio de Educación. Estos textos son ampliamente empleados tanto en colegios públicos como en privados subvencionados a lo largo del país. En este sentido, la selección fue intencionada.

Unidad de análisis

Las unidades de análisis incluyeron todas las tareas derivadas de la sección de Datos y Probabilidades de los libros de texto de matemática seleccionados, con el objetivo de evaluar su influencia en los aspectos académicos, habilidades, valores y actitudes de los estudiantes de Educación Secundaria en Chile.

Categoría de análisis

El análisis se organizó en torno a varias categorías esenciales: género de los personajes, acción protagónica, labor de los personajes involucrados, su relación con el ODS 5 y las competencias que se pueden desarrollar a través de las tareas propuestas. A continuación, se detallan cada una de estas categorías y las opciones que se consideraron en su análisis:

Género de personas. Se identificó el género de los individuos involucrados en las actividades, distinguiendo entre: 1) personas hombres; 2) personas mujeres; 3) personas de ambos géneros; y 4) no se puede determinar (Covacevich y Quintela-Davila, 2014).

Género de persona con acción protagónica. Se determinó el género de la persona que desempeña el rol principal en las actividades, clasificándolo como: 1) Masculino; 2) Femenino; 3) No se puede determinar; 4) Ambos sexos.

Labor realizada. Se analizó la naturaleza de las actividades realizadas por cada individuo en las tareas descritas. Adaptando la clasificación de INE (2015) en las siguientes opciones: 1) cuidados personales 2) actividades de educación y aprendizaje 3) ocio y vida social (vida social, asistencia a eventos, juegos y aficiones, deportes y uso de medios de comunicación) 4) trabajo no

remunerado (autoconsumo, cuidado de integrante familiar, doméstico, participación en la comunidad, decoración o mantención de casa) 5) carga de trabajo global 6) ausencia de labor, y 7) indeterminado.

Vinculación con los Objetivos de aprendizaje para ODS5. Se evalúa la alineación de las actividades asignadas en las tareas a cada personaje, en función de su género, con los objetivos de aprendizaje del ODS5 en el marco de la EDS desde: 1) dominio cognitivo; 2) dominio socioemocional; 3) dominio conductual; 4) ausencia de vínculo; y 5) indeterminado (UNESCO, 2017).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Esta sección detalla los resultados obtenidos para responder a los OE, estructurados conforme a las categorías de análisis previamente definidas. Utilizando un proceso de análisis de contenido, se identificaron inicialmente secciones específicas dentro de los libros de texto que se centran en el aprendizaje de Datos y Probabilidades.

En relación al OE1, se identificaron las tareas relacionadas con estadísticas y probabilidades de estos libros seleccionados dentro de las unidades: *La Toma de Decisiones en Situaciones de Incertidumbre* en tercero medio, y *La Toma de Decisiones en Situaciones de Incertidumbre* en cuarto medio. El análisis muestra que el libro de texto de 3° medio incluye 62 actividades y 146 tareas, mientras que el de 4° medio presenta 54 actividades y 203 tareas, reflejando una disminución en la cantidad de actividades, pero aumento en tareas enfocadas en la sección de Datos y Probabilidades, lo que podría indicar una intensificación de la enseñanza de estas disciplinas en etapas avanzadas de la Educación Secundaria.

En relación con el OE 2, se llevó a cabo un análisis sobre la integración del enfoque de género en las tareas derivadas de las actividades, considerando las categorías como la perspectiva de género, la participación activa, las tareas realizadas y su conexión con el ODS5 en el marco de la EDS. A continuación, se presentan los resultados de este análisis, que examinaron las diversas categorías establecidas, clasificando en sus subcategorías y exploraron tanto la frecuencia como la profundidad con la que se incorporan las perspectivas de género en el plan de estudios de matemática de Secundaria.

Género de personaje

El proceso de vinculación para la categoría de género de personaje se refleja en la tarea descrita en la Figura 1. En esta escena, un entrenador de natación está evaluando a Daniela y Bárbara, quienes compiten por representar a su equipo en una próxima competencia de 100 metros estilo libre. La decisión se basa en el cálculo del tiempo promedio obtenido en las últimas cinco carreras de cada una. Aunque la actividad muestra participación de personas de ambos géneros (el entrenador y las dos nadadoras), la tarea a) se clasifica como personas mujeres porque se centra en los resultados de Daniela y Bárbara.

Figura 1

Ejemplo de tarea en que involucra personas de género femenino



Siguiendo este enfoque, se examinó el enunciado de las unidades de análisis en función de la representación de género. La Tabla 4 muestra los cambios observados en la representación de género al analizar las unidades de estudio. En el texto de 3° medio, se identificaron un total de 146 tareas, distribuidas según el género de los participantes de la siguiente manera: 20 tareas involucran exclusivamente a hombres, 24 a mujeres, y 25 a ambos géneros. Un número considerable, 77 tareas, quedaron clasificadas en la categoría donde no se pudo determinar el género de los participantes. Por otro lado, en los textos de 4° medio, donde se registraron 203 actividades, la distribución muestra un aumento en las tareas con participantes hombres, alcanzando las 34. No obstante, no se reportaron actividades que involucraran exclusivamente a mujeres, y solo 3 tareas incluyeron a ambos géneros. La categoría de género indeterminado muestra un aumento notable, con 166 tareas, lo que podría indicar una menor claridad en la representación de género en este texto comparado con el de 3°.

Tabla 4.

Resultado de la representación de género en los libros seleccionados

Género	Texto 3° medio	Texto 4° medio
Personas hombres	20	34
Personas mujeres	24	0
Personas de ambos géneros	25	3
Personas de género indeterminado	77	166
Total	146	203

A pesar de los esfuerzos por mejorar la igualdad de género en los recursos educativos, este estudio revela un aumento en las representaciones masculinas y una disminución en las femeninas, lo que indica desequilibrios persistentes que deben ser abordados. Estos resultados son consistentes con hallazgos previos de Karama (2020) y Su et al. (2024a), quien destacaron el predominio de roles masculinos tradicionales en los libros de texto. Además, Vaillo-Rodríguez (2016) y Su et al. (2024b, 2024c) subrayan la importancia de integrar la perspectiva de género de manera más efectiva y sistemática en los materiales didácticos para reflejar y promover la igualdad de género, lo que coincide con la necesidad identificada en este estudio de revisar cómo se asignan los roles de género en los materiales didácticos y ajustar los currículos para promover una representación equitativa y diversa del género en todos los niveles educativos.

Acción protagónica

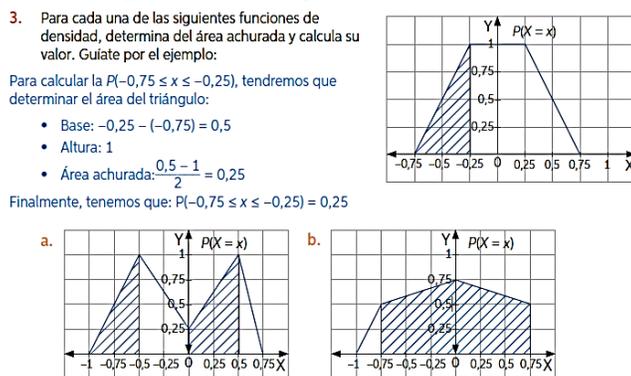
El proceso de vinculación para la categoría de análisis acción protagónica implica una evaluación de las tareas seleccionadas. Como se ilustra en la figura 2 mostrada, esta tarea presenta una acción protagónica indeterminable, caracterizada por su falta de contexto y la solicitud de cálculos específicos basados en funciones de densidad.

Siguiendo el proceso anterior, se revisaron las acciones protagonizadas por personajes en los libros de texto de 3° y 4° medio como muestra la Tabla 5, se notan cambios notables en la representación de género. En 3° medio, las tareas con personajes femeninos son las más frecuentes, con 20 tareas, mientras que las de género neutro y masculino tienen 18 y 6 tareas respectivamente. Por otro lado, en 4° medio las tareas sin especificación de género son mayoritarias con 320, con un notable aumento en las tareas masculinas a 60 y una disminución en las femeninas a 22. Este cambio refleja una posible orientación hacia prácticas más inclusivas en los materiales didácticos, aunque la proporción creciente de representaciones masculinas plantea interrogantes sobre la

diversidad en la representación de géneros. Además, sugiere continuar ajustando los materiales para reflejar una diversidad equitativa y evitar perpetuar estereotipos de género.

Figura 2

Tareas seleccionadas con la subcategoría de no se puede determinar



Fuente: Texto 4° medio (MINEDUC, 2019b, p.173)

Tabla 5.

Resultado del género de las acciones protagónicas en las tareas seleccionadas

Acción protagónica	Texto 3° medio	Texto 4° medio
Masculino	19	38
Femenino	27	0
Indeterminado	94	162
Ambos sexos	6	3
Total	146	203

Este estudio, en comparación con investigaciones anteriores, evidencia similitudes y nuevos retos. Guichot-Reina y De la Torre-Sierra (2023) resaltaron la predominancia de roles masculinos tradicionales en los libros de texto, tendencia que se refleja en este análisis para el 4° medio con un aumento en representaciones masculinas. En contraste, Nurlu (2022) encontró un equilibrio de género más consistente en la Educación Primaria que, al comparar con los resultados de este estudio, parece disminuir al avanzar a la Educación Secundaria, lo que puede sugerir la necesidad de intervenciones pedagógicas para mantener la equidad a medida que los estudiantes progresan en su educación.

Por otra parte, en los libros de texto secundarios de Chile, es destacable la transición hacia la neutralidad de género en los textos de matemática para 3° y 4° medio, sobre todo en 4° medio, donde predominan tareas de género no especificado y carentes de contexto. Esta aproximación, aunque podría interpretarse como un paso hacia la inclusión, también implica el riesgo de desligar

la matemática de contextos sociales y de género pertinentes, limitando así la profundización en temas clave como la igualdad de género.

La marcada presencia de tareas sin asignación de género específica en 4° medio, en contraste con la diversidad mayor en 3° medio, puede también indicar una posible pérdida de oportunidades educativas cruciales para abordar explícitamente la igualdad de género. Lo que subrayaría la necesidad de desarrollar y utilizar recursos didácticos que, además de fomentar la neutralidad de género, enriquezcan el contenido con contextos relevantes y significativos.

Dicho todo lo anterior, es fundamental adaptar los currículos para integrar sistemáticamente cuestiones de igualdad de género en todas las tareas matemáticas, garantizando que los estudiantes no solo reciban instrucción en conceptos abstractos, sino que también aprendan a utilizar la matemática en general y estadística y probabilidad en particular, como herramientas para el análisis crítico y el cambio social.

Labor realizada

La tarea de cuidado de plantas, con o sin el uso de fertilizante, que realiza Liset como se muestra en la imagen, se puede clasificar dentro de la subcategoría de trabajo no remunerado. Esto se debe a que estas actividades, esenciales para la decoración y el mantenimiento del hogar, se llevan a cabo en un contexto doméstico y sin compensación económica. La vestimenta cómoda de Liset y la cantidad limitada de plantas subrayan que su labor es principalmente para el embellecimiento de su espacio personal, más que para fines comerciales.

Al aplicar este enfoque de análisis a las tareas seleccionadas, se presentan los resultados en la Tabla 6. La tabla muestra que, en el tercer año de secundaria, las tareas están predominantemente centradas en la educación y el aprendizaje, seguido de una notable cantidad de tareas clasificadas como trabajo no remunerado y carga global de trabajo, mientras que las relacionadas con cuidados personales y vida social reciben menor atención. En contraste, el cuarto año refleja una intensificación en casi todas las categorías, excepto en la ausencia de labores, lo que indica un enfoque curricular que potencia tanto las habilidades prácticas como las académicas avanzadas. La inclusión de tareas relacionadas con los cuidados personales y la vida social en este nivel sugiere una estrategia más amplia que busca integrar conceptos matemáticos con situaciones de la vida cotidiana. La eliminación de categorías como la ausencia de labores y situaciones indeterminadas puede interpretarse como un esfuerzo por alinear el aprendizaje de Datos y

Probabilidades con aplicaciones prácticas y relevantes para los estudiantes fuera del entorno escolar.

Figura 3

Ejemplo de tareas relacionadas al trabajo no remunerado

4. Aplica las medidas de dispersión en la siguiente situación y responde.

Lisset desea comprobar la efectividad de un fertilizante para plantas. Para ello, cultivó 2 maceteros con 20 plantas cada uno. Luego de 2 semanas, los tamaños (en centímetros) de las plantas eran los siguientes:

Sin fertilizante	Con fertilizante
11 - 10 - 15 - 12 - 13 -	15 - 12 - 15 - 14 - 14 -
12 - 13 - 10 - 11 - 14 -	13 - 14 - 11 - 11 - 15 -
13 - 11 - 14 - 12 - 15 -	13 - 12 - 13 - 13 - 15 -
10 - 12 - 14 - 13 - 12	11 - 13 - 16 - 14 - 12



a. ¿Hace crecer más las plantas el fertilizante? Justifica tu respuesta.
 b. Si el fertilizante mantiene el promedio de los tamaños pero disminuye la dispersión, ¿podría decirse que es efectivo?
 c. Si desea que el tamaño de sus plantas sea homogéneo, ¿debe agregar fertilizante en sus plantas? Argumenta.



Fuente: Texto 3° medio (MINEDUC, 2019b, p.18)

Tabla 6.

Resultado de la labor realizada en tareas de libros seleccionados

Labor realizada	Texto 3° medio	Texto 4° medio
Cuidados personales	0	6
Actividades de educación y aprendizaje	83	126
Ocio y vida social	16	0
Trabajo no remunerado	9	21
Carga de trabajo global	27	43
Ausencia de labor	4	0
Indeterminado	7	7
Total	146	203

Esta evolución en el currículo de matemática de Secundaria es relevante cuando se compara con los hallazgos de otros estudios que exploran la representación de género y la distribución de roles en los libros de texto. Por ejemplo, los estudios de Incikabi y Ulusoy (2019) resaltan cómo los roles sociales en los libros de texto suelen estar más variados y ser más frecuentes para los personajes masculinos, lo que sugiere que los roles femeninos podrían estar menos representados en contextos prácticos y laborales. Sin embargo, la inclusión de tareas relacionadas con cuidados personales y vida social en 4° medio puede ser un paso hacia la mitigación de esta disparidad, proporcionando a los estudiantes masculinos y femeninos una visión más equitativa de las responsabilidades domésticas y sociales.

Estos avances en el contexto chileno se alinean parcialmente con lo observado por Nurlu (2022), quien encontró un equilibrio de género en las labores en los libros de texto de matemática a nivel primario, sugiriendo que los esfuerzos por equilibrar la representación de género deben continuar y expandirse en la Educación Secundaria para evitar retrocesos en la equidad alcanzada en niveles educativos más tempranos.

En conjunto, los cambios en las tareas matemáticas entre 3° y 4° medio reflejan un intento positivo de hacer que el aprendizaje de la matemática sea comprensible por los estudiantes y aplicable y relevante para la vida diaria de los estudiantes, al mismo tiempo que se intenta una representación más equitativa de los roles de género. Sin embargo, aún queda trabajo por hacer para asegurar que estas mejoras no solo aborden las aplicaciones prácticas, sino que también promuevan activamente la igualdad de género en todos los aspectos del currículo.

Vinculación con ODS 5

La tarea representada en la Figura 4 es un ejemplo puntual que ilustra cómo la incorporación de perspectivas de género en el contexto de la enseñanza de matemática puede alinearse con el 5.4 del ODS5, destacando el cuidado de las mujeres en un ámbito deportivo. Este ejercicio cognitivo implica el análisis estadístico y la interpretación de datos relacionados con personajes femeninos en el deporte, un sector donde tradicionalmente se han perpetuado estereotipos de género.

Figura 4

Ejemplo del contexto de la tarea vincule con el ODS5

1. Observa la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Un equipo de fútbol femenino necesita una delantera, para lo cual tiene dos candidatas. En los últimos 10 partidos del campeonato, las delanteras registraron las siguientes cantidades de goles:

Navas: 1, 0, 3, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 3
Flores: 1, 1, 2, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 2

La DT observa que ambas marcaron 12 goles en 10 partidos, con un promedio de 1,2 goles por partido. Entonces decide usar otros indicadores.



Carla Flores Lucía Navas

- a. Analiza el procedimiento utilizado por la DT del equipo.

Fuente: Texto 3° medio (MINEDUC, 2019b, p.15)

A pesar de que esta tarea específica parece apoyar la igualdad de género, los resultados globales presentados en la Tabla 7 revelan una preocupante falta de continuidad y profundización en este enfoque educativo. Con solamente tres tareas de 3° medio centradas en el dominio

cognitivo que vinculan con el ODS5, y ninguna en 4° medio, se subraya una oportunidad perdida de progreso en el desarrollo de competencias relacionadas con la igualdad de género.

Tabla 7.

Resultado del vínculo de las tareas seleccionadas con el ODS5 desde la EDS

Vínculo con ODS 5	Texto 3° medio	Texto 4° medio
Dominio cognitivo	3	0
Dominio socioemocional	0	0
Dominio conductual	0	0
Ausencia de vínculo	143	203
Indeterminado	0	0
Total	147	203

La sustancial ausencia de vínculos con el ODS5 en 4° medio, refuerza la necesidad de un enfoque curricular que no sólo se limite a aumentar el número de tareas, sino que también mejorar su conexión con los ODS5 y la EDS. En conforme con Su et al. (2023a, 2023b), los libros de texto deben, por tanto, ser diseñados para fomentar activamente la igualdad de género a través de contextos interdisciplinarios y sostenibles, para asegurar un aprendizaje matemático que sea relevante y aplicable a los desafíos sociales actuales.

CONCLUSIÓN

Este estudio analizó la representación de género en las tareas contenidas en los libros de texto de 3° y 4° medio, explorando su relación con el ODS5, centrándose en abordar los objetivos específicos previamente establecidos.

En relación con el OE 1, los temas de Datos y Probabilidades constituyen el 25% y el 50% del contenido en los textos de tercer y cuarto año medio, respectivamente. Estas cifras concuerdan con investigaciones anteriores (Su et al., 2022, 2024) enfocadas en el currículo primario, las cuales destacan una representación proporcionalmente reducida de género y su conexión con el ODS5 a través de la EDS en la educación secundaria. Dada la relevancia crítica de los Datos y Probabilidades en una sociedad inundada de información, esta distribución podría reflejar una cobertura insuficiente durante la educación secundaria, lo cual es una preocupación dada la importancia de estos conocimientos para el desarrollo de una ciudadanía informada. Adicionalmente, el análisis de las tareas muestra una orientación hacia la neutralidad de género, observada en el incremento de tareas que no especifican género en cuarto medio. Esta tendencia

recibe apoyo de una investigación previa realizadas por Su et al. (2023, 2024), quienes documentan un aumento en el número de tareas a medida que los estudiantes avanzan en su trayectoria educativa.

En cuanto al OE 2, a pesar de los avances hacia una inclusividad ampliada en los textos de educación secundaria en Chile, persisten desafíos notables relacionados con el desequilibrio en la representación de géneros. Este fenómeno se caracteriza por una disminución en la representación de personajes femeninos y un incremento de los masculinos, un patrón también identificado en estudios previos por Incikabi y Ulusoy (2019) y Nurlu (2022). Además, la categoría de género indeterminado, que abarcó 166 tareas, aparentemente busca una neutralidad que resulta en una ambigüedad obstruyendo la clarificación de roles de género específicos. La ausencia de tareas exclusivamente dedicadas a personajes femeninos en los textos de 4° medio ilustra una oportunidad perdida para destacar las contribuciones femeninas en diversas áreas, mientras que la limitada inclusión de ambos géneros podría estar contribuyendo a la perpetuación de estereotipos de género. Además, la integración del ODS5 a través de la EDS en la sección de Datos y Probabilidades es inexistente, especialmente en comparación con el currículo primario, donde sí se observa cierta inclusión de estos elementos. Dados estos hallazgos, se recomienda un ajuste curricular profundo para fomentar una representación de género más equitativa y diversa en los materiales didácticos, subrayando la importancia de incorporar de forma más sistemática y efectiva la perspectiva de género en los recursos educativos, lo cual es crucial para alcanzar una equidad educativa genuina. Además, estos resultados invitan a futuras investigaciones para evaluar la efectividad de los materiales didácticos en mejorar la representación de género y su impacto en las percepciones y actitudes de los estudiantes hacia la equidad de género, fortaleciendo así el vínculo entre la educación secundaria y el cumplimiento de objetivos globales de desarrollo sostenible.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aragonés-González, M., Rosser-Limiñana, A. y Gil-González, D. (2020). Coeducation and gender equality in education systems: A scoping review. *Children and Youth Services Review*, *111*, 104837. <https://dx.doi.org/10.1016/j.childyouth.2020.104837>
- ALADI (2021). *Memorándum de entendimiento entre la entidad de las naciones unidas para la igualdad de género y el empoderamiento de las mujeres y la secretaria general de la asociación latinoamericana de integración*. ALADI.

- Braga, G. y Belver, J.L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688
- Brugailles, C. y Sylvie, C. (2009). *Promoting Gender Equality Through Textbook. A Methodological Guide*. UNESCO.
- Covacevich, C y Quintela-Dávila, G. (2014). *Desigualdad de género, el currículo oculto en textos escolares chilenos*. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Ceballos, J.P. y Blanco, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemática para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.
- Cerbara, L., Ciancimino, G. y Tintori, A. (2022). Are we still a sexist society? Primary socialisation and adherence to gender roles in childhood. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 19(6), 1-15. <https://doi.org/10.3390/ijerph19063408>
- CEDAW (1983). *Instrumento de Ratificación de 16 de diciembre de 1983 de la Convención sobre la eliminación de todas las formas de discriminación contra la mujer*. CEDAW.
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill Interamericana.
- Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B., López-Martín, M.M., y Piñeiro, J.L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de Educación Primaria española. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 20(1), 133-156.
- Galeano, M. (2020). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa*. Universidad Eafit.
- Guichot-Reina, V. y De la Torre-Sierra, A. M. (2023). The Representation of gender stereotypes in Spanish mathematics textbooks for Elementary Education. *Sexuality & Culture*, 27, 1481-1503. <https://doi.org/10.1007/s12119-023-10075-1>
- Horton, N.J. y Hardin, J.S. (2015). Teaching the next generation of statistics students to “think with data”: Special issue on statistics and the undergraduate curriculum. *The American Statistician*, 69(4), 259-265. <https://doi.org/10.1080/00031305.2015.1094283>
- İncikabı L. y Ulusoy, F. (2019). Gender bias and stereotypes in Australian, Singaporean and Turkish mathematics textbooks. *Turkish Journal of Education*, 8(4), 298-317. <https://doi.org/10.19128/turje.581802>
- INE (2015). *Síntesis de Resultados La dimensión personal del tiempo*. INE.
- Karama, M.J. (2020). Gender bias in school mathematics textbooks from grade 1 to 12 in Palestine. *Journal of International Women's Studies*, 21(1), 162-171.
- Kopnina, H. (2020). Education for sustainable development goals (ESDG): what is wrong with ESGDs, and what can we do better? *Education Sciences*, 10(10), 261. <https://doi.org/10.3390/educsci10100261>
- Kuhlman, T. y Farrington, J. (2010). What is sustainability? *Sustainability*, 2, 3436-3448. <https://doi.org/doi:10.3390/su2113436>

- Leal Filho, W., Kovaleva, M., Tsani, S., Țîrcă, D. M., Shiel, C., Dinis, M. A. P., ... y Tripathi, S. (2023). Promoting gender equality across the sustainable development goals. *Environment, Development and Sustainability*, 25(12), 14177-14198. <https://doi.org/10.1007/s10668-022-02656-1>
- MINEDUC (2009). *Propuesta ajuste curricular: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios*. Unidad de Currículum y Evaluación
- MINEDUC (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2019a). *Bases curriculares: 3° y 4° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2019b). *Texto del estudiante matemática medio 3° y 4°*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Naciones Unidas (2015). *Integración de una perspectiva de género en las estadísticas*. Departamento de Asuntos Económicos y Sociales.
- Nurlu, Ö. (2021). Analysis of gender fairness of primary school mathematics textbooks in Turkey. *International Journal of Psychology and Educational Studies*, 8(4), 78-95. <https://dx.doi.org/10.52380/ijpes.2021.8.4.543>
- OCDE (2018). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo. Lectura, matemáticas y ciencias*. OCDE.
- Quelhas, O.L.G., Lima, G.B.A., Ludolf, N.V.E., Meiriño, M.J., Abreu, C., Anholon, R., Vieira Neto, J., y Rodrigues, L.S.G. (2019). Engineering education and the development of competencies for sustainability, *International Journal of Sustainability in Higher Education*, 20 (4), 614-629. <https://doi.org/10.1108/IJSHE-07-2018-0125>
- Santos-Trigo, M. (2020). Problem-Solving in Mathematics Education. En S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer (pp. 686-693). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129
- Silveira, L.M.D. y Petrini, M. (2018). Sustainable development and corporate social responsibility: a bibliometric analysis of in-ternational scientific production. *Gestão & Produção*, 25(1), 56-67. <https://doi.org/10.1590/0104-530X3173-16>
- Sievert, H., Van den Ham, A.K., Niedermeyer, I. y Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, 74, 101716. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.02.006>
- Stevenson, R., Lasen, M., Ferreira, J. y Davis, J. (2017). Approaches to embedding sus-tainability in teacher education: a synthesis of the literature. *Teaching and Teacher Education*, 63, 405-417. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.01.013>
- Su, C.S., Díaz-Levicoy, D. y Hsu, C.C. (2024a). Integración del desarrollo sostenible en la enseñanza de la Estadística y Probabilidades: un análisis de los libros de texto de Matemática de la Educación Primaria. *Educación y Humanismo*, 26(46), 222-246. <https://doi.org/10.17081/eduhum.26.46.6602>

- Su, C.S., Díaz-Levicoy, D. y Hsu, C.C. (2024b). The impact of a training cycle on statistics and probability for future primary schoolteachers with a gender-focused approach within the framework of education for sustainable development. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(2), em2401. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14177>
- Su, C.S., Díaz-Levicoy, D. y Hsu, C.C. (2024c). Propuesta de un ciclo formativo para la enseñanza de la estocástica y el desarrollo sostenible en futuros profesores de educación primaria mediante el estudio de clases. *Formación Universitaria*, 17(2), 125-138. <http://dx.doi.org/10.4067/s0718-50062024000200125>
- Su, C.S., Hsu, C.C. y Díaz-Levicoy, D. (2023a). Desarrollo de competencias y aspectos de género en las actividades sobre estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Primaria. *TANGRAM-Revista de Educação Matemática*, 6(2), 26-50. <https://doi.org/10.30612/tangram.v6i2.17204>
- Su, C.S., Díaz-Levicoy, D., Vásquez, C. y Hsu, C.C. (2023b). Sustainable development education for training and service teachers teaching mathematics: a systematic review. *Sustainability*, 15(10), 8435. <https://doi.org/10.3390/su15108435>
- Su, C.S., Seckel, M.J. y Vásquez, C. (2022). What learning opportunities does the Chilean primary education curriculum offer to train in sustainability? *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(3), 108-132.
- SES (2022). *Propuesta para la actualización de la estructura de títulos y grados de la Educación Superior Chilena*. SES.
- UNESCO (2001). *Directrices para la elaboración de planes de estudio y libros de texto en la educación internacional*. UNESCO.
- UNESCO (2005). *A comprehensive strategy for textbooks and learning materials*. UNESCO.
- UNESCO (2014). *Hoja de ruta para la ejecución del Programa de acción mundial de Educación para Desarrollo Sostenible*. UNESCO.
- UNESCO (2017). *Educación para los objetivos de desarrollo sostenible: Objetivos de aprendizaje*. UNESCO.
- UNESCO (2020). *Educación para el Desarrollo Sostenible. Hoja de ruta*. UNESCO.
- United Nations (2015). *Transformando nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*. United Nations.
- Vaillo-Rodríguez, M. (2016). La investigación sobre libros de texto desde la perspectiva de género: ¿hacia la renovación de los materiales didácticos? *Tendencias Pedagógicas*, 27, 97-124. <https://doi.org/10.15366/tp2016.27.003>

GENDER REPRESENTATION IN STATISTICS AND PROBABILITY TASKS IN MATHEMATICS TEXTBOOKS FOR 3RD AND 4TH YEAR OF HIGH SCHOOL IN CHILE

Abstract

In this study, the gender representation and its linkage with Sustainable Development Goal (SDG) 5 in mathematics tasks in 3rd and 4th grade high school textbooks in Chile were analyzed. The aim was to evaluate the integration of gender perspective in tasks derived from statistical and probability activities of the mathematics curriculum for 3rd and 4th grades of Secondary Education in Chile, in relation to sustainable development. For this purpose, a content analysis of selected tasks was carried out in terms of gender, leading action, work performed, and its linkage with SDG 5 within the framework of Education for Sustainable Development (ESD) with these tasks. The results show a decrease in the representation of female characters from 3rd to 4th grade and a marked increase in tasks without gender specification and almost no linkage with SDG 5. This suggests a need to include tasks with greater diversity in gender representation, and adjustment of materials to ensure equitable representation and avoid the perpetuation of gender stereotypes in the educational context.

Keywords: textbook, Secondary Education, statistics and probabilities, gender, education for sustainable development.

REPRESENTAÇÃO DE GÊNERO EM TAREFAS DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O 3º E 4º ANOS DO ENSINO MÉDIO NO CHILE

Resumo

Neste estudo, foi analisada a representação de gênero e sua vinculação com o Objetivo de Desenvolvimento Sustentável (ODS) 5 em tarefas de matemática em livros didáticos do 3º e 4º ano do ensino médio no Chile. O objetivo foi avaliar a integração da perspectiva de gênero em tarefas derivadas de atividades estatísticas e de probabilidade do currículo de matemática do 3º e 4º anos do Ensino Secundário no Chile, em relação ao desenvolvimento sustentável. Para isso, foi realizada uma análise de conteúdo das tarefas selecionadas em termos de gênero, ação principal, trabalho realizado e sua vinculação com o ODS 5 no âmbito da Educação para o Desenvolvimento Sustentável (EDS) com essas tarefas. Os resultados mostram uma diminuição na representação de personagens femininas do 3º ao 4º ano e um aumento notório em tarefas sem especificação de gênero e quase nenhuma vinculação com o ODS 5. Isso sugere a necessidade de incluir tarefas com maior diversidade na representação de gênero e ajustar materiais para garantir uma representação equitativa e evitar a perpetuação de estereótipos de gênero no contexto educacional.

Palavras-chave: livro didático, Ensino Secundário, estatística e probabilidades, gênero, educação para o desenvolvimento sustentável.

Chia Shih Su

Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.

ciaushih@ucm.cl

<https://orcid.org/0000-0002-1446-0513>

Profesora de Matemática y Astronomía por el Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. Licenciada en Matemática Aplicada por la Universidad Nacional de la Matanza, Buenos Aires, Argentina. Magíster en Didáctica de la Matemática con mención en Enseñanza Superior y Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad Católica del Maule, Talca, Chile. En su trayectoria profesional, ha coordinado el área de matemática y colaborado como profesora voluntaria en el Proyecto Brote durante los años 2017 y 2018, proyecto que posteriormente se institucionalizó. También ha participado como coinvestigadora en el proyecto de investigación Fondecyte N°1900120394. Su línea de investigación se enfoca en la formación de profesores para la enseñanza de estadística y probabilidad, con especial atención en la integración del ODS 5 en el marco de la EDS. Adicionalmente, se dedica a la modelación matemática de temas relacionados con la salud y a la investigación en filosofía pedagógica confucianista.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y SU APROXIMACIÓN DE ACCESIBILIDAD EN TEXTOS ESCOLARES CHILENOS DE 4° BÁSICO PARA ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL

Juan Luis Piñeiro G.
Caroline Contreras O.

RESUMEN

Los textos escolares son una de las herramientas mayormente utilizadas por los profesores para lograr el currículo pretendido. Este trabajo tiene por objeto caracterizar las adaptaciones de los gráficos estadísticos en el texto de 4° básico para estudiantes ciegos. Para ello, llevamos a cabo un análisis documental, usando la técnica del análisis de contenido inductivo a 61 actividades que se realizan en torno a 15 gráficos en el texto Sumo Primero de cuarto básico. Los resultados muestran que se trabajan los gráficos que establecen el currículo pero con errores y usando mayormente un nivel de lectura dentro de los datos. Asimismo, las aproximaciones de accesibilidad utilizadas son la inclusión de alternativas textuales, generación de alternativas táctiles y presentaciones multimodales. Concluimos que los procesos de adaptación de textos escolares necesitan de un trabajo colaborativo entre especialistas de la discapacidad visual y de la educación matemática.

Palabras clave: textos escolares, estudiantes ciegos, gráficos estadísticos, aproximaciones de accesibilidad.

INTRODUCCIÓN

La *alfabetización estadística* promueve el desarrollo de ideas y conocimientos estadísticos elementales necesarios para desenvolverse en las sociedades actuales (Gal, 2002). Según Batanero et al. (2013) la estadística es parte fundante de nuestra cultura y considera un *sentido estadístico* que se compone de una serie de razonamientos y conocimiento que deben construirse en forma progresiva desde las primeras edades. En esta línea, Ruíz-Hidalgo y Serrano (2015) señalan que el *sentido estocástico* comprende el sentido utilizado en situaciones no deterministas con la finalidad de obtener unas conclusiones coherentes. Para ello, un ciudadano combina conocimientos de la estadística, i.e., el ciclo de investigación; y conocimientos de la probabilidad para realizar inferencias fundadas (Ruíz-Hidalgo y Serrano, 2015). Por tanto, es entendible que este sentido estocástico se encuentre presente en el currículo de matemáticas chileno bajo el supuesto que aporta en la formación de ciudadanos críticos, capaces de leer y analizar datos que les permita reconocer cuando la información es comunicada de manera engañosa o inapropiada (Vásquez, 2021).

Para garantizar la inclusión de estudiantes con discapacidad visual en el sistema educativo chileno, se ha establecido la Ley 20.422 (Ministerio de Planificación, 2010), que promueve la igualdad de oportunidades e inclusión social de personas con discapacidad. Esta normativa, junto con la Ley N°20.845 de Inclusión Escolar (Ministerio de Educación, 2015b), el Programa de Integración Escolar (PIE) y el Decreto N° 83 (Ministerio de Educación, 2015a), son pilares fundamentales para promover el respeto a la diversidad y en el currículo nacional. Desde la implementación de este último decreto, el currículo regular de matemáticas ha de ser impartido en las escuelas especiales y particularmente en las escuelas para estudiantes ciegos y/o con baja visión. Es importante señalar que una de las acciones del Ministerio de Educación para implementar este currículo tiene que ver con la entrega de textos escolares gratuitos a todos los estudiantes. Desde el año 1989, el Ministerio de Educación, proporciona los textos escolares adaptados en Braille y macrotipo, para que los estudiantes con discapacidad visual puedan acceder y progresar en el currículo nacional.

En la Educación Básica, se busca el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático. Particularmente, la habilidad de representar puede ser compleja para los estudiantes, pues se espera que estos “aprendan a usar representaciones pictóricas, como diagramas, esquemas y gráficos, para comunicar cantidades, operaciones y relaciones, y luego que conozcan y utilicen el lenguaje

simbólico y el vocabulario propio de la disciplina” (Ministerio de Educación, 2012, p. 32). En este sentido, los gráficos estadísticos presentan un desafío significativo para las personas ciegas, ya que la información visual que caracteriza los gráficos y pictogramas requiere implementar diferentes estrategias pedagógicas y tecnológicas para la representación de estos, ya sea de manera táctil, auditiva o mediante otros medios sensoriales. Esto con el fin de garantizar que los estudiantes ciegos puedan interpretar y comprender la información estadística de manera efectiva en las diferentes asignaturas del currículum nacional, pero particularmente en la asignatura de matemática.

Por tanto, parte importante de lo que el currículum establece como metas de aprendizajes tiene relación con los gráficos estadísticos. La interacción de las personas ciegas con los gráficos estadísticos ha sido estudiada ampliamente. Por ejemplo, Klingenberg et al. (2019), en su revisión, señalan que los estudiantes ciegos requieren tiempo adicional, instrucción directa y retroalimentación precisa para saber si han terminado una tarea de gráficos. Una de sus conclusiones tiene relación con que los estudiantes ciegos se beneficiarían de una exposición temprana a materiales táctiles. Esta es una de las mismas conclusiones que reportan Zebehazy y Wilton (2014) cuando señalan que los profesores se muestran escépticos respecto a las posibilidades que proveen los gráficos táctiles para que los estudiantes ciegos puedan demostrar sus conocimientos, pero se mostraron favorables respecto a los beneficios de los gráficos táctiles para ayudar a la comprensión de descripciones y que su enseñanza debe partir desde edades tempranas. No obstante, los participantes de este estudio señalan no poseer el tiempo suficiente para su enseñanza y que carecen del conocimiento didáctico para su adecuada implementación.

En este contexto, el Ministerio de Educación chileno provee a los estudiantes de escuelas especiales para ciegos de textos escolares que han sido transliterados a Código Braille o adaptados para estudiantes con baja visión. Al respecto la literatura señala que, al adaptar gráficos estadísticos, los gráficos táctiles presentaban diferencias significativas a los impresos o muchas veces simplemente se omitían (Smith y Smothers, 2012; Silva y Carvalho, 2022). Por tanto, los estudiantes ciegos perdían acceso a información para interpretar y comprender información estadística. Aspecto que los mismos usuarios de estos gráficos táctiles ya han reportado (Rosenblum y Herzberg, 2015). Si bien los textos, por su naturaleza impresa presentan dificultades intrínsecas para su accesibilidad (Gutiérrez et al., 2024), se esperaría que estos elementos estuviesen recogidos en una adaptación para esta población. No obstante, el análisis de estos textos

no ha suscitado interés en la comunidad. En su estudio, Silva y Carvalho (2022) muestran que los textos presentan diferentes errores de adaptación entre los que se encuentran mayoritariamente los errores de escala. Los autores señalan que, si bien estos errores pueden deberse al sistema Braille en sí, aún no sabemos mucho de estos procesos de adaptación. Con el objeto de aportar en este sentido, en este trabajo nos proponemos caracterizar los gráficos estadísticos y su aproximación de accesibilidad un texto escolar chileno de 4º básico para estudiantes ciegos.

PERSPECTIVA TEÓRICA

El marco referencial que utilizamos en este trabajo tiene tres aristas: el tipo de gráfico presente en el libro de texto, su nivel de lectura involucrado y sus aproximaciones de accesibilidad.

Tipos de gráficos y sus niveles de lectura

El currículo chileno de educación primaria reporta los siguientes tipos de gráficos en sus directrices, a saber, pictogramas en primero de primaria; pictogramas con escala y gráficos de barra simple en segundo; pictogramas, gráficos de barra simple con escala y diagramas de puntos en tercero; pictogramas y gráficos de barra simple con escala en cuarto; gráficos de barra simple, gráficos de línea y diagramas de tallo en quinto; y diagramas de puntos, de tallo y hojas, barra doble y circulares en sexto (Díaz-Levicoy et al., 2016). Al respecto, Friel et al. (2001) señalan que los gráficos estadísticos presentan al menos cuatro componentes:

- Título y etiquetas: contenido contextual que muestra las variables representadas.
- Marco del gráfico: ejes, escalas y marcas de referencia en cada eje; dando información sobre las magnitudes usadas en el gráfico.
- Especificadores: elementos que se utilizan para representar los datos. Por ejemplo, los puntos en el diagrama de puntos y de dispersión; entre otros.
- Fondo: se refiere a los colores, cuadrículas e imágenes sobre las que se representa el gráfico estadístico.

Asimismo, estos autores plantean que la lectura de estos gráficos puede ser clasificada en cuatro niveles:

- Leer los datos: lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico.

- Leer dentro de los datos: lectura de información implícita del gráfico, implicando la aplicación de procedimientos matemáticos (comparaciones, adiciones, etc.).
- Leer más allá de los datos: lectura de la información que no está representada en el gráfico y que no se puede deducir con operaciones o comparaciones, sino que se debe inferir o predecir, entre otros.
- Leer detrás de los datos: valoración crítica de las conclusiones, la recogida y de organización de datos.

Aproximaciones de accesibilidad de gráficos estadísticos

La revisión realizada por Alcaraz et al. (2020) permite identificar cuatro aproximaciones para favorecer la accesibilidad de los gráficos estadísticos de las personas que presentan discapacidad visual. Estas estrategias son: inclusión de alternativas textuales, la sonificación, la generación de alternativas táctiles y la implementación de presentaciones multimodales.

Las *alternativas textuales*, corresponden a una modalidad que dispone de cuatro aproximaciones para entregar la información del contenido de los gráficos estadísticos:

- El *título de un gráfico* se presenta de forma breve y precisa que introduce a su contenido, pero no reemplaza la información del gráfico.
- Los *textos alternativos* son descripciones breves que sirven como síntesis del contenido de los gráficos, idealmente conciso.
- Las *descripciones largas* son explicaciones que se utilizan cuando se necesita más detalle.
- Las *tablas*, son otros recursos para ofrecer una alternativa textual a los gráficos, que contienen los mismos datos en formato texto.

La *sonificación*, por su parte, es una modalidad que propone la representación de la información a través del sonido, pero en la que se prescinde la voz. Esta alternativa permite a las personas con discapacidad visual acceder a las formas curvas, pero se utiliza de manera limitada para gráficos/diagramas de dispersión y especialmente para personas ciegas.

Las *alternativas táctiles o hápticas*, constituyen una modalidad que permite "convertir la información digital en algo tangible" (Alcaraz et al., 2020, p. 66), lo que facilita la exploración y análisis de los datos. Esta modalidad se utiliza en los gráficos de línea elevada y los gráficos en

relieve. Por ejemplo, los gráficos de línea elevada representan los límites de cada elemento del gráfico mediante líneas elevadas, mientras que los gráficos en relieve representan la intensidad o color de los elementos a través de diferentes alturas.

Las *presentaciones multimodales* son una modalidad que propone a la persona ciega “la posibilidad de acceder al contenido mediante una o varias combinaciones basadas en el texto, el sonido o el tacto” (Kouroupetroglou y Tsonos, 2008, citado en Alcaraz et al., 2019, p. 67). Esta modalidad busca la accesibilidad de gráficos para personas que presenten diferentes grados de discapacidad visual, a través de diversas estrategias, como la verbalización de información adicional o el uso de esquemas sonoros, uso de iluminación para presentar ejes y cuadrículas, soporte de voz junto con presentaciones hápticas, entre otras. Estas opciones favorecen la accesibilidad universal, permitiendo que la información sea accesible para todas las personas, independiente si presentan desafíos asociados o no a una discapacidad.

DISEÑO METODOLÓGICO

Para lograr el objetivo de caracterizar las adaptaciones de los gráficos estadísticos en el texto de 4° de primaria para estudiantes ciegos, hemos utilizado un enfoque cualitativo no interactivo. Según McMillan y Schumacher (2005) este tipo de estudios se caracterizan por la realización de descripciones y levantamiento de interpretaciones sobre las fuentes seleccionadas. Por su parte, Cohen, Manion y Morrison (2018) lo definen como un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos. Por tanto, un diseño de este tipo permitió el logro del objetivo en el sentido que un análisis riguroso de fuentes seleccionadas (texto de 4° de primaria) permitirá realizar descripciones y levantar interpretaciones rigurosas para caracterizar las adaptaciones de los gráficos para estudiantes ciegos.

Muestra y unidades de análisis

Esta investigación documental toma como muestra los textos escolares de matemáticas que entrega el Ministerio de Educación a las escuelas especiales y escuelas en que estén matriculados estudiantes ciegos. El texto seleccionado fue el de 4° básico de la asignatura de matemática del año 2023. En este sentido, el texto de cuarto básico fue seleccionado de manera teórico - intencional (Bisquerra, 2009), basado en el rango de la información que representa la integración

de los objetivos de aprendizajes que se esperan para los niveles de primero, segundo y tercero básico, para que al final de cuarto básico logren analizar, representar e interpretar gráficos estadísticos. El texto corresponde a la serie Sumo Primero y consta de 8 tomos en su versión adaptada en el sistema de lectoescritura Braille con láminas táctiles para estudiantes con discapacidad visual. Dicho texto es elaborado colaborativamente entre el Ministerio de Educación y la Universidad Tecnológica Metropolitana, a través del Centro de Recursos de Cartografía Táctil. De estos tomos hemos analizados el Tomo 2c y 2d que contienen las unidades de Estadística y Probabilidad. Cabe destacar que los textos adaptados son presentados tanto en tinta (español) y en su configuración Braille. Esta presentación hace que, en general, la página izquierda esté en tinta y la página derecha en Braille.

Las unidades de análisis se corresponden con las actividades de las tareas matemáticas presentes en las unidades de estadística y probabilidad. Entendemos que una tarea matemática escolar es una demanda estructurada de actuación que el o la profesora proporciona a los y las escolares con carácter intencional, y con motivo de dicha tarea, profesores/as y estudiantes realizan actividades que se pueden desarrollar de manera individual o en grupo (Gómez y Romero, 2015). Por tanto, hemos identificado las tareas relativas a los gráficos estadísticos presentes en las unidades de estadística y probabilidad del texto de 4° básico y posteriormente, hemos diseccionado cada tarea en actividades o preguntas específicas. En este sentido, no analizamos las tareas en su conjunto sino en su mínima demanda de actuación para el estudiante con el fin de dar un análisis más detallado. Este proceso nos permitió identificar 61 actividades relativas a gráficos estadísticos en el texto seleccionado.

Categorías y análisis

Para el análisis utilizamos la técnica del análisis de contenido, pues nos permite estudiar la naturaleza del discurso con detalle y profundidad, pudiendo descubrir la estructura interna que subyace en la muestra de documentos (Rico y Fernández-Cano, 2013). Concretamente, hemos utilizado un enfoque *concept-driven* (Kuckartz, 2019) para codificar las unidades de análisis. Para las categorías de este análisis *concept-driven* o deductivo, se utilizaron las que se muestran en la Tabla 1.

Para cuidar la validez del estudio, los autores codificaron por separado cada unidad de análisis, posteriormente las codificaciones fueron comparadas y las discrepancias fueron discutidas hasta llegar a acuerdo.

Tabla 1

Síntesis categorías y subcategorías de análisis

Categorías de análisis	Subcategorías de análisis
Tipo de gráfico (Díaz-Levicoy et al., 2016)	Barras Líneas Líneas acumuladas Pictograma Sectores Histograma Puntos Dispersión Pirámide de población
Niveles de lectura (Curcio, 1987; Friel et al., 2001)	Leer los datos Leer dentro de los datos Leer más allá de los datos Leer detrás de los datos
Aproximaciones de accesibilidad de gráficos (Alcaraz et al., 2020)	Alternativas textuales Sonificación Alternativas táctiles Presentaciones multimodales

RESULTADOS

Los resultados los hemos organizado de acuerdo con los tres elementos que fueron analizados en las actividades relacionadas a gráficos estadísticos.

Tipos de gráficos

Respecto a los tipos de gráficos presentes en el texto escolar de 4° básico adaptado al sistema Braille, encontramos que se trabajan pictogramas y gráficos de barra simples. La Tabla 2 muestra la frecuencia de cada tipo de gráfico, haciendo visible que existe una focalización en los gráficos de barra. Además, encontramos una actividad para la cual no fue posible identificar el tipo de gráfico al que correspondía.

En los gráficos de barras simples identificamos formato horizontal y vertical. Además, fue posible observar algunos errores como la falta de rotulación de ejes o falta de título. Asimismo, en

algunos gráficos se señalaba que correspondía a uno de barras, pero en la práctica se trataba de un pictograma. La Figura 1 muestra lo que el texto etiqueta como gráfico de barra pero que en su consigna se describe con las características de un pictograma. Además, este no presentaba sus ejes. Este tipo de gráficos fue común en las actividades analizadas.

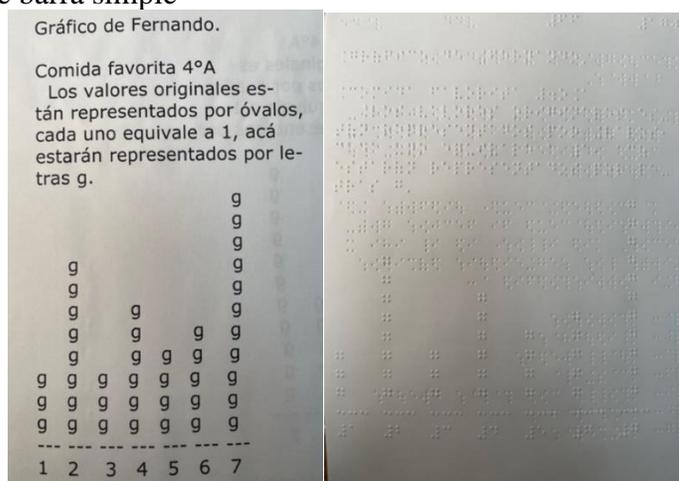
Tabla 2.

Tipos de gráficos presentes y su frecuencia

Tipo de gráfico	Frecuencia (n=15)	Frecuencia porcentual
Barra simple	10	66,7
Pictograma	4	26,7
No identificable	1	6,6

Figura 1.

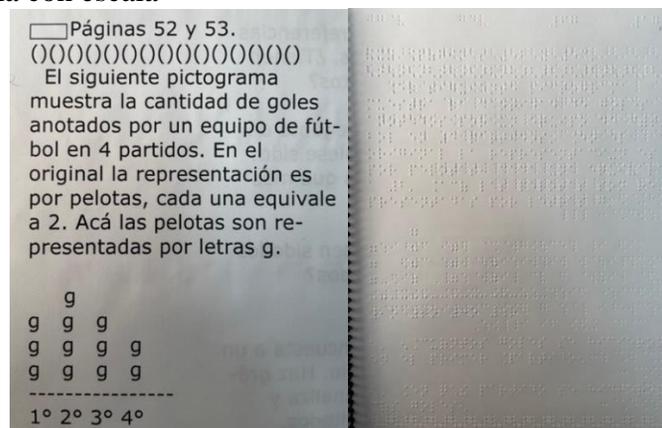
Ejemplo de gráfico de barra simple



Fuente: Tomado de Ministerio de Educación y Centro de Cartografía Táctil UTEM

Figura 2.

Ejemplo de pictograma con escala



Fuente: Tomado de Ministerio de Educación y Centro de Cartografía Táctil UTEM

Por otra parte, hemos observado la presencia de cuatro pictogramas con y sin escala. La Figura 2 muestra un pictograma con escala que no presenta título ni el rótulo de sus ejes. Además, la consigna presenta información alusiva al pictograma del texto no adaptado, pero que no aporta a la comprensión de pictograma.

Por último, reseñamos una actividad para la cual no fue posible identificar a qué tipo de gráfico correspondía. En ella, la consigna señala que se presentan lanzamientos de monedas en diferentes gráficos. Sin embargo, al momento de mostrar los gráficos se muestra opciones con sus respectivas frecuencias (ver Figura 3).

Figura 3.

Ejemplo de actividad no identificable

5. Sofía y Sebastián realizaron un experimento. Lanzaron 25 veces dos monedas al aire y registraron los resultados.
¿Cuál de estos puede ser el gráfico del experimento?
Justifica.

A continuación, los datos de cada gráfico:

Gráfico 1:

- Cara cara: 6
- Sello cara: 13
- Sello sello: 6

Gráfico 2:

- Cara cara: 14
- Sello cara: 5
- Sello sello: 6

Gráfico 3:

- Cara cara: 7
- Sello cara: 7
- Sello sello: 8

The right image shows the same text in Braille format, including the question and the three data sets for Gráfico 1, 2, and 3.

Fuente: Tomado de Ministerio de Educación y Centro de Cartografía Táctil UTEM

Niveles de lectura

Los niveles de lectura fueron identificados en diferentes actividades en donde existe un énfasis en la lectura dentro de los datos, es decir, en la realización de cálculos que permitan encontrar un dato. Por otra parte, el nivel con menor presencia fue el relativo a leer más allá de los datos.

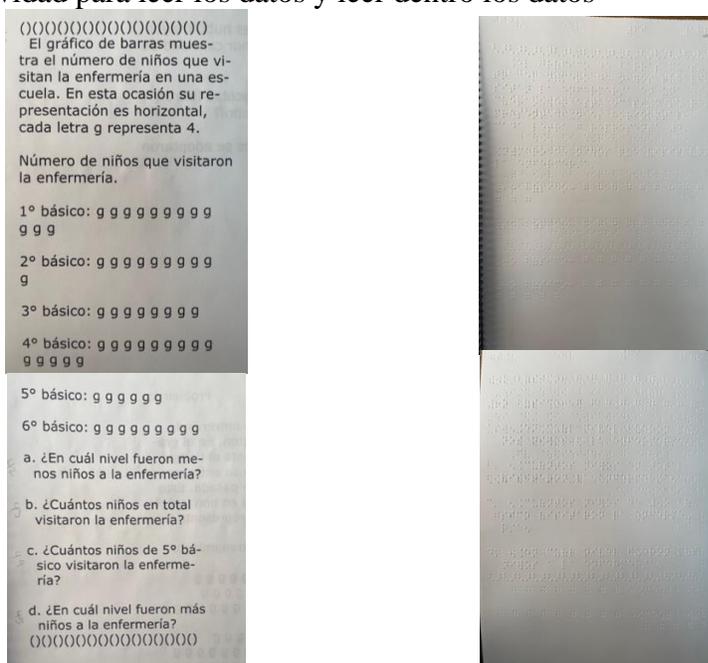
La Figura 4 muestra ejemplos para leer los datos y leer dentro de los datos. Este era el tipo de actividades que son representativas de ambos niveles. Para el primer nivel, se presenta un

gráfico y se pide observarlo para luego hacer preguntas que se responden solo con leer el gráfico y luego preguntas que se responden con algún cálculo entre los datos que aparecen en el gráfico.

Tabla 3.
Niveles de lectura

Nivel de lectura	Frecuencia (n=61)	Frecuencia porcentual
leer los datos	17	27,9
leer dentro de los datos	24	39,3
leer más allá de los datos	5	8,2
leer detrás de los datos	15	24,6

Figura 4.
Ejemplo de actividad para leer los datos y leer dentro los datos

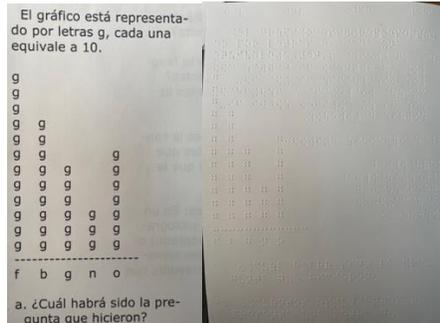


Fuente: Tomado de Ministerio de Educación y Centro de Cartografía Táctil UTEM

Sobre el nivel de lectura más allá de los datos, y el menos presente, identificamos solo 5 actividades. La Figura 5 muestra un ejemplo representativo que busca que el estudiante identifique la pregunta, por tanto, demanda una comprensión del contexto y el gráfico en su conjunto.

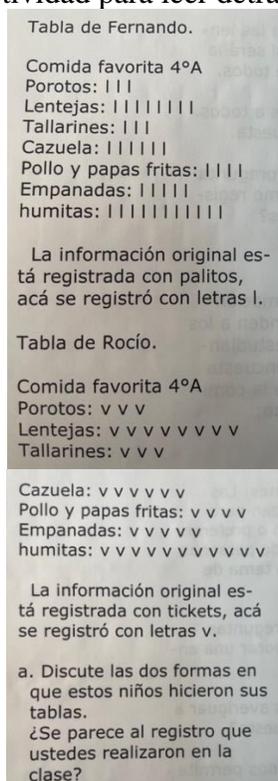
Finalmente, sobre el nivel de lectura más allá de los datos, la Figura 6 muestra un ejemplo que es representativo de esta categoría. En el gráfico que se solicita al estudiante que realice una comparación entre dos representaciones, en este caso, conteos.

Figura 5.
Ejemplo de actividad para leer más allá de los datos



Fuente: Tomado de Ministerio de Educación y Centro de Cartografía Táctil UTEM

Figura 6.
Ejemplo de actividad para leer detrás de los datos



Fuente: Tomado de Ministerio de Educación y Centro de Cartografía Táctil UTEM

Aproximaciones de accesibilidad

En el texto escolar adaptado, analizamos los 15 gráficos presentes y encontramos tres modalidades de accesibilidad. La tabla 3 destaca el criterio de alternativa textual presente en las modalidades de título y texto alternativo, sin embargo, no fue posible identificar descripciones detalladas, alternativas en forma de tabla y etiquetado gráfico dinámico. Respecto al resto de aproximaciones,

encontramos alternativas táctiles y presentaciones multimodales, pero no se emplea la modalidad de sonificación.

Tabla 4.

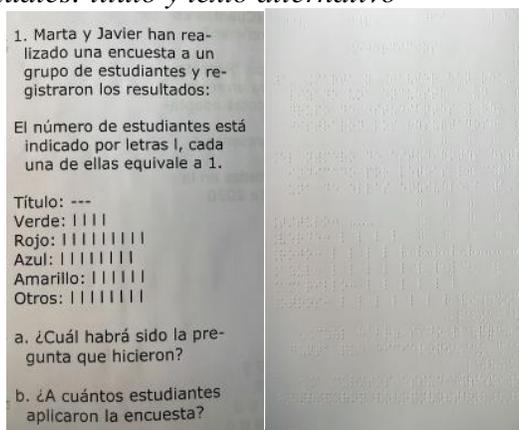
Aproximaciones de accesibilidad

Alternativa textual				Alternativas táctiles		Presentaciones multimodales	
Título		Texto alternativo		F	%	F	%
F (n=15)	%	F (n=15)	%	F (n=15)	%	F (n=15)	%
10	66.7	15	100	14	93,3	14	93,3

En la figura 7, observamos un ejemplo de la modalidad de alternativas textuales en las modalidades de título y texto alternativo, que se utilizan en la tarea solicitada al estudiante. Sin embargo, estas modalidades no cumplen completamente su propósito, ya que la actividad no proporciona un contexto adecuado para que el estudiante comprenda si se trata de un gráfico o un pictograma u otra representación.

Figura 7.

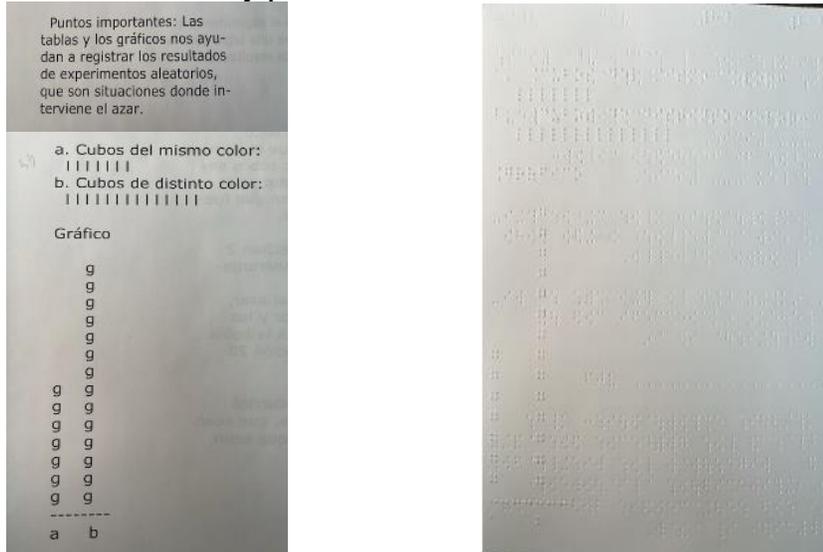
Ejemplo de alternativas textuales: título y texto alternativo



Fuente: Tomado de Ministerio de Educación y Centro de Cartografía Táctil UTEM

En la Figura 8, se muestra un ejemplo de alternativas táctiles y presentación multimodal en una misma tarea. En cuanto a las alternativas táctiles, se incluye información en relieve del gráfico de barras, utilizando puntos en relieve correspondientes a la letra "g" en Braille. Sin embargo, esta información podría resultar difícil de comprender para el estudiante. En cuanto a la presentación multimodal, además de la información táctil, se incorporan instrucciones escritas que facilitan la comprensión del gráfico.

Figura 8.
Ejemplo de alternativas táctiles y presentación multimodal



Fuente: Tomado de Ministerio de Educación y Centro de Cartografía Táctil UTEM

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este trabajo tenía por objetivo caracterizar los gráficos estadísticos y su aproximación de accesibilidad en un texto escolar de 4° básico para estudiantes ciegos. En este contexto, nuestro análisis nos permite elucidar que el texto de 4° básico se alinea con el currículo chileno (Ministerio de Educación, 2012) en el sentido que los tipos de gráficos incluidos cumplen con los requisitos establecidos en dicho documento. Este aspecto es importante pues sería un indicativo de que los documentos de disseminación curricular están alineados en las escuelas especiales. No obstante, hemos identificado algunos aspectos preocupantes, principalmente relativos a la rigurosidad respecto a elementos estadísticos con que se adapta el texto escolar. Un ejemplo de ellos tiene relación con los numerosos gráficos sin título o sin las etiquetas de sus ejes. Este hecho es relevante pues como señalan Field et al. (2001) estos elementos tienen un rol crítico en la comprensión de los gráficos. Por tanto, es importante que en el proceso de adaptación de este tipo de textos escolares participen especialistas en la didáctica específica, pues como ya se ha señalado, en los procesos de adaptación se omite información (Smith y Smothers, 2012; Silva y Carvalho, 2022) que, si bien se realizaría por cuestiones de espacio, pueden mermar el acceso a la información de estudiantes ciegos. Más aún cuando los estudios previos señalan que los docentes especialistas en discapacidad visual se sienten poco preparados para el trabajo con gráficos (Zebehazy y Wilton, 2014).

Respecto a los niveles de lectura, nuestros resultados muestran similitudes con los de Díaz-Levicoy et al. (2016) en cuanto al foco en el leer dentro de los datos y la despreocupación por leer más allá de los datos. No obstante, creemos que podría tener un impacto mayor en el estudiantado ciego pues si a esto le sumamos errores disciplinarios, las oportunidades de aprender sobre procesos estadísticos se ven más perjudicadas en estudiantes ciegos. Por otra parte, a diferencia de los textos escolares regulares en que existen un bajo porcentaje de actividades que propicien la lectura detrás de los datos (Díaz-Levicoy et al., 2016), nuestros resultados muestran que al menos en un cuarto de los gráficos presentados se promueve este tipo de preguntas. Creemos que este resultado tiene relación con las características específicas de estudiantes ciegos y el proceso de adaptación, en donde se hace necesario que los procesos metacognitivos de la representación de los datos tomen mayor preponderancia. No obstante, el porcentaje aún es bajo.

Los resultados respecto a las aproximaciones de accesibilidad en los textos escolares chilenos de cuarto básico muestran que, si bien se han implementado algunas estrategias como las alternativas textuales, táctiles y las presentaciones multimodales, aún existe un margen de mejora en cuanto a la diversificación de las modalidades de acceso, incluyendo la incorporación de descripciones más detalladas y alternativas en formato de tabla. En el caso de la descripción de información adicional y la sonificación, se requiere un análisis que va más allá de esta investigación documental, debido a que ambas estrategias, podrían ser implementadas por los profesores al utilizar el texto adaptado en clases. Según Alcaraz et al. (2020), la combinación de alternativas hápticas con la verbalización de información adicional o la sonificación puede ser una solución para mitigar las limitaciones de accesibilidad universal propias del contenido para personas ciegas. Asimismo, el texto analizado no incluye criterios de accesibilidad como el uso de presentaciones multimodales interactivas, gráficos en relieve, lectores de pantallas y otros elementos tiflotecnológicos. Si bien muchos de estos elementos corresponden a la naturaleza de los textos (Gutiérrez et al., 2024), estas herramientas mejorarían significativamente la accesibilidad a los gráficos estadísticos para los estudiantes con discapacidad visual.

Finalmente, este primer acercamiento a las adaptaciones de documentos de diseminación curricular es relevante, pues permite obtener información útil para la toma de decisiones. No obstante, sería necesario realizar un estudio de mayor envergadura que incluya la totalidad de textos escolares para tener una visión global de los procesos de adaptación de textos escolares y que el análisis de un curso presentado aquí, no puede ofrecer. Respecto a esto, hacemos un llamado a que

en estos procesos de adaptación participen especialistas de ambas disciplinas, es decir, de la discapacidad visual y de la educación matemática, de manera colaborativa y conjunta. Desde nuestra perspectiva, esto sería un elemento vital para lograr que el acceso a la información de estudiantes ciegos sea tanto apegado a sus particularidades como a la rigurosidad requerida.

Agradecimientos

Este trabajo es realizado en el marco del Fondecyt Iniciación 11240835.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcaraz, R., Ribera, M. y Granollers, T. (2020). La accesibilidad de los gráficos estadísticos para personas con baja visión y visión cromática deficiente: revisión de alcance y perspectivas. *Interacción, Revista de AIPO*, 1, 59-75.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- Bisquerra, R. (2014). *Metodología de la investigación educativa* (4a ed.). La Muralla.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8a ed). Routledge.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M.M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema*, 30(55), 713-737. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20>
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158. <https://doi.org/10.2307/749671>
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25. <https://doi.org/10.2307/1403713>
- Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 61-88). Pirámide.
- Gutiérrez, X., Souza de Alencar, E. y Díaz-Levicoy, D. (2024). Análisis sobre la accesibilidad de las lecciones de Estadística en libro de texto adaptado de educación primaria. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 14(1), 1-16. <https://doi.org/10.37001/ripem.v14i1.3282>
- Klingenberg, O.G., Holkesvik, A.H. y Augestad, L.B. (2019). Research evidence for mathematics education for students with visual impairment: A systematic review. *Cogent Education*, 6(1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2019.1626322>
- Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 181-198). Springer.

- McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual* (5a ed.). Pearson Addison Wesley.
- Ministerio de Educación (2012). *Bases curriculares educación básica*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación (2015a). *Decreto No83/2015. Aprueba criterios y orientaciones de adecuación curricular para estudiantes con necesidades educativas especiales de Educación Parvularia y Educación Básica*. División de Educación General y Unidad Educación Especial.
- Ministerio de Educación (2015b). Ley número 20.845. De inclusión escolar que regula la admisión de los y las estudiantes, elimina el financiamiento compartido y prohíbe el lucro en establecimientos educacionales que reciben aportes del Estado, *Diario Oficial de la República de Chile*, 41.177, 1-16.
- Ministerio de Planificación. (2010). Ley N°20.422. Establece normas sobre igualdad de oportunidades e inclusión social de personas con discapacidad. *Diario Oficial de la República de Chile*, 39.583, 3-9.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Comares.
- Rosenblum, L.P. y Herzberg, T.S. (2015). Braille and tactile graphics: Youths with visual impairments share their experiences. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 109(3), 173-184. <https://doi.org/10.1177/0145482X1510900302>
- Ruiz-Hidalgo, J.F. y Serrano, L. (2015). Sentido estocástico. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 169-184). Pirámide.
- Silva, M.D. y Carvalho, L.M.T.L. (2022). Livros didáticos em Braille: uma análise das adaptações de gráficos estatísticos para estudantes cegos. *Revista Baiana de Educação Matemática*, 3, 01-15, e202211. <https://doi.org/10.47207/rbem.v3i01.15593>
- Smith, D.W. y Smothers, S.M. (2012). The role and characteristics of tactile graphics in secondary mathematics and science textbooks in braille. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 106(9), 543-554. <https://doi.org/10.1177/0145482X1210600905>
- Vásquez, C. (2021). Editorial. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(4), 116-118. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.100>
- Zebehazy, K.T. y Wilton, A.P. (2014). Quality, importance, and instruction: The perspectives of teachers of students with visual impairments on graphics use by students. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 108(1), 5-16. <https://doi.org/10.1177/0145482X1410800102>

STATISTICAL GRAPHS AND THEIR APPROXIMATION OF ACCESSIBILITY IN CHILEAN SCHOOL TEXTBOOKS OF 4TH GRADE FOR STUDENTS WITH VISUAL IMPAIRMENT

Abstract

School textbooks are one of the tools most used by teachers to achieve the intended curriculum. This paper aims to characterize the adaptations of statistical graphics in the 4th grade textbook for blind students. For this purpose, we carried out a documentary analysis, using the technique of inductive content analysis to 61 activities that are carried out around 15 graphs in the text Sumo Primero of fourth grade. The results show that the graphics established by the curriculum are worked on but with errors and using mostly one reading level within the data. Also, the accessibility approaches used are the inclusion of textual alternatives, generation of tactile alternatives and multimodal presentations. We conclude that the process of adapting school texts requires collaborative work between specialists in visual impairment and mathematics education.

Keywords: school textbooks, blind students, statistical graphics, accessibility approaches.

GRÁFICOS ESTATÍSTICOS E SUA APROXIMAÇÃO DE ACESSIBILIDADE EM TEXTOS ESCOLARES CHILENOS DA 4ª SÉRIE PARA ALUNOS COM DEFICIÊNCIA VISUAL

Resumo

Os livros didáticos são uma das ferramentas mais utilizadas pelos professores para cumprir o currículo pretendido. Este trabalho tem como objetivo caracterizar as adaptações de gráficos estatísticos no livro didático da 4ª série para alunos cegos. Para tanto, realizamos uma análise documental, utilizando a técnica de análise indutiva de conteúdo, de 61 atividades que são realizadas em torno de 15 gráficos no texto Sumo Primero para a quarta série. Os resultados mostram que os gráficos estabelecidos no currículo são trabalhados, mas com erros e usando principalmente um nível de leitura dentro dos dados. Além disso, as abordagens de acessibilidade utilizadas são a inclusão de alternativas textuais, a geração de alternativas táteis e apresentações multimodais. Concluimos que os processos de adaptação de textos escolares exigem trabalho colaborativo entre especialistas em deficiência visual e educação matemática.

Palavras-chave: textos escolares, alunos cegos, gráficos estatísticos, abordagens de acessibilidade.

Juan Luis Piñeiro G.

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile.

juanluis.pineiro@umce.cl

<https://orcid.org/0000-0002-9616-3925>

Licenciado en Educación y Profesor de Educación General Básica con especialidad en educación matemática por la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Postítulo en Educación Matemática por la Universidad de Santiago de Chile. Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Doctor por la Universidad de Granada, España en la línea de investigación de Didáctica de la Matemática. Es Profesor Asociado en el Departamento de Educación Diferencial en la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Asimismo, es Editor Asociado en “PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática”. Ha participado en numerosos proyectos de investigación tanto nacional como internacionalmente. Actualmente es Investigador Principal del Fondecyt de Iniciación 11240835 “Aulas de matemáticas inclusivas: conocimiento matemático para la enseñanza de profesores de Educación Especial”.

Caroline Andrea Contreras Osorio

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile.

caroline.contreras@umce.cl

<https://orcid.org/0000-0002-0503-9524>

Educadora Diferencial con especialidad en Problemas de la Visión por la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Magister en Gestión Educacional por la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Doctora © en Educación por la Universidad Academia de Humanismo Cristiano. Académica Asociada del Departamento de Educación Diferencial en la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Ha participado en proyectos de intervención referidos a la inclusión de personas en situación de discapacidad visual. Ha sido asesora en temas de accesibilidad y derechos de estudiantes en situación de discapacidad visual en educación auperior. Ha participado como coordinadora responsable en proyectos de inclusión social de personas con discapacidad en alianza con SENADIS y MINEDUC.

ACERCAMIENTO A LA CONCORDANCIA ENTRE PROGRAMAS DE ESTUDIO Y LIBROS DE TEXTO EN ESTADÍSTICA EN CHILE. APROXIMACIÓN DESDE INFERENCIA INFORMAL

Nicolás Sánchez Acevedo

Blanca R. Ruiz Hernández

RESUMEN

Se explora la coherencia entre los objetivos de aprendizaje y las actividades que se proponen al profesor en los programas de estudio de 7.º y 8.º básico y los libros de texto en los mismos niveles en la unidad de estadística. Se considera dos perspectivas de análisis, centradas en la comprensión de conceptos estadísticos, por una parte, la inferencia informal, y por otra, como complemento, la perspectiva de medios tecnológicos para simular fenómenos basados en datos. La metodología seguida fue cualitativa bajo una técnica de análisis de contenido. Los resultados muestran que la mayor cantidad de actividades que se presentan en los programas de estudio y los libros de texto promueven un tratamiento lenguaje centrado en la muestra y en algunos casos específicos, las actividades dan la posibilidad de integración de conceptos de medidas de centro, posición y variación, apoyados por las tecnologías como un medio para la comprensión de estos conceptos. En cuanto a la incorporación de las tecnologías en los programas y libros de texto se encontró que tiene un fin instrumental, es decir, su incorporación da cuenta de un uso para simplificar cálculos, y no como un medio para promover y desarrollar el razonamiento de inferencia informal. Se finaliza discutiendo la relevancia de este tipo de trabajos a nivel curricular, centrando la importancia que tiene para el profesorado de matemática que enseña estadística.

Palabras clave: documentos curriculares, estadística, inferencia informal, tecnologías.

INTRODUCCIÓN

El análisis de recursos curriculares, en general, y de documentos curriculares, en particular (programas de estudio y libros de texto) es considerado relevante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Haggarty y Pepin, 2002; Pepin et al., 2013; Remillard, 2000); estos análisis pasan a ser medios de anclaje entre el currículo y el aula escolar (Fan et al., 2013) y un elemento basal en la enseñanza y el aprendizaje, tanto de la matemática, como de la estadística al profundizar en aspectos conceptuales y procedimentales.

En la actualidad el análisis curricular se ha expandido a diferentes recursos curriculares, donde además de incluir los libros y los programas de estudio de matemáticas (en papel) se han abordado libros y recursos digitales. Sin embargo, la investigación sobre documentos curriculares se ha focalizado mayoritariamente en la Matemática. Si bien hay abundante investigación en el área de estadística, ésta se ha concentrado en los libros de texto (análisis de actividades), considerando diferentes niveles educativos y temas estadísticos. En menor cuantía, se han enfocado en programas de estudio. Esta tendencia es planteada por Fan et al. (2013), Rezat (2024) y Rezat et al. (2021), quienes indican que la investigación sobre libros de texto es diversa, no es escasa y ha dejado de ser trivial, pero hay áreas que aun presentan poco desarrollo, en particular, (i) la profundización y uso de métodos más complejos, avanzados y sofisticados para proyectar a trabajos de mayor escala, y que incluyan casos múltiples, y (ii) direccionar la investigación hacia el uso y desarrollo de libros de texto digitales y documentos curriculares en general, que se aprecia como emergente.

De acuerdo con lo anterior, y dada la importancia que tiene el desarrollo de la investigación sobre documentos curriculares, algunos trabajos (aun escasos) han comenzado a explorar en el trabajo de documentos curriculares en estadística (e.g. Morales y Ruiz, 2013; Sánchez-Acevedo y Ruiz, 2020; Sánchez-Acevedo y Ruiz, 2022), los que han mostrado algunas relaciones entre objetivos en las directrices curriculares y las actividades de libros de texto, pero con un énfasis procedimental, limitando el desarrollo del razonamiento inferencial. En este último caso, además de otros aspectos para la enseñanza de la estadística (comprensión de las ideas de centro, variabilidad, muestreo, distribución etc.), promover y hacer *visible* los mecanismos de razonamiento inferencial en los estudiantes, se plantea la necesidad de que los profesores sean conscientes de ello, pues son ellos los encargados del diseño y planificación de la enseñanza, que

por lo general se da en relación con los documentos curriculares (programas de estudio y libros de texto) (Lloyd, 2009).

La inclusión de la inferencia informal y las tecnologías es planteada por diversos currículos escolares (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015; Franklin et al, 2007). NCTM (2000) plantea explícitamente, “seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos, usando simulaciones; desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos” (p. 48) en su estándar de análisis de datos y probabilidad. En Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics (GAISE, Franklin et al., 2007), en los niveles de desarrollo del aprendizaje de la estadística se alude a que “los estudiantes deben aprender cómo usar herramientas estadísticas básicas para analizar los datos y hacer inferencias informales al responder las preguntas” (p. 23), y en el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2015) se menciona que la unidad de probabilidad y estadística debe:

(...) responder a la necesidad de que los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos por medio de simulaciones [...] con la finalidad de formar alumnos críticos que utilicen la información para validar sus opiniones y decisiones (p. 100).

La incorporación deliberada del razonamiento inferencial informal es una cuestión que cobra relevancia a nivel curricular, por una parte, para formar alumnos críticos, capaces de cuestionar la información que proviene de diferentes medios, y por otra, que sean capaces de usar los medios tecnológicos adecuados para visualizar información, lo que además se relaciona con el desarrollo de las habilidades digitales del siglo XXI. Para la enseñanza de la estadística, estos elementos son trascendentales puesto que promueven el razonamiento inferencial con el fin de construir ciudadanos estadísticamente alfabetizados.

La estadística en el currículo escolar en Chile

La importancia que ha cobrado la Estadística como herramienta para la comprensión de diferentes fenómenos de la vida cotidiana ha llevado a que diversas propuestas curriculares (e.g., Franklin et al, 2007; Ministerio de Educación, cultura y deporte de España [MECD], 2014; MINEDUC, 2016; Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010) incluyan los temas de estadística y probabilidad desde los primeros ciclos escolares, adaptándose a las necesidades de la sociedad.

En el caso de Chile, en el año 2009 se comenzó a gestar la adecuación del currículo de diversas asignaturas, en particular Matemáticas, lo que trajo como consecuencia la construcción

de nuevos materiales curriculares adaptados a estos nuevos cambios (Remillard, 1999; Remillard et al., 2009). En particular, un paso del antiguo documento oficial que establecía los *objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media* (MINEDUC, 2009) a un documento actualizado que facilita que los profesores logren identificar aquellos aprendizajes que se espera de los estudiantes en cada nivel educativo, y por otro lado, explicita las habilidades que son deseables desarrollar y que son observables por los profesores a partir de indicadores de aprendizaje (MINEDUC, 2011).

En Chile, los documentos curriculares son cuatro: (i) bases curriculares, (ii) programas de estudio, (iii) planes de estudio, y (iv) libros de texto (mayor detalle en Sánchez-Acevedo y Ruiz 2020). Estos documentos tienen por objetivo estructurar y orientar las decisiones curriculares para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en general, y de la estadística, en particular.

Actualmente, en Chile se encuentran vigentes las bases curriculares de 1° a 6° básico (MINEDUC, 2012), de 7.° básico a 2° medio (MINEDUC, 2015) y las de 3° a 4° medio (MINEDUC, 2019). En el caso de la base curricular de 7.° básico a 2° medio, tiene como propósito que los estudiantes sean capaces de aplicar conceptos y procedimientos en la resolución de problemas cotidianos, poder interpretar estos problemas en diversas situaciones y desarrollar el razonamiento a través de la aplicación de herramientas matemáticas (MINEDUC, 2015). Para lograr este propósito, esta base curricular (MINEDUC, 2015) se apoya en cuatro habilidades que se interrelacionan y que permiten el desarrollo de los objetivos de aprendizaje: (i) resolver problemas, (ii) representar, (iii) modelar y (iv) argumentar y comunicar. Estas habilidades deben ser promovidas en las cuatro unidades del currículo escolar: (i) números, (ii) álgebra y funciones, (iii) geometría, y (iv) probabilidad y estadística. En la Tabla 1 se muestran los de 7.° básico y 8.° básico que se usarán en este trabajo.

Los objetivos de aprendizaje de 7.° básico en el tema de análisis de datos aluden de manera directa a que los estudiantes estimen características de una población, realicen representaciones gráficas para hacer inferencias a través de la comparación y a que comparen el valor experimental con el esperado o teórico. Desde 8.° básico en adelante, los objetivos no declaran explícitamente el desarrollo de inferencias sobre características de la población, aun cuando estos tributan a la comparación de datos sobre una población, representación gráfica e interpretación.

Tabla 1.

Objetivos de aprendizaje propuesta en la base curricular de Matemática para la Unidad de Probabilidad y Estadística de 7.º básico a 2º medio

Nivel	Objetivos de Aprendizaje
7.º básico	<p>Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo.</p> <p>Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo.</p> <p>Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango</p> <p>Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual o con software educativo</p> <p>Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos</p>
8.º básico	<p>Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles</p> <p>Evaluar la forma en que los datos están presentados</p> <p>Explicar el principio combinatorio multiplicativo</p>

En la presente investigación se analiza la coherencia entre los programas de estudio de matemática en la unidad de probabilidad y estadística y los respectivos libros de texto, específicamente en 7.º y 8.º básico, que son parte de los documentos curriculares que orientan la planificación de clases de los profesores.

ENFOQUE TEÓRICO

En este apartado, en primer lugar, describimos la perspectiva de la inferencia estadística informal, que permite situar los elementos del razonamiento inferencial informal y sus componentes. En segundo lugar, mostramos algunas ideas sobre el papel de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, pero en particular, en el contexto de la inferencia informal. Estas dos perspectivas de análisis dan cuenta de la coherencia entre los programas de estudio de 7.º y 8.º básico en Chile y las actividades propuestas en los libros de texto utilizados en estos mismos niveles.

Perspectiva de Inferencia Informal

Diversos lineamientos curriculares enfatizan la importancia de promover el razonamiento inferencial desde sus bases informales a las formales (NCTM, 2000; GAISE, 2007) para direccionar el desarrollo del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Así, la inferencia informal (Makar y Rubin, 2018) ha emergido como una vía para construir aprendizajes desde ideas

informales, es decir, considerando la profundización en conceptos estadísticos y generar una base en la comprensión formal de la inferencia (Tobías-Lara y Gómez-Blancarte, 2019).

Los marcos que han aportado perspectivas para entender la inferencia informal presentan algunas diferencias según los niveles educativos y el contexto de investigación, pero todos ellos tienen aspectos de convergencia, como hacer afirmaciones que permitan ir más allá de los datos, un lenguaje que exprese incertidumbre, uso de datos como evidencia, usar la idea de distribución y la incorporación del contexto (Makar y Rubin, 2018). Algunas aproximaciones se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2.

Conceptualizaciones de la inferencial informal por distintos autores

Ben-Zvi (2006)	Pfannkuch (2006)	Rossmann (2008)	Zieffler et al., (2008)	Makar y Rubin (2009)
Son tipos de argumentaciones que los estudiantes realizan al tratar de elaborar conclusiones tomadas de los datos de una muestra hacia una población.	Permite elaborar conclusiones a partir de los datos observar, comparar y razonar a partir de las distribuciones de los datos.	Es un elemento fundamental de la inferencia que permite ir más allá de los datos al basarse en un modelo probabilístico.	Es la manera en que los estudiantes usan su conocimiento informal para hacer argumentos que soporten sus inferencias acerca de poblaciones desconocidas observando muestras.	Consideran la inferencia informal como proceso para aprender estadística. Incluye la generalización y/o predicción, el uso de datos y un lenguaje probabilístico.

La idea de razonamiento inferencial informal (RII) surge con el propósito de extender el concepto de inferencia normalmente asociado al de las pruebas de hipótesis e intervalos de confianza, pensando en la aplicación que tiene para los estudiantes en los primeros niveles de escolaridad en la toma de decisiones de carácter inferencial. Se visualiza “como parte de un proceso razonado (aunque informal) para la elaboración de pruebas o generalizaciones a partir de los datos, es decir, en este proceso, no se incluye procedimientos estadísticos formales” (Makar y Rubin, 2009, p. 85). Para Makar y Rubin (2009) la inferencia formal es:

(...) tanto como un resultado como proceso que implica el razonamiento para crear o probar generalizaciones probabilísticas con base en datos. Es decir, el tipo de afirmaciones usadas para hacer estimaciones puntuales o por intervalos de los parámetros de la población, o de otro

modo, pruebas de hipótesis, utilizando métodos que son estadísticamente aceptados por la comunidad de investigación. (Makar y Rubin, 2009, p. 85, traducción propia)

Tanto la inferencia informal como la formal comparten la idea de hacer uso de procesos razonados para probar o hacer generalizaciones con respecto a una población de interés con base en juicios a partir de los datos (Hancock, Kaput y Goldsmith, 1992). La diferencia entre ambas radica en que lo informal excluye el uso de métodos formales para probar hipótesis o estimaciones.

En este trabajo, consideramos la aproximación del razonamiento de inferencia informal propuesto por Makar y Rubin (2009) que contempla cuatro aspectos fundamentales que permiten organizar en componentes para explorar en el RII:

- La noción de incertidumbre y variabilidad que se articula a través del lenguaje, el que permite la ruptura con el lenguaje determinista de la Matemática (por convención).
- La consideración de los datos como un todo holístico para mirar características de la población haciendo generalización, más que el concepto de datos de aislados (como puntos individuales).
- Reconocer mecanismos de tendencia ante la posibilidad de ir más allá de los datos disponibles; y,
- La consideración del razonamiento apoyado en la evidencia que aportan los datos.

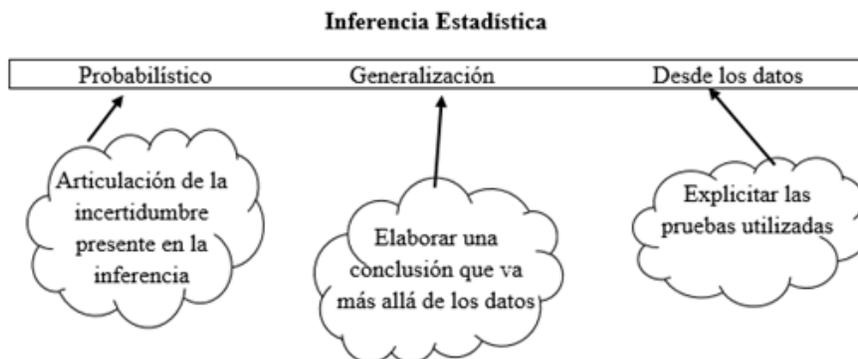
La detección de estos aspectos críticos como base para la construcción de razonamientos inferenciales informales permitió proponer un marco con tres componentes que describen de manera esencial la Inferencia Estadística Informal (Makar y Rubin, 2009, p. 85):

- Generalizar o predecir al observar más allá de los datos
- El uso de los datos como evidencia; y,
- Empleo de un lenguaje probabilístico para describir generalizaciones, incluyendo ideas informales con cierto grado de certeza a partir de las conclusiones propuestas

Un esquema de la aproximación para del marco de inferencial informal descrito, se ilustra en la Figura 1.

Figura 1.

Componentes de razonamiento inferencial (Makar y Rubin, 2009) Marco para el RII



Fuente: Makar y Rubin (2009, p. 85)

La integración de los componentes descritos permite evaluar el razonamiento de inferencia informal en contexto de enseñanza, incluyendo los elementos que proponen Makar y Rubin (2014, 2018), demanda la consideración, incorporación e intencionalidad por parte del profesor (Kula y Koçer, 2020), complementando los objetivos, tanto de la estadística, como de su enseñanza.

Las tecnologías como parte de la inferencia informal

El uso de recursos digitales en el aula cobra una relevancia particular en la enseñanza de la Estadística puesto que el uso de aplicaciones tecnológicas, dado su carácter dinámico, provee de una interacción con los datos que, desde un enfoque tradicional de enseñanza, es limitado (Ben-Zvi y Friedlander, 1996). En este sentido, las tecnologías brindan oportunidades para el desarrollo de la comprensión de conceptos estadísticos. La tecnología interactiva permite a los estudiantes la posibilidad de relacionar variadas representaciones (p.e. visual, numérica, gráfica, simbólica, etc.) y lograr una conexión entre las representaciones como soporte para dicha comprensión (Burrill 2014; Biehler et al., 2013).

La necesidad de formar ciudadanos con capacidad para evaluar de forma crítica las aseveraciones con base en datos (Garfield y Ben-Zvi, 2008), hace imprescindible la inclusión de las tecnologías en la sala de clases y su intencionalidad en los documentos curriculares para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. Sin embargo, el uso de recursos tecnológicos en contexto escolar no debe limitarse a un fin instrumental, sino que debe apoyar la toma de decisiones sobre el uso fundado en la comprensión conceptual y la forma en que se llevan los análisis (Franklin et al., 2007).

La investigación en Educación Estadística da cuenta de experiencias exitosas que conducen a una comprensión sobre el papel de las tecnologías en esta área (Ben-Zvi, 2000). En este sentido ha permitido cambiar el foco centrado en el desarrollo de habilidades matemáticas y procedimentales (Ben-Zvi y Garfield, 2004), dando paso a que los estudiantes desarrollen razonamientos o piensen de forma estadística, porque las formas de razonamiento estadístico son distintas a las de las Matemáticas (delMas, 2004).

Esto implica un cambio, también, en las prácticas de enseñanza de los profesores (Garfield, 2002). Para Inzunza y Juárez (2010): “la tecnología informática ha sido un elemento que ha motivado el cambio de enfoque de la enseñanza tradicional de estadística a la enseñanza centrada en el pensamiento y el razonamiento estadístico, y debe convertirse en una herramienta valiosa para los docentes” (p. 1).

El uso de tecnologías en el aula es un tema indiscutible para promover el desarrollo de conceptos, y en este sentido, la incorporación de propuestas de uso de tecnologías en documentos curriculares también ha sido reportado en la investigación de acuerdo con tipos de actividades a incluir, por ejemplos en programas de estudio y/o libros de texto (Biehler et al., 2013). Con base en lo anterior, y apoyados en los trabajos de Biehler (1993, 1997), para el desarrollo del razonamiento y pensamiento en estadística, en tanto hacer y aprender, Biehler et al. (2013, pp. 649-650) describen cuatro requisitos para que una herramienta tecnológica sea más abierta y flexible.

1. Que la incorporación de las herramientas tecnológicas permita a los estudiantes (profesores) experimentar con análisis de datos gráficos y numéricos de forma exploratoria, apoyando la recopilación de estos resultados gráficos y numéricos en un área de trabajo organizada en un sistema de ventanas múltiples (R1)
2. Que los estudiantes pueden construir modelos para experimentos aleatorios y usar simulación por computadora para estudiarlos (R2)
3. Que la propuesta de herramientas tecnológicas permita a los estudiantes la participación en investigaciones o proyectos estadísticos, tanto para construir, analizar y comparar métodos estadísticos con la posibilidad de emitir juicios y elaborar conclusiones (R3)
4. Que el uso de herramientas tecnológicas permita hacer uso, modificación y creación de micro-mundos (experimentos interactivos exploratorios, visualización, simulaciones y applets) en la exploración de conceptos estadísticos, orientado en que se pueda hacer usos

en dos sentidos, como un meta-herramienta (Biehler, 1997) y un medio (a la vez) para poder construir micro-mundos dentro del mismo programa (R4)

En el caso de centrar el foco en los estudiantes (R4), se habla de micro-mundos incrustados, los que pueden ser usados por estudiantes en varios niveles (Biehler et al., 2013, p. 650):

- a) El estudiante usa los micro mundos como una construcción (modelo), ya construido.
- b) El estudiante comprende la forma en que construye ese micro mundo por medio de su conocimiento, tanto de la herramienta tecnológica como de la situación estadística planteada.
- c) El estudiante puede modificar el micro mundo según sus necesidades en relación con el conocimiento de la herramienta tecnológica y la situación estadística propuesta.

Los tres niveles del requisito cuatro, deben poder ser conocidos por los profesores. Biehler et al. (2013) plantean que si los profesores tienen o han desarrollado competencias específicas de herramientas tecnológicas en el nivel (a) y el (c), podrán adaptar los micro mundos a sus objetivos de enseñanza y los contextos específicos educativos.

En esta investigación, dado que la construcción de modelos (R2) no se incluye en los niveles de 7.º básico, 8.º básico y 1º medio del currículum chileno, se considera la posibilidad de manipular modelos construidos para hacer estimaciones e inferir.

METODOLOGÍA

Con el fin de conseguir el objetivo plantado, esta investigación sigue un enfoque cualitativo (Silverman y Thompson, 2005) de tipo descriptivo (Hernández et al., 2014). La investigación considera un estudio de casos múltiple (cuatro libros de texto y dos programas de estudio), lo que permite una indagación procesual, sistemática y profunda del caso de investigación (Murillo, 2013). Así mismo, se aporta con una profundización en la descripción en la relación que hay entre los programas de estudio (MINEDUC, 2016a, 2016b) y las actividades en los libros de texto de acuerdo con la inferencia informal y las tecnologías. Para esto, se consideran las siguientes etapas: (1) identificación de los objetivos de aprendizaje en los programas de estudio; (2) identificación y análisis de las actividades que se proponen en los programas de estudio; (3) identificación y

análisis de las actividades en los libros de texto de 7.º y 8.º básico; y (4) relaciones entre los programas de estudios y los libros de texto, considerando la implementación de las tecnologías.

Para el análisis de las actividades se utilizó la técnica de análisis de contenido (López-Noguero, 2002), considerando la adaptación a los elementos de Cobo (2003) para el análisis de libros de texto:

1. Identificación de los párrafos donde se incluyen cuestiones relacionadas con inferencia informal o recursos digitales dentro de los objetivos de Aprendizaje (unidades de análisis de los objetivos de aprendizaje)
2. Identificación de las actividades que se proponen en los libros de texto y programas de estudio (unidades de análisis de los libros de texto)
3. Delimitación y definición de los componentes y subcomponentes de análisis
4. Categorización de los componentes y subcomponentes del razonamiento inferencial (RII) y aspectos de recursos digitales (RD). Las categorías se definieron en sucesivas revisiones de las unidades de análisis y tomando en cuenta a Makar y Rubin (2009) en RII y Biehler et al. (2013) en RD.
5. Codificación de las actividades desde la categorización de los componentes de RII y RD
6. Selección de ejemplos y elaboración de tablas de categorización derivado del análisis descriptivo.

Los programas de estudios y los libros de texto

Se han considerado dos programas de estudio, 7.º y 8.º básico de los planes 2016 (MINEDUC, 2016a, 2016b) y cuatro libros de texto (LT) (dos de 7.º básico y dos de 8.º básico), que son distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) y que han estado vigentes desde que se llevó a cabo el ajuste curricular a programas de estudio y libros de texto (desde el año 2000). Estos libros de texto son de extensa cobertura en las escuelas de Chile. Los libros se seleccionaron de manera intencionada, considerando los siguientes aspectos: (i) libros del mismo nivel distribuidos por el MINEDUC; (ii) ediciones vigentes y previas, pero dentro del actual ajuste curriculares; (iii) libros de editoriales licitadas por el MINEDUC; y (iv) uso masivo en el sistema escolar, tanto por profesores como estudiantes (Tabla 3).

La Tabla 3 se describen los libros utilizados. Los códigos (A, B, C y D) sirven para referenciarlos en las ilustraciones que describen los subcomponentes de inferencia informal

(Makar y Rubin, 2009) y de las tecnologías (Biehler et al., 2013) identificados en los cuatro libros de texto.

Tabla 3.

Descripción de los libros de texto de 7.º y 8.º básico distribuidos por el MINEDUC

Nivel	Código	Referencia
7.º	A	Texto para el estudiante, Matemática 7º. Jennie Bennett, Edward Burger, David Chard, Earlene Hall, Paul Kennedy, Freddie Renfro, Tom Roby, Janet Scheer y Bert Waits, Galileo. 2014
	B	Texto del estudiante. Matemática. 7º básico. Richard Merino, Verónica Muñoz, Bernardita Pérez y Pedro Rupin, SM, Chile. 2018
8.º	C	Texto para el estudiante, Matemática 8º. Jennie Bennett, Edward Burger, David Chard, Earlene Hall, Paul Kennedy, Freddie Renfro, Tom Roby, Janet Scheer y Bert Waits, Galileo. 2014
	D	Texto del estudiante. Matemática. 8º Básico. Daniel Catalán, Bernardita Pérez, Camila Prieto y Pedro Rupin, SM, Chile. 2018

En total se identificaron y analizaron 23 actividades del programa de estudio de 7.º básico y 15 del programa de estudio de 8.º básico. En cuanto a los libros de texto, se consideraron un total de 289 actividades, de las cuales 192 corresponden a los dos libros de 7.º básico y 97 a los libros de 8.º básico.

Componentes y subcomponentes de análisis

Como se ha mencionado, tanto los objetivos de aprendizaje como las actividades de enseñanza en los programas de estudio y los libros de texto conformaron las unidades de análisis. Estas se revisaron considerando las componentes y subcomponentes de inferencia informal (Makar y Rubin, 2009) y de las tecnologías (Biehler et al., 2013), como un medio para promover el razonamiento inferencial informal. Estas unidades de análisis consideran aspectos donde intervienen elementos de exploración de datos como gráficos estadísticos, análisis de datos con medidas de centro, construcción y análisis de tablas de frecuencias, percentiles, etc. En la Tabla 4 se describen los componentes y subcomponentes de inferencial informal y recursos tecnológicos en el contenido de lo informal.

La codificación de los datos consideró el uso de la descripción (indicadores) de qué componentes y subcomponente promueve la actividad, tanto en los programas de estudio, como en los libros de texto. Esto implica la presencia de los subcomponentes de *poder ir más allá de los datos (generalización)*, *uso de datos como evidencia* y *uso de lenguaje probabilístico para hacer*

generalizaciones, en el caso de la inferencia informal, y en el caso de las tecnologías (Biehler et al., 2013) la presencia del *uso de micromundo, comprensión del micromundo y modificación del micromundo*.

Tabla 4.

Descripción de las componentes y subcomponentes de análisis

Componente	Subcomponente	Descripción (indicador)
Inferencia informal	Más allá de los datos (generalización)	La actividad promueve la posibilidad de hacer predicciones, estimaciones de parámetros y/o conclusiones con la idea de hacer descripciones que vayan más allá de los datos.
	Uso de datos como evidencia	La actividad provee de elementos para hacer uso de datos y sustentar generalizaciones en ellos y no en otros aspectos (como por ejemplo las propias creencias)
	Uso de lenguaje probabilístico para hacer generalizaciones	La actividad promueve la posibilidad de plantear respuestas que no sean cerradas (deterministas) y que estén expresadas de manera aleatoria (por ejemplo, se espera que, aproximadamente, con una posibilidad de, es posible, etc.).
	Uso de lenguaje centrado en la muestra	La actividad no favorece la posibilidad de hacer inferencias a la población aun cuando el análisis se centra en una muestra. Estas actividades son de carácter descriptivo centrado en la muestra.
	Uso de estadística descriptiva	La actividad permite hacer una inferencia estadística informal incluyendo algún tipo de estadístico, es decir, considera que antes de hacer uso de los datos como evidencia, es posible, también, analizar de manera descriptiva los datos de la muestra.
	Contexto basado en experiencia de aprendizaje	La actividad incluye elementos en que los estudiantes resuelven una tarea específica sin los aspectos del contexto real. En este caso, estas tareas tienen el sentido de incluir aspectos para construir aprendizajes, demanda de conocimientos estadísticos previos e inclusión de nuevas ideas o conceptos (Pfannkuch, 2011).
Rol de la tecnología	Uso de micromundo	Permite conocer una situación real como un modelo a escala sin perder aspectos de la realidad a partir del recurso.
	Comprensión del micromundo	A partir del micromundo (modelo de la situación) profundizar haciendo uso del recurso
	Modificación del micromundo	Permite hacer modificaciones (en los datos) de acuerdo con las necesidades de las actividades y del propio recurso

Para asegurar la objetividad en la codificación de las actividades se realizó una codificación consecutiva, es decir, el primer autor de trabajo realizó un primer análisis de las actividades de los libros de texto y programa de estudio, posteriormente, la segunda autora, verificó y complementó las codificaciones de las actividades analizadas. En caso de diferencias en el análisis, de acuerdo con los subcomponentes de inferencia informal y las tecnologías, se han discutido dichas diferencias y se ha llegado a consensos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En lo que sigue, se presenta el análisis de los programas de estudio (MINEDUC, 2016a, 2016b) y los libros de texto de 7.º y 8.º básico (Bennet et al., 2014a; Bennet et al., 2014b; Catalán et al., 2018; Merino et., 2018) de acuerdo con los subcomponentes de inferencia informal (Makar y Rubin, 2009) y las tecnologías (Biehler et al, 2013).

Sobre los programas de estudio

Los dos programas de estudio vigentes, 7.º y 8.º, presentan ajustes, tanto en estructura, como en contenidos, tanto desde el punto de vista pedagógico, como en los que respecta a los temas de estadística, con respecto a los programas anteriores.

Los programas están estructurados en cuadro unidades de estudio: Unidad 1. Números; Unidad 2. Álgebra y funciones; Unidad 3. Probabilidad y Estadística; Unidad 4. Geometría. En la Tabla 5 muestra la frecuencia de objetivos de aprendizaje por unidad que se incluyen en los programas de estudio de 7.º y 8.º básico.

Tabla 5.

Porcentajes de objetivos de aprendizaje por eje presentes en las unidades de los programas de estudio de Matemática

Nivel	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4	Total
7.º	5 (26%)	4 (21%)	5 (26%)	5 (26%)	19
8.º	5 (29%)	5 (29%)	4 (24%)	3 (18%)	17

La Tabla 5 muestra que la distribución de los objetivos de aprendizaje en las unidades de los dos niveles tiende a ser más homogénea. En el caso de 8.º básico, este nivel presenta un porcentaje menor de temas de estadística en relación con las unidades 1, 2 y 3, pero a pesar de ello

la distribución es relativamente similar, lo que marca una diferencia con los programas curriculares previos, que no incluían ninguna unidad para este contenido.

La inferencia informal en los programas de estudio

Se encontraron 16 y 13 actividades sugeridas al profesor en los programas de 7.º y 8.º básico respectivamente. En la Tabla 6 se muestra el número de actividades en estos programas por subcomponente de inferencia informal por nivel educativo.

Tabla 6.

Subcomponentes de inferencia informal presentes en actividades propuestas en los programas de estudio

Subcomponente	7.º	8.º
Lenguaje con centro en la muestra	11 (68,8%)	11 (84,6%)
Datos como evidencia para generalizar	1 (6,3%)	-----
Uso de datos como evidencia	1 (6,3%)	-----
Datos como evidencia para describir la muestra	1 (6,3%)	-----
Lenguaje probabilista sin generalizar	1 (6,3%)	-----
Lenguaje de contexto de la población	-----	2 (15,4%)
Integración de las cuatro componentes	1 (6,3%)	-----

De las actividades analizadas que son propuestas en los dos programas de estudio, emergen los subcomponentes de inferencia informal: lenguaje con centro en la muestra, datos como evidencia para generalizar, uso de datos como evidencia, datos como evidencia para describir la muestra, lenguaje probabilista sin generalizar, lenguaje de contexto de la población, integración de las cuatro componentes, pero la mayor cantidad de actividades presentan un *lenguaje centrado en la muestra*, es decir, son actividades, que con base en el enunciado y/o en las preguntas derivadas para el análisis no permiten la posibilidad de realizar algún tipo de inferencia, pues el foco se centra en describir alguna(s) características de la muestra, como, por ejemplo, medidas de centro, variabilidad o posición de la muestra. Solo una de las actividades de los dos programas, el de 7.º básico, presenta una actividad que integra los cuatro subcomponentes.

En las Figura 2 se muestra una actividad propuesta de 8.º con un lenguaje centrado en la muestra, la cual se relaciona con el Objetivo de Aprendizaje: “mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles” (MINEDUC, 2000, p, 169)

Figura 2.

Actividad del programa de estudio de 8.º en el subcomponente de *lenguaje centrado en la muestra*

En el 8º nivel del se realizó una encuesta acerca del número de amigas y amigos que tiene cada uno de los alumnos encuestados. El resultado se representa en la siguiente tabla de frecuencia.

NÚMERO	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FRECUENCIA	3	6	6	9	11	8	2	3	1	0	1
FRECUENCIA ACUMULADA											

- › Calculan la media de las amigas y amigos.
- › Completan la tabla con las frecuencias acumuladas.
- › Determinan los cuartiles y marcan sus posiciones en la lista.
- › ¿Con qué medida de tendencia central coincide el segundo cuartil?
- › Elaboran tres enunciados que pueden ser concluidos mediante los cuartiles.

Fuente: MINEDUC (2016, pp. 172).

La actividad de la Figura 2 presenta un *lenguaje centrado en la muestra* que no permite realizar algún tipo de inferencia a la población. Hay dos situaciones posibles sobre esta actividad, (i) que el curso de 8.º básico (en el enunciado) se considere como la población o (ii) que el curso de 8.º básico se considere como una muestra (no aleatoria) del total de cursos de un colegio. En el caso (i) al tener la información de la población no se hacen estimaciones sino cálculo de parámetros. En el caso (ii) se aprecia que la frecuencia de estudiantes es de 50 estudiantes, lo que podría sugerir una muestra del curso, pero, aun así, se ve que la intención de las preguntas no apunta a sacar una conclusión estimada del número de amigos/as por estudiante en la institución educativa, centrando las preguntas en caracterizar los cuartiles y la mediana de los datos sin preocuparse si provienen de una muestra o de una población. La última pregunta de elaboración de preguntas que se puedan concluir mediante los cuartiles podría orientar la discusión hacia una inferencia informal.

La Figura 3 muestra una actividad que promueve la *recopilación de información de diversos medios y sistematiza en tablas y estadística*, específicamente las medidas de tendencia central.

Figura 3.

Actividad que permite uso de datos como evidencia, estadística descriptiva y generalización

Interpretan información numérica interesante obtenida en diversas fuentes (encuestas, diarios, almanaques y otros) utilizando en su análisis indicadores de dispersión de los datos y medidas de tendencia central; deciden en qué casos es conveniente y necesario usarlas para analizar la información.

- Organizan el estudio orientados por preguntas como:
 - ¿Qué etapas podría tener este estudio?
 - ¿En qué niveles podrían realizar el estudio?
 - ¿Qué datos sería pertinentes recolectar?
 - ¿Cómo se recolectarán?
- Organizan y analizan la información de cada nivel. Se sugiere que:
 - Construyan una tabla de frecuencia con la estatura de los alumnos y alumnas, diferenciando la de hombres y mujeres.
 - Ordenen la información por sexo desde el de menor a mayor estatura.
 - Calculen el promedio y la moda de los datos por nivel y sexo.
 - Determinen el rango de dispersión y la mediana de los datos por nivel y por sexo.
- Relacionan los análisis parciales y obtienen conclusiones en relación con las tendencias de crecimiento de estatura en los alumnos y alumnas del nivel.

Fuente: MINEDUC (2016, pp. 82)

La actividad a partir de la recopilación de información de diversos medios permite (Dimensión I del marco de Wild y Pfannkuch (1999) de pensamiento estadístico) que el estudiante se plantee preguntas de acuerdo con el contexto considerando diferentes fuentes. Tanto las preguntas, como los análisis que piden realizar (consigna 3), hace posible considerar los datos y/o las estadísticas como evidencia. Sin bien la situación de la actividad no explicita alguna inferencia particular, si se puede considerar en la consigna 3 cuando menciona “*obtienen conclusiones en relación con las tendencias de crecimiento de la estatura alumnos por nivel*”.

La tecnología en los programas de estudio

En la revisión de los dos programas de estudio, 7° y 8°, no se encontraron actividades con uso de tecnología para el desarrollo de las componentes de inferencia informal.

A pesar de que la base curricular de matemática en la unidad de probabilidad y estadística alude explícitamente al uso de recursos tecnológicos para el desarrollo de estudiantes críticos a partir del análisis de datos e inferencias en diferentes contextos con uso de información para validar opiniones y decisiones (MINEDUC, 2015), esto queda relegado, en este caso, al uso y adaptación de actividades que pueda hacer el profesor en el diseño de las clases.

Sobre los libros de texto

Se encontraron 190 actividades en los libros de texto de 7.º (88 en el libro A y 102 en el libro B) y 88 actividades en los libros de 8.º (30 en el libro C y 55 en el libro D). En ambos niveles, se aprecia que el número de actividades incluidas en los libros de texto es alto, habiendo una mayor cantidad de actividades en 7.º básico.

La inferencia informal en los libros de texto

En la Tabla 8 se muestran las *actividades estadísticas* en el nivel de 7.º básico. Se analizaron 192 actividades, identificándose los siguientes subcomponentes de inferencia informal: Lenguaje con centro en la muestra, datos como evidencia para generalizar, uso de datos como evidencia, datos como evidencia para describir la muestra, lenguaje probabilista sin generalizar, uso de datos como evidencia (generalizar), contexto de la población, estadística descriptiva para ir más allá de los datos y la integración de las cuatro componentes.

Tabla 7.

Distribución de actividades estadísticas de aplicación en el libro de 7.º básico

Componente de inferencia informal	Libros de texto de 7.º básico	
	Libro A (n=88)	Libro B (n=102)
Lenguaje con centro en la muestra	83 (94,3%)	81 (79,4%)
Datos como evidencia para generalizar	1 (1,1%)	1 (1,0%)
Uso de datos como evidencia	-----	9 (8,8%)
Datos como evidencia para describir la muestra	2 (1,05%)	5 (4,9%)
Lenguaje probabilista sin generalizar	1 (2,3%)	-----
Uso de datos como evidencia (generalizar)	-----	3 (2,9%)
Contexto de la población	1 (1,1%)	-----
Estadística descriptiva para ir más allá de los datos	-----	2 (2,0%)
Integración de las cuatro componentes	-----	1 (1,0%)

Se aprecia que el subcomponente que se identifica con mayor frecuencia en las actividades en este nivel educativo es *lenguaje centrado en la muestra*, que aparece en el Libro A y el Libro B con 94,3% y 79,4% respectivamente; esto significa una alta cantidad de actividades que no permiten la realización de inferencias, más que la descripción de la muestra.

Algunas de las actividades que permiten hacer inferencia muestran un *lenguaje de datos como evidencia para generalizar, uso de datos como evidencia (generalizar), estadística*

descriptiva para ir más allá de los datos e integración de las cuatro componentes.

En la Tabla 8 se muestra la distribución de actividades en 8.º básico de acuerdo con la componente de inferencia informal. Se observa en este nivel que los subcomponentes de inferencial informal son menores que en 7.º básico; estas son: *lenguaje con centro en la muestra, datos como evidencia para generalizar, datos como evidencia para describir la muestra, lenguaje probabilista sin generalizar y estadística descriptiva para ir más allá de los datos.*

Tabla 8.

Distribución de actividades estadísticas de aplicación en el libro de 8.º básico

Componente de inferencia informal	Libros de texto de 8.º básico	
	Libro C (n=30)	Libro D (n=55)
Lenguaje con centro en la muestra	27 (90,0%)	47 (85,5%)
Datos como evidencia para generalizar	-----	3 (5,5%)
Datos como evidencia para describir la muestra	1 (3,3%)	2 (3,6%)
Lenguaje probabilista sin generalizar	2 (6,7%)	1 (1,8%)
Estadística descriptiva para ir más allá de los datos	-----	2 (3,6%)

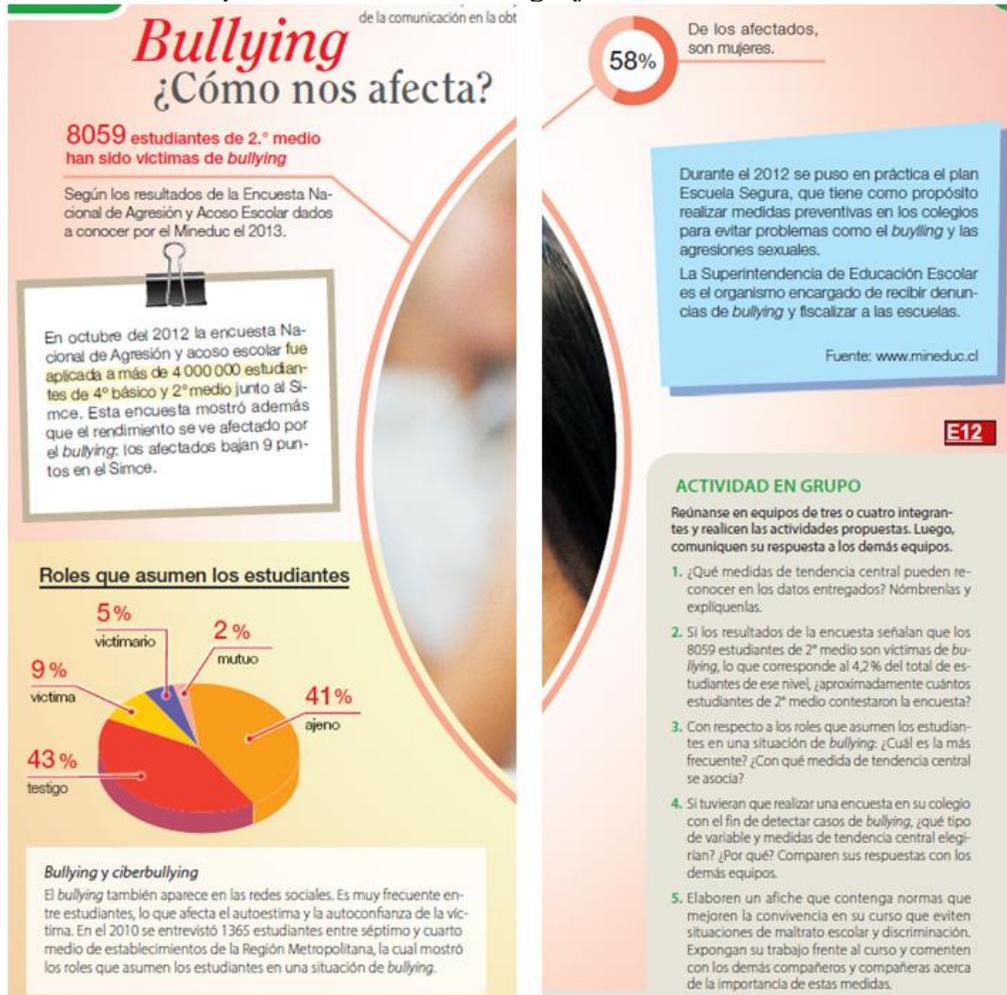
El subcomponente identificado con mayor predominancia en los libros de texto analizados de 8.º básico es *lenguaje centrado en la muestra* con un 90% y un 85,5% respectivamente en los libros C y D; ambos usados después de la implementación del ajuste curricular con una unidad específica en estadística y probabilidad. Los otros subcomponentes de inferencia informal identificadas son *datos como evidencia para generalizar y estadística descriptiva para ir más allá de los datos.*

En las Figuras 4, 5 y 6 se describen tres actividades en la componente de inferencia informal: *integración de las cuatro componentes, estadística descriptiva para ir más allá de los datos y uso de datos como evidencia para generalizar.*

En la Figura 4 se propone una actividad que permite desarrollar el razonamiento inferencial informal. Se presenta un contexto de una situación real de estudio sobre el *Bullyng* en estudiantes de 2º medio (15 a 16 años) y su relación con puntajes de una prueba estandarizada (componente de contexto).

Figura 4.

Actividad estadística de aplicación con uso de lenguaje de inferencia informal



Fuente: Merino et al. (2018, p. 328-329)

Además de la importancia del contexto presentando en la actividad, se proporciona información sobre la fuente de la encuesta, lo que hace confiable la información proporcionada. Además, se da a conocer una Encuesta Nacional por muestreo, lo cual abre posibilidades a que los estudiantes conozcan estas iniciativas del gobierno para conocer las estadísticas de esta y otras problemáticas de su país. La actividad que se propone a los estudiantes se identifica con los subcomponentes:

- *Uso de estadística descriptiva para generalizar.* Esto se observa en la pregunta de *¿Qué medidas de tendencia central pueden reconocer en los datos entregados?* Que se relaciona con la posibilidad de generalizar en la consigna 3.

- *Datos como evidencia para generalizar.* Hay una aproximación a este uso en la consigna 4 donde se les pide plantear una situación hipotética para la recolección de sus propios datos y detectar los casos de bullying. En esa situación hipotética se pide de antemano la medida central que mejor estimaría la proporción de bullying en su colegio. La consigna abre la necesidad de la recolección de datos para hacer esa inferencia.

Dentro de esta actividad el cuestionamiento 2 es mejorable puesto que se pregunta por el tamaño de la muestra, cuando esa información, dentro del contexto de la encuesta, es conocida (aunque para 2013 no se proporciona en la actividad). En cambio, se hace una inferencia sobre las víctimas de bullying a partir de los resultados obtenidos en la encuesta a la que se le resta importancia y en la que no se hace *uso de un lenguaje probabilista* para aludir la posibilidad de la información: “Si los resultados de la encuesta señalan que los 8059 estudiantes son víctimas de bullying, lo que corresponden a 4,2% del total de estudiantes de ese nivel, ...”

Esta actividad finaliza con el uso de un análisis intencionado para la toma de decisiones en la toma de conciencia del *Bullying* y las normas de convivencia dentro del curso.

En la Figura 5 se presenta otra actividad de aplicación estadística con *Datos como evidencia para generalizar* y *Uso de estadística descriptiva para ir más allá de los datos*. En esta actividad, si bien el contexto no está basado en datos reales, permite sacar conclusiones inferenciales sobre la situación presentada y presentar una propuesta de uso sobre esa inferencia.

Figura 5.

Actividad estadística de aplicación con *Datos como evidencia para generalizar* y *Uso estadística descriptiva para ir más allá de los datos*



Fuente: Merino et al. (2018, p. 314)

Se observa que la situación plantea la toma de decisiones para partir de la información presentada. Se entrega la información de la edad de 11 donde el municipio debe decidir qué actividades proponer. Luego, en la consigna, a partir del resultado obtenido, se pide la decisión si el municipio debe hacer actividades para niños o adultos, es decir, con base en el cálculo de la media se saca una conclusión que va más allá de los datos, en este caso, las personas que asisten a la plaza por la mañana. Esta actividad se presta para la iniciativa de los estudiantes, puesto que también se puede usar la proporción de personas dentro de ciertos rangos de edad para decidir qué tipo de actividades se pueden realizar y a la discusión de la utilidad del promedio en esta situación.

Finalmente, en la Figura 6, se muestra una actividad que hace *uso de los datos para poder generalizar*. Al igual que en el caso anterior, se observa que no hay información extra que permita saber si el contexto es real, pero si permite hacer una inferencia de acuerdo con la información presentada.

Figura 6.

Actividad estadística de aplicación con uso de datos como evidencia para generalizar

Un investigador de cierta ave en el sur de Chile quiere saber cuántas especies de esta hay. Para ello, investiga la cantidad de nidos que existen de esta ave en un área de 200 m², realizando una búsqueda minuciosa por cada metro cuadrado.

Al no encontrar nidos de la especie en cuestión, informa a las autoridades que se ha extinguido. ¿Es correcta su afirmación? Justifica.

Fuente: Merino et al. (2018, p. 304)

En este caso, se aprecia que el uso de datos radica en la ausencia de nidos en un área determinada. Sobre esa información debe justificar sobre la extinción o no de la especie de aves. Además de la posibilidad de inferir, esta actividad permite profundizar en el análisis crítico de muestras para el análisis de información.

Las tecnologías en los libros de texto

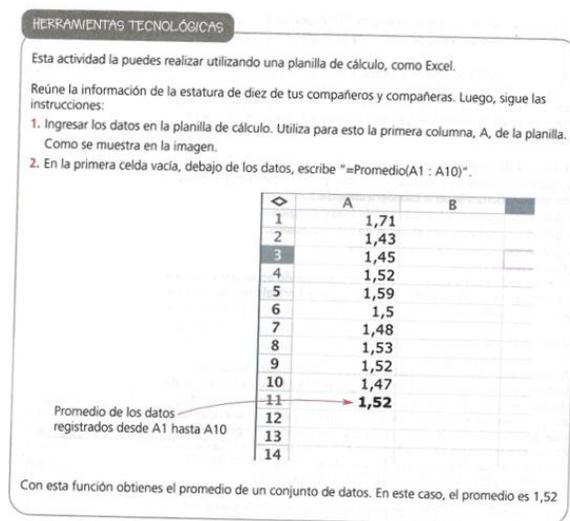
El único libro que presentó actividades con apoyo de recursos tecnológicos (planilla Excel y GeoGebra) fue el libro D (8.º básico) con 7 actividades en total. Dentro de estas actividades no se evidencia la posibilidad de hacer simulaciones para profundizar en la comprensión conceptual de

contenidos estadísticos, por ejemplo, la variabilidad de la muestra, forma de distribución, centro, etc. tampoco del uso, comprensión.

Las actividades analizadas que usan como medio Excel o GeoGebra tienen un carácter instrumental, pues se basan en el cálculo de estadísticas y su interpretación descriptiva sobre la muestra o en la construcción de gráficos estadísticos y preguntas para describir alguna característica del contexto que se presenta en el gráfico. No se propone el uso de micromundos, sin pérdida de generalidad, lo que limita poder comprender fenómenos contextualizados y poder ajustar, dependiendo de la intencionalidad de enseñanza o del mismo contexto presentado.

En la Figura 7 se muestra una actividad, que si bien es cierto hace uso de dato reales (estatura de 10 compañeros) es usada para calcular la media de la estatura.

Figura 7.
Actividad estadística con uso de Excel



Fuente: Setz y Darrigrandi (2011, p. 176)

Se aprecia que la actividad, usando Excel, se limita a ingresar la información por celdas en Excel y usar la función *"Promedio"* (uso instrumental). Es una actividad que podría servirse de tomar y simular otras muestras de tamaño 10 y promover la variabilidad entre las muestras haciendo uso del micro mundo del que provee la sala de clases y la característica estudiada.

En el caso de la Figura 8, la actividad usa GeoGebra para la construcción de un gráfico de cajón. Tanto en el enunciado como en la estructura de la actividad se puede ver que el uso del recurso es instrumental.

Figura 8. Actividad estadística con uso de GeoGebra

Situación 2 Constatando variaciones en el diagrama de cajón

El profesor de Inglés decidió premiar a sus alumnas por su buen comportamiento y su responsabilidad en la entrega de sus trabajos y redondeó las notas con dígitos decimales al entero siguiente. ¿Qué diferencias y semejanzas tendrán el diagrama de cajón de la situación 1 y este nuevo diagrama?

Para responder debemos reemplazar las notas decimales. Las nuevas notas son:

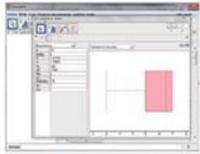
7	4	5	6	4	5	7	6	7	7
5	6	7	2	7	6	5	7	6	7
7	7	7	7	3	7	6	6	7	7

Paso 1 Ingresas las notas corregidas a la hoja de cálculo.



Paso 2 Construye el nuevo diagrama de cajón y observa las semejanzas y diferencias que tiene con el diagrama de la situación 1.

¿Por qué piensas que el diagrama sigue teniendo solo un bigote?



Completa para responder la pregunta inicial:

R: El valor de los mínimos de ambas distribuciones es _____.
El valor de los máximos de ambas distribuciones es _____.
En ambas distribuciones coinciden el valor del máximo y el valor del tercer _____.
La mediana de la primera distribución es _____ que la mediana de la segunda distribución.

Figura: Catalán et al. (2018, p. 323)

Se pide la identificación de diversas medidas de posición en los diagramas y la comparación entre dos diagramas de manera descriptiva de la población. En la situación no se plantea una problemática, la pregunta está centrada en la descripción de los diagramas y no en el comportamiento de las calificaciones de los grupos. No se vincula el análisis estadístico con la situación de que el profesor decidió premiar a sus alumnos por su buen comportamiento y responsabilidad en dos cursos. Tampoco se promueve el uso de estos micromundos para profundizar en características del fenómeno, variabilidad y dispersión, o posibles modificaciones en caso de ser necesario.

Este tipo de actividades es coherente con el tipo de actividades de uso de lenguaje centrado en la muestra, las que aparecen en mayor cuantía en los libros de texto analizados.

CONCLUSIÓN

El objetivo de la investigación fue analizar la coherencia entre los programas de estudio de matemática en la unidad de probabilidad y estadística y los libros de texto, específicamente en 7.º y 8.º básico, considerando la perspectiva de la inferencia informal y el uso de las tecnologías. Este trabajo está dirigido a una línea de investigación poco desarrollada en el contexto del análisis de los documentos curriculares, la necesidad de explorar cómo las actividades que se presentan en los libros de texto (generalmente para uso del estudiante) *dialogan* con aquellas que se presentan en los programas de estudio y los objetivos que definen *qué* se debe enseñar en el aula en la unidad de probabilidad y estadística.

A partir de los resultados obtenidos, tanto en los programas de estudio, como en los libros de texto, se muestra evidencia de: (i) la incorporación de una mayor cantidad de actividades para la enseñanza y aprendizaje de la estadística. La necesidad de potenciar la estadística es clara, considerando que los lineamientos previos a los ajustes curriculares no incluían a la estadística como unidad independiente (Ruiz, 2014). Esto es relevante, dado que se hace eco de las demandas que han venido emergiendo en la sociedad sobre la comprensión de diferentes fenómenos con incertidumbre; (ii) si bien la inclusión de diferentes actividades es importante, tanto en programas de estudio, como en libros de texto, no se evidencia una relación con la potencialidad y las oportunidades que pueden derivarse de ellas para el desarrollo del razonamiento de inferencia informal. Tampoco el papel que cumplen las tecnologías (uso de Excel o GeGebra) es medio para promover el RII, sino que emerge un fin en sí mismo para simplificar procesos matemáticos de cálculo, lo que es contrario a lo que plantean Lee y Hollebrands (2011) y Pratt et al. (2011).

De acuerdo con la base curricular de matemática de 7.º básico a 2.º medio plantea que la unidad de estadística y probabilidad debe:

(...) responder a la necesidad de que todos los y todas las estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. Se espera formar alumnos críticos y alumnas críticas que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones [...] se espera que las y los estudiantes diseñen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; registren datos desagregados por sexo cada vez que tenga sentido; utilicen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión para resolver problemas. El enfoque de este eje radica en la interpretación y visualización de datos estadísticos, en las medidas que permitan comparar características de poblaciones, y en la realización, la simulación y el estudio de experimentos aleatorios sencillos. (MINEDUC, 2015, p. 100)

De esto se destacan aspectos críticos para el desarrollo y aprendizaje de estadística, *“la necesidad de que todos los estudiantes hagan inferencias”*, *“alumnos críticos y críticas”*, *“uso de información para validar opiniones”*, *“inferir características de la población”*, *“promover un enfoque en la interpretación y visualización de datos”* y *“la simulación de experimentos”*. Cada uno de estos elementos, si bien son parte de lo que debe ser capaz de promover el profesor en la enseñanza de la estadística, las actividades en sí mismas deben proveer de un espacio donde el estudiante pueda imbuirse en un contexto de resolución de problemas en estadística (PPDAC, Wild y Pfannkuch, 1999) dado que, tanto el profesor, como los estudiantes usan este documento curricular de manera frecuente (Lloyd, 2006; Sherin y Drake, 2009).

Si bien la base curricular de 7.º básico a 2.º medio declara la movilización de elementos esenciales en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, como el desarrollo de inferencias sobre características de la población, la incorporación de contextos desde donde emergen los datos y el papel de la simulación (TIC) de manera explícita, las actividades que se analizaron en los libros de texto a la luz de estos componentes distan de mostrarse en concordancia con lo que plantean estos lineamientos curriculares, siendo coincidentemente concordante con actividades que muestran mecanismos más de procedimientos matemáticos y de cálculo (Sánchez-Acevedo y Ruiz, 2020; Sánchez-Acevedo y Ruiz, 2022), pero desprovistos de una aprehensión conceptual de temas estadísticos, por ejemplo, saber que cuando se calcula la media de una población o se realiza la estimación del parámetro de la población. Ideas como esta pueden hacer emerger otros conceptos estadísticos, como la idea de muestreo, aleatoriedad, distribución en el muestreo, etc. Algunas de las actividades encontradas, sin embargo (como se indica en Sánchez-Acevedo y Ruiz, 2022), podrían potencialmente desarrollar este tipo de pensamiento sobre todo aquellas que muestran un *Uso de lenguaje centrado en la muestra*. Hacerlo, quedaría en la perspectiva e iniciativa del profesor.

Los resultados no proveen de evidencia que nos permitan asegurar una relación entre las directrices curriculares (los objetivos de aprendizaje) y las actividades que se analizaron de los libros de texto, tanto los elementos de inferencia informal, para promover razonamientos, como el papel de las tecnologías, como medio para la visualización y desarrollo de inferencias, son visibles en muy pocas de las actividades analizadas, limitándose, siendo nulos los aspectos elementos de *uso de micromundo, comprensión del micromundo y modificación del micromundo*, propuesto por Biehler et al. (2013) para la comprensión de fenómenos a partir de la manipulación de datos.

Así mismo, los resultados muestran y confirman varios de los resultados reportados sobre documentos curriculares presentan una tendencia a promover análisis descriptivos, localizados en la muestra, o en su defecto, en la descripción de fenómenos considerando la población. Esto no quiere decir que no se deban realizar análisis de tipo descriptivos (con énfasis en procedimientos algorítmicos), pero el problema está cuando estas actividades muestran escasas oportunidades para desarrollar conclusiones a partir de los datos y tomar decisiones, lo que plantea una contradicción con lo que plantean los objetivos de aprendizaje y la fundamentación de la unidad de probabilidad y estadística (MINEDUC, 2015).

Dar cuenta de estas relaciones es relevante, por una parte, práctica, considerando el papel que cumplen estos documentos en el profesorado, y por otra más de comunidad, en el sentido de lo que plantean Fan et al. (2013), Rezat (2024) y Rezat et al. (2021) cuando mencionan que se debe orientar la investigación hacia el uso y desarrollo de libros de texto, tanto digitales, y también en el análisis de los documentos curriculares y el uso que de ellos hacen profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bennett, E., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J. y Waits, B. (2014a). *Texto para el estudiante, Matemática 7°*. Galileo.
- Bennett, E., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J. y Waits, B. (2014b). *Texto para el estudiante, Matemática 8°*. Galileo.
- Ben-Zvi, D. (2000). Toward understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 127-155. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0202_6
- Ben-Zvi, D. (2006). Using Tinkerplots to scaffold informal inference and argumentation. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute.
- Ben-Zvi, D. y Friedlander, A. (1996). Statistical thinking in a technological environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research in the role of technology in teaching and learning statistics: Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference* (pp. 45-55). International Statistical Institute.
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-16). Kluwer Academic Publishers.
- Biehler, R. (1993). Software tools and mathematics education: The case of statistics. En C. Keitel y K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 68-100). Springer.
- Biehler, R. (1997). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review*, 65, 167-189. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1997.tb00399.x>
- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En M.A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 643-690). Springer.
- Burrill, G. (2014). Tools for learning statistics: Fundamental ideas in statistics and the role of technology. En T. Wassong, D. Frischmeier, P. Fischer, R. Hochmuth y P. Bender (Eds.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen [Using Tools for Learning Mathematics and Statistics]* (pp. 153-162). Springer.

- Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2018). *Texto del estudiante Matemática. 8° Básico*. SM.
- Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core Standards for Mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. [Tesis Doctoral no publicada Universidad de Granada].
- delMas, R. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 79-95). Kluwer Academic Publishers.
- Fan, L., Miao, Z. y Zhu, Y. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 633-646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D.S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education. GAISE Report*. American Statistical Association.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Science & Business Media.
- Haggarty, L. y Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567-590. <https://doi.org/10.1080/0141192022000005832>
- Hancock, C., Kaput, J.J. y Goldsmith, L.T. (1992). Authentic inquiry into data: Critical barriers to classroom implementation. *Educational Psychologist*, 27(3), 337-364. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2703_5
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México D.F.: McGraw Hill.
- Inzunsa, S. y Juárez, J.A. (2010). High school teachers reasoning about data analysis in a dynamics statistical environment. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). International Statistical Institute.
- Kula, F. y Koçer, R.G. (2020). Why is it difficult to understand statistical inference? Reflections on the opposing directions of construction and application of inference framework. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 39(4), 248-265. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrz014>
- Lee, H.S. y Hollebrands, K.F. (2011). Characterising and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: challenges for teaching and teachers' education: A joint ICME/IASE study* (pp. 359-369). Springer.

- Lloyd, G.M. (2009). School mathematics curriculum materials for teachers' learning: Future elementary teachers' interactions with curriculum materials in a mathematics course in the United States. *ZDM Mathematics Education*, 41(6), 763-775.
- López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación*, 4, 167-179.
- Makar, K. (2014). Young children's explorations of average through informal inferential reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 61-78. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9526-y>
- Makar, K. y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105. <https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457>
- Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8
- Merino, R., Muñoz, V., Perez, B. y Rupin, P. (2018). *Texto del estudiante. Matemática. 7° básico*. SM.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Autor.
- Ministerio de Educación de Chile (2009). *Propuesta ajuste curricular. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios. Matemática*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile (2011). *Fundamentos bases curriculares 2011 Educación Básica. Propuesta presentada para aprobación del Consejo Nacional de Educación*. Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares de 1° a 6° básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile (2016a). *Matemática, Programa de estudio de Séptimo básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile (2016b). *Matemática, Programa de Estudio Octavo Año Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile (2019). *Bases curriculares 3° Medio a 4° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Morales, R. y Ruiz, K. (2013). Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidad. En J.M. Contreras, G.R. Cañadas, M.M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 137-142). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Murillo, F. (2013). *Estudios de caso*. Universidad Autónoma de Madrid.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The Council.

- Pepin, B., Gueudet, G. y Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: a collective perspective on resources, their use and transformations. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, 45(7), 929-944.
- Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). International Statistical Institute.
- Pratt, D., Davies, N. y Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 97-107). Springer.
- Remillard, J.T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry*, 29, 315-342.
- Remillard, J.T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal*, 100(4), 331-350.
- Remillard, J.T., Herbel-Eisenmann, B.A. y Lloyd, G.M. (2009). *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction*. Routledge.
- Rezat, S. (2024). Research on curriculum resources in mathematics education: a survey of the field. *ZDM*, 56, 223-237.
- Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM*, 53, 1189-1206. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3>
- Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19.
- Ruiz, N. (2014). La enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria en América Latina. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 13(1), 103-121.
- Sánchez-Acevedo, N.A. y Ruiz, B. (2020). Análisis de las actividades propuestas en dos programas de estudio chilenos en el eje de Estadística y Probabilidad. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, e776. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.776
- Sánchez-Acevedo, N., y Ruiz, B. (2022). Análisis de las actividades que proponen dos libros de texto de educación primaria. Un acercamiento comparativo desde la perspectiva de la inferencia informal. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 21(46), 76-101.
- Setz, J. y Darrigrandi, F. (2011). *Texto para el estudiante, 7° de educación básica. Matemática*. Santillana.
- Silverman, J. y Thompson, P.W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 499-511.
- Sherin, M.G. y Drake, C. (2009). Curriculum strategy framework: Investigating patterns in teachers' use of a reform-based elementary mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 41(4), 467-500. <https://doi.org/10.1080/00220270802696115>

- Tobías-Lara, M.G. y Gómez-Blancarte, A.L. (2019). Assessment of informal and formal inferential reasoning: A critical research review. *Statistics Education Research Journal*, 18(1), 8-25.
- Wild, C.J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.
- Zieffler, A., Garfield, J. y delMas, R. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.

APPROACH TO THE CONCORDANCE BETWEEN PROGRAMS AND TEXTBOOKS IN STATISTICS IN CHILE. APPROACH FROM INFORMAL INFERENCE

Abstract

This research explores the coherence between the Learning Objectives and the activities proposed to the teacher in the 7th and 8th grade study programs and the textbooks at the same levels in the statistics unit. Two analysis perspectives are considered, focused on the understanding of statistical concepts, on the one hand, informal inference, and on the other, as a complement, the perspective of technological means to simulate phenomena based on data. The methodology followed was qualitative under a content analysis technique. The results show that the greatest number of activities presented in the study programs and textbooks promote a language treatment focused on the sample and in some specific cases, some activities give the possibility of interpretations to integrate concepts from center measures, position, variability of the sample, supported by technologies as a means to understand these concepts. In the specific case of the incorporation of technologies in programs and textbooks, it has an instrumental purpose, that is, its incorporation accounts for a use to simplify calculations, and not as a means to promote and develop inferential reasoning, informal. We conclude by discussing the relevance of this type of work at the curricular level, focusing on the importance it has for mathematics teachers who teach statistics.

Keywords: curricular documents, statistics, informal inference, technologies.

UMA ABORDAGEM À COERÊNCIA ENTRE PROGRAMAS DE ESTUDO E LIVROS DE ESTATÍSTICA NO CHILE. UMA ABORDAGEM A PARTIR DE INFERÊNCIA INFORMAL E TECNOLOGIAS

Resumo

Esta investigação explora a coerência entre os Objectivos de Aprendizagem e as actividades propostas ao professor nos programas de estudo do 7.º e 8.º anos e os manuais escolares dos mesmos níveis na unidade de estatística. São consideradas duas perspectivas de análise, centradas na compreensão de conceitos estatísticos, por um lado, a inferência informal, e por outro, como complemento, a perspectiva dos meios tecnológicos para simular fenómenos com base em dados. A metodologia seguida foi qualitativa sob técnica de análise de conteúdo. Os resultados mostram que o maior número de actividades apresentadas nos programas de estudo e nos livros didáticos promovem um tratamento linguístico focado na amostra e em alguns casos específicos, algumas actividades dão a possibilidade de interpretações para integrar conceitos de medidas de centro, posição, variabilidade do. amostra, apoiada em tecnologias como meio de compreensão desses conceitos. No caso específico da incorporação de tecnologias em programas e livros didáticos, ela tem uma finalidade instrumental, ou seja, sua incorporação dá conta de uma utilização para simplificar cálculos, e não como meio de promover e desenvolver o raciocínio inferencial. Concluimos discutindo a relevância deste tipo de trabalho a nível curricular, focando na importância que tem para os professores de matemática que ensinam estatística.

Palavras-chave: documentos curriculares, estatísticas, inferência informal, tecnologias.

Nicolás Sánchez Acevedo

Universidad Central de Chile, Santiago, Chile

nicolas.sanchez@ucentral.cl

<https://orcid.org/0000-0002-0665-6102>

Resumen curricular. Estudiante de Doctorado en Matemática Educativa por el Instituto Politécnico Nacional (CICATA-México), Magíster en Enseñanza de las Ciencias y Matemáticas (UPLA) y Magíster en Educación Matemática (UFRO). Estadístico y profesor de Matemática. Miembro de la Red Latinoamericana de Educación Estadística (RELIEE), del Grupo de Investigación “Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM-UHU, España) y del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). En los últimos años he desarrollado investigación en el contexto de la didáctica de la estadística, específicamente en el análisis y uso de documentos curriculares por profesores de matemáticas en ejercicio que enseñan estadística y, en el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, en particular en la ejemplificación en los tópicos de la ecuación y función cuadrática. En estas dos líneas, pretendo establecer un puente sobre el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, particularmente, para la enseñanza de la estadística en contexto escolar.

Blanca Ruiz Hernández

Tecnológico de Monterrey, Monterrey, México

bruiz@tec.mx

<https://orcid.org/0000-0003-0157-3866>

Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Profesora del Departamento de Ciencias de la Escuela de Ingeniería y Ciencias e investigadora en la Escuela de Educación y Humanidades del Tecnológico de Monterrey. Colabora con el programa de posgrado en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA, IPN). Es coordinadora del Seminario Repensar las Matemáticas del IPN. Miembro de la Red Latinoamericana en Educación Estadística RELIEE y de la Red de Investigación e Innovación en Educación Estadística y Matemática Educativa (riieeme). Forma parte de los grupos de investigación Red de los Seminarios Repensar y del Grupo Socially oriented STEM interdisciplinary education for the 21st century (SOI-STEM) en el Institute for the Future of Education (Tecnológico de Monterrey). Sus principales líneas de investigación versan alrededor del razonamiento y pensamiento estadístico y vinculación entre la investigación educativa y la docencia en matemáticas.

ANÁLISIS DEL NIVEL DE LECTURA Y CONTEXTO DE TABLAS ESTADÍSTICAS EN TEXTOS DE SECUNDARIA ESPAÑOLES PARA DESARROLLAR EL SENTIDO ESTOCÁSTICO

María M. Gea

Jocelyn D. Pallauta

Pedro Arteaga

RESUMEN

El sentido estocástico que los estudiantes deben adquirir durante su formación básica en España está fuertemente vinculado a la lectura e interpretación de información estadística, generalmente, representada mediante tablas y gráficas. Su desarrollo debe orientarse hacia la valoración crítica y toma de decisiones en variedad de situaciones fundamentadas en datos. En este trabajo se utiliza el análisis de contenido para abordar el estudio del nivel de lectura que se plantea en la actividad matemática con tablas estadísticas y el contexto en que se presentan en una muestra de 10 libros de texto dirigidos a la Educación Secundaria Obligatoria en España (12 a 15 años). Los textos cubren toda esta etapa educativa y corresponden a dos editoriales de gran uso y prestigio en la enseñanza de las matemáticas en secundaria en España. El contexto con que se proponen dichas tareas se analiza en base al marco teórico utilizado en pruebas internacionales. Los resultados informan de diferencias en el planteamiento de tareas descontextualizadas entre editoriales, pues en una editorial no se alcanza el 3,5% en los tres primeros cursos y en otra se supera el 10%. En cuarto curso crece el porcentaje de este tipo de tareas en ambas editoriales, pero se mantienen las diferencias entre ellas. En general, se plantean niveles básicos de lectura de la tabla, y no se observa progresión hacia niveles más avanzados, según se avanza de curso. Esta tendencia no cambia en ninguna de las editoriales al considerar la orientación de la lección en el desarrollo del sentido estocástico, según se traten contenidos en estadística descriptiva o probabilidad.

Palabras clave: Tablas estadísticas, nivel de lectura, contexto, libros de texto, Educación Secundaria.

Como citar: Gea, M.M., Pallauta, J.D. y Arteaga, P. (2024). Análisis del nivel de lectura y contexto de tablas estadísticas en textos de secundaria españoles para desarrollar el sentido estocástico. En D. Díaz-Levicoy y A. Salcedo (Eds.), *Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística* (pp. 239-258). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad están sucediendo cambios curriculares en diferentes países, como ocurre en España, orientados a promover enseñanzas y aprendizajes significativos en el estudiante que garanticen el logro de competencias. Pero esta realidad no es novedosa, porque el enfoque de la enseñanza por competencias se viene alentando desde finales del siglo XX.

El documento más destacado de este movimiento es el conocido como “Informe Delors”, en el que la Comisión Internacional sobre la Educación de la UNESCO (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization – UNESCO) establece los cuatro pilares de la educación para el siglo XXI (Delors et al., 1996). Destacamos de este documento el valor que imprime a la educación, como pieza angular del cambio social. Es decir, se necesita implantar sistemas educativos que garanticen la formación de una sociedad capaz de responder a los retos que se presentan en la vida, tanto a nivel particular como global. En este sentido, en la actual Agenda 2030 de la UNESCO, se reclaman cambios curriculares para garantizar que las generaciones adquieran conocimientos, habilidades, valores y actitudes con el fin de lograr sociedades sostenibles y alcanzar, así, los 17 objetivos que establecen para lograr una Educación basada en el Desarrollo Sostenible (UNESCO, 2017).

El cambio curricular en España es muy reciente, porque en 2022 el Ministerio de Educación y Formación Profesional estableció las directrices curriculares para cada etapa educativa, pero su implantación ha sido progresiva. En el año 2023 solo se implantó en cursos impares, de cualquier etapa educativa, y en el actual año escolar 2024 se ha implantado en la totalidad de los cursos. En este tiempo, las Comunidades Autónomas han ido publicando el desarrollo del currículo correspondiente a cada una de las etapas educativas en su ámbito de aplicación (por ejemplo, la Comunidad Autónoma de Andalucía publicó sus directrices curriculares para Educación Primaria, Secundaria Obligatoria y Bachillerato en Mayo de 2023).

En la asignatura de matemáticas, para cualquier etapa educativa, los contenidos se clasifican en saberes básicos, que conforman el sentido matemático, y se establecen competencias específicas junto a criterios para evaluar el logro de dichas competencias. En particular, en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), que comprende de los 12 a los 15 años, se establecen diez competencias específicas, que se han de desarrollar mediante el sentido numérico, sentido espacial, sentido de la medida, sentido algebraico, sentido estocástico y sentido socioafectivo. Los

contenidos para cada uno de estos sentidos se establecen por ciclo; en particular, en la Tabla 1 se muestra la progresión de saberes básicos en sentido estocástico para cada ciclo de la ESO.

Tabla 1.

Saberes básicos en sentido estocástico por ciclo de la ESO, según directrices curriculares estatales

	Primer ciclo	Segundo ciclo
Organización y análisis de datos	<ul style="list-style-type: none"> – Recogida y organización de datos de una variable en situaciones cotidianas. Diferencia entre variable y valores individuales. – Análisis e interpretación de tablas y gráficos en contextos reales. – Medidas de localización y dispersión: interpretación y análisis de la variabilidad en contextos reales. – Representación de gráficos (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones) y elección del más adecuado. – Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión. 	<ul style="list-style-type: none"> – Recogida y organización de datos de una variable bidimensional en situaciones cotidianas. Tablas de contingencia. – Análisis e interpretación de tablas y gráficos de una y dos variables en contextos reales. – Medidas de localización y dispersión: interpretación y análisis de la variabilidad. – Representación, análisis, interpretación y obtención de conclusiones razonadas de gráficos de una y dos variables (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones). – Relación entre dos variables, valorando gráficamente con herramientas tecnológicas la pertinencia de realizar una regresión lineal. Ajuste lineal con herramientas tecnológicas.
Incertidumbre	<ul style="list-style-type: none"> – Fenómenos deterministas y aleatorios. – Planificación, realización y análisis de experimentos simples. – Asignación de probabilidades con experimentación: el concepto de frecuencia relativa y regla de Laplace. – Formulación de preguntas adecuadas para conocer una población. – Datos relevantes para responder a cuestiones de investigación: presentación de la información de una muestra mediante herramientas digitales. – Conclusiones a partir de una muestra para emitir juicios y tomar decisiones adecuadas. 	<ul style="list-style-type: none"> – Planificación, realización y análisis de experimentos compuestos. – Regla de Laplace y técnicas de recuento en experimentos simples y compuestos (diagramas de árbol, tablas...) y aplicación a la toma de decisiones fundamentadas. – Diseño de estudios estadísticos. – Estrategias y herramientas de presentación e interpretación de datos en investigaciones mediante herramientas digitales adecuadas. – Análisis del alcance de conclusiones de un estudio estadístico valorando la representatividad de la muestra.
Inferencia	<ul style="list-style-type: none"> – Conclusiones a partir de una muestra para emitir juicios y tomar decisiones adecuadas. 	<ul style="list-style-type: none"> – Análisis del alcance de conclusiones de un estudio estadístico valorando la representatividad de la muestra.

Fuente: Elaboración propia según MEFP (2022, pp. 41734-41735 y pp. 41739-41740)

El primer ciclo comprende de primer a tercer curso de la ESO y el segundo ciclo comprende cuarto curso, que tiene carácter electivo (opción A y B, esta última con mayor contenido

matemático, en general, pues se orienta al estudio de Bachillerato), aunque en sentido estocástico no hay diferencias en los saberes básicos que se establecen para cada opción en segundo ciclo.

Cabe mencionar, que la distribución y progresión de los saberes básicos sobre el sentido estocástico por curso para primer ciclo de la ESO no queda determinada en las directrices curriculares estatales (MEFP, 2022). Pero, tampoco podemos escoger cualquier Comunidad Autónoma en España para ejemplificar dicha distribución para este primer ciclo, porque no resultaría representativo del panorama educativo español. Por ejemplo, en Elgueda-Ibarra y Gea (2024) se observa que hay Comunidades Autónomas en España (por ejemplo, la Comunidad de Aragón, entre otras comunidades), que contemplan todos los contenidos que se establecen a nivel estatal para el estudio de la inferencia y la incertidumbre, mientras que en otras (por ejemplo, la Comunidad de Murcia) se contemplan únicamente estos contenidos en tercer curso.

Nuestro trabajo se centra en la etapa de la ESO, y según la Tabla 1 se observa la relevancia de la manipulación y experimentación en situaciones cotidianas, incluso mediante el uso de herramientas tecnológicas, así como el diseño de investigaciones estadísticas. Para ello, las tablas estadísticas se convierten en un contenido fundamental en cuanto al registro y organización de la información (Arteaga et al., 2011), aunque tienen más utilidades (Estrella et al., 2017).

En este sentido, conviene remarcar que, generalmente, no se toma conciencia de la importancia de construir adecuadamente una tabla estadística. Es decir, no es habitual detenerse al escoger la estructura de una tabla ni en cómo representar la información de un estudio estadístico para su análisis (según las filas y columnas que se determinan para su representación), aunque esta decisión sí influye en la interpretación de la información que se representa (Koschat, 2005).

Por otra parte, la tabla estadística se hace presente en los contenidos que se establecen en inferencia, como se observa en la Tabla 1. Porque se plantea la lectura crítica de los datos representados en tablas y gráficas estadísticas; por ejemplo, para establecer conclusiones y responder a cuestiones de investigación en base a datos relevantes de un estudio, así como para emitir juicios y tomar decisiones en torno al muestreo que se aplique sobre una población.

En nuestro trabajo nos interesamos por analizar una muestra de libros de texto dirigidos a la ESO, publicados de acuerdo con la actual normativa curricular en España (MEFP, 2022). Consideramos que el libro de texto sigue siendo un recurso ampliamente utilizado en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Montes et al., 2022), por lo que resulta de interés conocer si en los nuevos textos escolares que se publican en el marco de la nueva legislación educativa en España

se considera, también, el compromiso de intensificar el desarrollo de la competencia en interpretación de la información representada en tablas y gráficas estadísticas (MEFP, 2022). Se trata de responder a dos preguntas de interés: (1) ¿se plantean contextos reales y cercanos al estudiante en la actividad matemática mediante tablas estadísticas de una muestra de libros de texto de la ESO para desarrollar el sentido estocástico? (2) ¿Qué niveles de lectura a partir de las tablas estadísticas se promueven en una muestra de libros de texto de la ESO para desarrollar el sentido estocástico del estudiante?

Se comparan nuestros resultados con los de estudios previos, puesto que abordamos el análisis de variables de interés en el campo de investigación de la Educación Estadística y, en concreto, en la interpretación de tablas y gráficas estadísticas (Arteaga et al., 2021; Pallauta, Arteaga et al., 2021; Gea, Arteaga y Batanero, 2021).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se presentan en las siguientes secciones los elementos teóricos que fundamentan nuestro estudio, así como los antecedentes más inmediatos y destacados con los que comparar nuestros resultados.

Tipos de tablas estadísticas según su complejidad semiótica

Los elementos que intervienen en la interpretación de una tabla estadística permiten establecer una clasificación de estas, según su complejidad. Se trata de una clasificación empleada en investigaciones previas (Pallauta, Arteaga et al., 2021; Pallauta, Gea, Arteaga y Batanero, 2021), que ha motivado el desarrollo de otros marcos teóricos en la investigación en Educación Matemática. Por ejemplo, al analizar la actividad algebraica vinculada al uso de la tabla estadística en una muestra de libros de texto españoles de secundaria (Pallauta et al., 2023).

La clasificación establece tres tipologías de tablas (datos, distribución de una variable y distribución de dos variables), y según los elementos que se representan en cada tipo se diferencian del siguiente modo (Pallauta, Arteaga et al., 2021):

T1. *Tabla de datos*. En esta representación se emplean tantas filas o columnas como variables se registran por cada elemento que conforma el estudio de investigación. Su manejo suele ser sencillo, porque requiere identificar en la tabla a los individuos o elementos que intervienen en el estudio y, mediante una correspondencia, se hace referencia a cada individuo o elemento según

los valores que le corresponden en cada una de las variables, secuencialmente. Por tanto, no se maneja el concepto de frecuencia ni de distribución de frecuencias de una variable.

T2. *Tabla de distribución de frecuencias de una variable.* El manejo de esta representación suele ser más complejo que el de la tabla de datos, porque la estructura en filas y columnas atiende a la distribución de frecuencias de la variable. Por tanto, se requiere identificar la fila o columna en donde se representan las modalidades de la variable, porque para cada modalidad se hace corresponder su frecuencia (absoluta, relativa o porcentual). Esta tipología se subdivide en tres: T2.1, cuando se representa una distribución de frecuencias absolutas, relativas o porcentuales de una variable discreta o cualitativa; T2.2, cuando la distribución de frecuencias corresponde a una variable continua o se agrupan las modalidades de una variable discreta por intervalos; y T2.3, cuando se incluye en la tabla la distribución de frecuencias acumuladas.

T3. *Tabla de distribución de frecuencias de una variable bidimensional.* El manejo de esta representación suele ser el más complejo, porque requiere identificar las modalidades de cada variable, así como el cruce de cada modalidad en la tabla (en filas y columnas). Por tanto, se representan en una misma tabla tres tipos de distribuciones: conjunta, marginales, y condicionadas. Además, en esta tipología diferenciamos cuando se representan variables cualitativas o discretas (T3.1) y cuando se representen variables continuas o con datos agrupados en intervalos (T3.2).

Nivel de lectura de tablas y gráficas estadísticas

En el campo de investigación sobre tablas y gráficas estadísticas encontramos muchos estudios que analizan la dificultad que conlleva responder a preguntas sobre la lectura de la información representada en las mismas. Este marco de análisis ha sido establecido por Curcio (1989) y ampliado posteriormente por Shaughnessy et al. (1996) y en él se distinguen cuatro niveles aplicables a dicho análisis:

N1. Este nivel requiere reconocer la estructura y elementos de la tabla: título, etiquetas o correspondencia entre filas y columnas. Implica su lectura literal; por ejemplo, en la Figura 1 se muestra una tarea en la que se pide la lectura de la frecuencia relativa del dato 1.

N2. En este nivel de lectura es necesario comparar y operar con los datos representados en la tabla para establecer relaciones o tendencias; por ejemplo, en la Figura 2 se muestra una tarea en la que se pide completar una tabla en la que intervienen distintos tipos de frecuencias y conlleva relacionar la información representada en las diferentes celdas para su resolución.

Figura 1.

Ejemplo de tarea que implica un nivel N1 de lectura

Organiza datos con tablas de frecuencias

¿Cuál es la frecuencia relativa del dato 1?

1	1	4	2	4	2	3	2	5	0
3	3	2	1	1	1	2	3	2	4

a) 5 c) 0,25
b) 0,5 d) 20

Fuente: Grence Ruiz (2022, p. 284)

Figura 2.

Ejemplo de tarea que implica un nivel N2 de lectura

Completa en tu cuaderno estas tablas de frecuencias.

a)

Datos	f_i	h_i
0	6	0,4
1		0,6
Total	$N =$	

Fuente: Grence Ruiz (2022, p. 267)

N3. Este nivel implica leer más allá de los datos representados en la tabla para extrapolar o predecir información no disponible directamente en esta representación. Es difícil encontrar ejemplos de este nivel de lectura en los textos analizados y, generalmente, se encuentran en el tema sobre dependencia y asociación entre variables estadísticas. Un ejemplo se muestra en la Figura 3, donde se pide interpolar el alargamiento (en milímetros) de una pieza, cuando su temperatura es de 45°C, y determinar la fiabilidad de la estimación, según los datos de la tabla.

Figura 3.

Ejemplo de tarea que implica un nivel N3 de lectura

T	0	8	15	25	40	50	60	75
A	0	1	2	3	5	6	7	9

Ejemplo 1

La longitud de un raíl de vía de tren a 0 °C es de 10 m. La tabla del margen nos muestra los alargamientos, A (en mm), a distintas temperaturas, T (en °C).

1 Estima, con los datos del ejemplo 1, el alargamiento correspondiente a una temperatura de 45 °C. ¿Consideras fiable la estimación?

Fuente: Colera et al. (2023, p. 214)

N4. Este nivel conlleva una lectura crítica de la información representada en la tabla estadística, para establecer conclusiones acordes, por ejemplo, a la fiabilidad del diseño muestral que se aplica, el contexto o la fuente de los datos, entre otros aspectos. En la Figura 4 se muestra un ejemplo en el que se pide decidir si el dado está trucado, tras haber reflexionado (primer apartado de la tarea) en la equiprobabilidad de los resultados que se muestran en la tabla.

Figura 4.

Ejemplo de tarea que implica un nivel N4 de lectura

Se lanza mil veces un dado de seis caras.

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	130	214	0	218	222	216

a) ¿Crees que hay algunos números equiprobables?
b) ¿Qué número es el menos probable? ¿Podemos decir que el dado está trucado?

Fuente: Grence Ruiz (2022, p. 274)

El contexto en la actividad estadística

La actividad matemática que plantean las directrices curriculares de la mayoría de los países pone en valor el rol del contexto para desarrollar el sentido matemático del estudiante. En las directrices curriculares en España se indica que: “Los sentidos [que conforman el sentido matemático] se entienden como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos” (MEFP, 2022, p. 41725). Más adelante, la normativa define el sentido estocástico en los mismos términos, haciendo énfasis en la competencia del “análisis y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en una amplia variedad de situaciones cotidianas” (MEFP, 2022, p., 41726).

Nuestro trabajo se fundamenta en el marco de evaluación del estudio PISA (Programme for International Student Assessment) elaborado por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) en el que se diferencian cuatro contextos fundamentales para la actividad matemática (MEFP, 2023): Científico, que comprende los problemas intra-matemáticos y los relacionados con el mundo natural y la ciencia (ecología, climatología, medicina, etc.) y la tecnología; Ocupacional, que comprende los problemas vinculados al mundo laboral (construcción, presupuestos, etc.); Personal, que comprende situaciones relacionadas con la familia o el grupo entre iguales relativos a su ocio, compras, etc.; Social, que comprende problemas relativos a la comunidad tanto local como nacional o global en cuanto a política, demografía, etc. Se añade a la clasificación el contexto aleatorio, por tratarse de situaciones que favorecen el estudio del enfoque frecuencial de la probabilidad y se promueven mediante el estudio de tablas en esta etapa educativa (Ver Tabla 1).

ANTECEDENTES

Los estudios sobre tablas estadísticas en libros de texto se abordan en contextos educativos de diferentes países y, generalmente, en las primeras etapas educativas (Amorin y Silva, 2016; Díaz-Levicoy et al., 2015; 2017; Evangelista y Guimarães, 2019; García-García et al, 2019; Gea et al., 2022). Otros estudios analizan, conjuntamente, las tablas y gráficos estadísticos propuestos en libros de texto de Educación Primaria, en contextos educativos de diferentes países (Bivar y Selva, 2011; Guimarães et al., 2007; Pallauta et al., 2023; Vásquez et al., 2019; 2022). En Gea (2023) se muestra en detalle el tipo de objeto de análisis, el país y la muestra empleada en dichos estudios.

En la etapa de Educación Secundaria, los estudios en los que se analizan tablas estadísticas en libros de texto son más escasos (Pallauta, Gea, Batanero y Arteaga, 2021; Pallauta, Gea, y Arteaga, 2021) y solo en uno se analizan las tablas y gráficos estadísticos, conjuntamente, en el contexto educativo argentino (Pomilio et al., 2016).

Estos estudios evidencian, independientemente de la etapa educativa a la que se dirigen, un exceso de tareas procedimentales sin implicar al estudiante en la formulación de preguntas o diseños de investigaciones, siendo más acusada esta tendencia en los estudios dirigidos a la etapa de Educación Secundaria (Pallauta, Gea, Batanero y Arteaga, 2021; Pomilio et al., 2016).

Apenas se plantean tareas que impliquen la construcción de tablas estadísticas o interpretar su estructura. Por el contrario, es muy común encontrar un alto porcentaje de tareas en que se pide leer la información de una tabla para calcular medidas estadísticas o probabilidades (Amorin y Silva, 2016; Evangelista y Guimarães, 2019; Pallauta, Gea y Arteaga, 2021).

MÉTODO

Se aplica el método de análisis de contenido (Krippendorff, 2004) a una muestra de 10 textos dirigidos a la ESO de acuerdo con la legislación vigente en España (MEFP, 2022), publicados por dos editoriales (Anaya y Santillana) de gran tradición y prestigio en la enseñanza de las matemáticas en dicha etapa educativa. Se comienza identificando las lecciones dedicadas al desarrollo del sentido estocástico por cada curso y editorial, cuya distribución se muestra en la Tabla 2, según se orientan al estudio de la estadística descriptiva o la probabilidad.

En esta Tabla 2 se observa que la editorial Anaya presenta mayor número de lecciones para desarrollar los saberes básicos (Ver Tabla 1) del sentido estocástico.

Tabla 2.

Lecciones dedicadas al estudio de estadística descriptiva o probabilidad, según curso y editorial

Contenido de la lección	1°ESO		2°ESO		3°ESO		4°ESO-A		4°ESO-B	
	A	S	A	S	A	S	A	S	A	S
Estadística descriptiva	T15	T12		T12	T13	T12	T10	T8	T9	T11
Probabilidad	una situación	T12	T14	T12	T15	T12	T12	T9	T11	T12

Fuente: Elaboración propia [A: Editorial Anaya; S: Editorial Santillana; T: Tema o Lección]

En particular, destacamos algunas diferencias entre editoriales en cuanto al enfoque del desarrollo del sentido estocástico, sobre todo, en 1°ESO y 2°ESO. Así es que, la editorial Anaya dedica 1°ESO, prácticamente, al estudio de la estadística descriptiva, aunque presenta una situación de aprendizaje al final de la lección del Tema 15 dedicada al cálculo de la probabilidad, en su enfoque frecuencial. Mientras que dedica 2°ESO al estudio de la probabilidad y se intensifica el estudio de ambos contenidos en 3°ESO. En cambio, la editorial Santillana aborda tanto en 1°ESO, 2°ESO como 3°ESO una lección al estudio conjunto de la estadística descriptiva y de la probabilidad. Además, ambas editoriales intensifican el desarrollo del sentido estocástico en 4°ESO, introduciendo el estudio de la estadística bidimensional; aunque Anaya disminuye los contenidos en probabilidad en la opción A (no considerando el estudio de la combinatoria) y Santillana los mantiene en ambas opciones.

Las variables de análisis en nuestro estudio son el contexto en que se presenta la actividad matemática con la tabla estadística y el nivel de lectura que se plantea de la misma, diferenciando el tipo de tabla en que se presenta cada una de dichas variables de análisis. Las categorías de análisis refieren a la literatura de investigación y se describieron, anteriormente, como fundamentos teóricos de este trabajo. Además, se asegura la fiabilidad de la codificación en la investigación, en la medida que se han realizado sucesivas revisiones de los textos analizados por los autores del presente estudio, con las consecuentes discusiones sobre aquellos casos discordantes, hasta alcanzar un acuerdo en sus codificaciones. Los resultados muestran las relaciones entre las categorías de análisis de las variables de estudio con cada curso y editorial.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En las siguientes secciones se presentan los resultados del análisis del nivel de lectura y contexto con que se plantea la actividad matemática mediante tablas estadísticas en la muestra de 10 textos

seleccionados para nuestro estudio, dirigidos a la ESO en España por dos editoriales. En el análisis se identificó un total de 1217 consignas en las que se plantea al estudiante responder en base al manejo de la tabla estadística, que se distribuyen de modo similar por editorial: un total de 633 en la editorial Anaya y 584 en la editorial Santillana.

Contexto

Para responder a la primera pregunta de investigación (¿se plantean contextos reales y cercanos al estudiante en la actividad matemática mediante tablas estadísticas de una muestra de libros de texto de la ESO para desarrollar el sentido estocástico?), en la Tabla 3 se resumen los resultados del análisis.

Tabla 3.

Porcentaje de tareas según el contexto en que se presentan, por curso y editorial

Contexto	1°ESO		2°ESO		3°ESO		4°ESO-A		4°ESO-B	
	A	S	A	S	A	S	A	S	A	S
Científico	1,4	4,5	0,0	5,4	6,6	2,6	13,7	3,8	14,2	3,8
Aleatoriedad	10,8	13,6	6,7	1,4	6,6	0,0	3,7	13,1	6,1	13,0
Ocupacional	0,0	0,0	50,0	6,8	10,7	3,9	5,6	10,9	3,3	10,9
Personal	56,8	34,8	43,3	24,3	60,7	61,0	39,8	26,8	48,0	27,2
Sin contexto	2,7	13,6	0,0	12,2	3,3	13,0	11,8	27,3	12,2	27,2
Social	28,4	33,3	0,0	50,0	12,3	19,5	25,5	18,0	16,3	17,9

Fuente: Elaboración propia [A: Editorial Anaya; S: Editorial Santillana]

Podemos destacar, que la editorial Anaya plantea menos tareas descontextualizadas que Santillana en toda la ESO (8,7% frente a 21,9%), estando en consonancia con lo que establece el currículo (MEFP, 2022), así como otros documentos de referencia a nivel internacional (Bargagliotti et al., 2020; Franklin et al., 2007). En cuanto a estudios previos, Santillana se mantiene en la tendencia en cuanto a plantear este tipo de tareas (Pallauta, Arteaga et al., 2021).

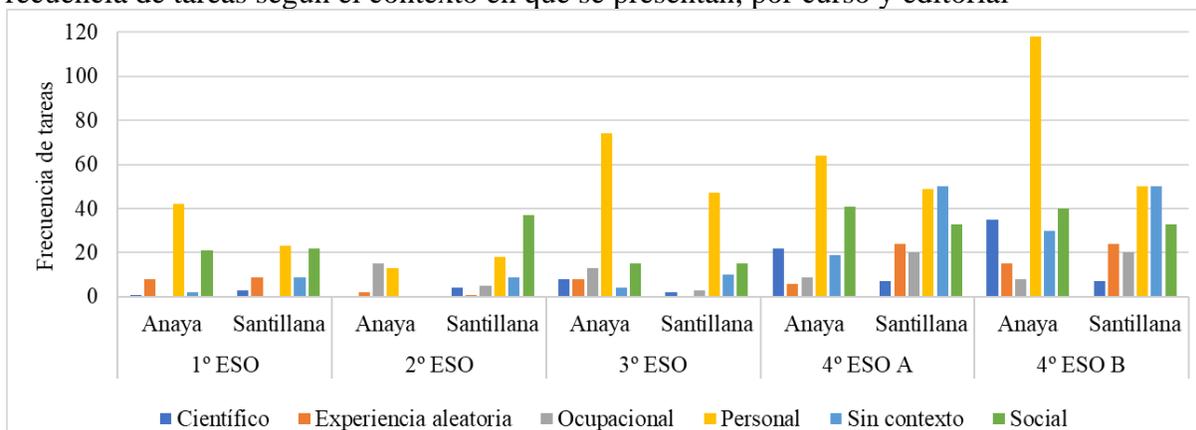
En general, en la Tabla 2 se observa que el contexto que más se propone en la editorial Anaya es el personal, seguido del social y el científico (sobre todo en los últimos cursos), mientras que en la editorial Santillana el más utilizado es el personal, seguido del social y tareas descontextualizadas (sobre todo en los últimos cursos).

En la Figura 5 se comparan los contextos por curso y editorial, donde se observa que destaca el personal, seguido del social en ambas editoriales. Esta tendencia se ha destacado, también, en estudios previos con porcentajes similares (Díaz-Levicoy et al., 2015; García-García

et al., 2019; Pallauta, Arteaga et al., 2021). En los primeros cursos encontramos menos tareas en contexto científico, que aparecen en mayor medida en 4ºESO en cualquiera de sus opcionalidades.

Figura 5.

Frecuencia de tareas según el contexto en que se presentan, por curso y editorial



Nivel de lectura de las tablas estadísticas

Los resultados del análisis del nivel de lectura de las tablas estadísticas en la muestra de 10 libros de texto de la ESO se resumen en la Tabla 4, y permiten responder a la segunda pregunta de investigación (¿qué niveles de lectura a partir de las tablas estadísticas se promueven en una muestra de libros de texto de la ESO para desarrollar el sentido estocástico del estudiante?).

Tabla 4.

Porcentaje de tareas según el nivel de lectura que plantean de la tabla, por curso y editorial

Contexto	1ºESO		2ºESO		3ºESO		4ºESO-A		4ºESO-B	
	A	S	A	S	A	S	A	S	A	S
N1	6,8	16,7	3,3	21,6	13,9	5,2	15,5	15,3	26,0	15,2
N2	91,9	78,8	93,3	78,4	80,3	93,5	75,8	84,2	67,1	84,2
N3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	8,1	0,5	4,1	0,5
N4	1,4	4,5	3,3	0,0	5,7	1,3	0,6	0,0	2,8	0,0

Fuente: Elaboración propia [A: Editorial Anaya; S: Editorial Santillana]

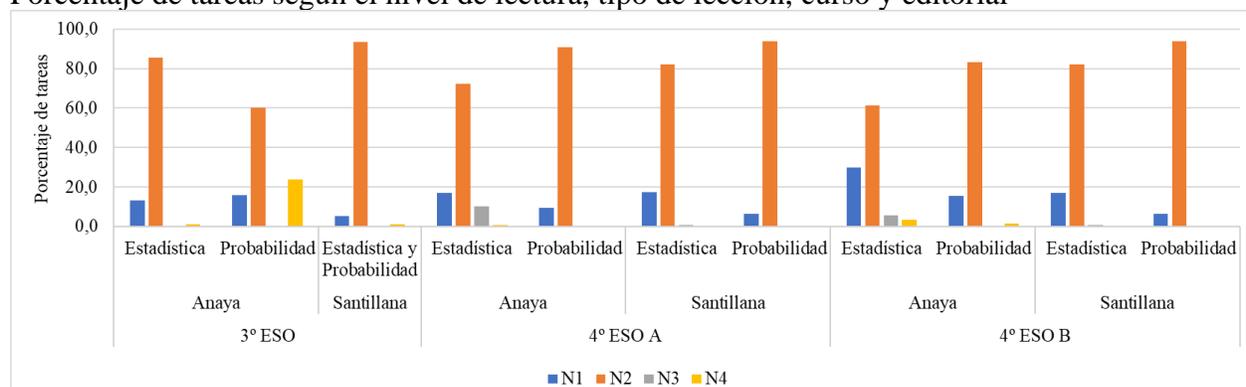
En la Tabla 4 se aprecia una clara tendencia en ambas editoriales por plantear tareas de un nivel de lectura de la tabla meramente operacional (N2), siendo un 76% en Anaya y un 84,1% en Santillana, según el conjunto de las tareas analizadas. Esta tendencia se sigue en el planteamiento de tareas de un nivel de lectura elemental (N1) en ambas editoriales. En general, destaca la editorial Anaya en el planteamiento de tareas en los niveles de lectura más avanzados. Estas evidencias se

respaldan por resultados en estudios previos, según el análisis de textos escolares en diferentes contextos educativos (Pallauta, 2022).

Cuando analizamos si el nivel de lectura puede estar influenciado por la orientación de la lección en el desarrollo del sentido estocástico (Ver Tabla 1), en los primeros cursos de la ESO solo podemos establecer conclusiones en cuanto a la editorial Anaya, porque la editorial Santillana ofrece una única lección con orientación conjunta a los contenidos de estadística descriptiva y probabilidad en los tres primeros cursos de la ESO. Así es que, prevalece el nivel de lectura N2 en el tema dedicado a la estadística descriptiva en 1ºESO por la editorial Anaya, porque la situación de aprendizaje en torno al significado frecuencial de la probabilidad presenta un nivel de lectura N2. En cuanto a la lección dedicada a la probabilidad en 2ºESO, igualmente prevalece dicho nivel de lectura.

Figura 6.

Porcentaje de tareas según el nivel de lectura, tipo de lección, curso y editorial



En la Figura 6 se muestran los porcentajes de tareas según el nivel de lectura con que se plantea la actividad matemática mediante tablas estadísticas, cuando se diferencia la orientación de cada lección en un mismo curso, según editorial.

Aunque se observa que en cualquier curso y editorial se mantiene la prevalencia del nivel de lectura N2, seguido del nivel de lectura N1, independientemente de la orientación de la lección para el desarrollo del sentido estocástico, podemos observar diferencias en la editorial Anaya. Porque en cualquier opción de 4ºESO se plantea más tareas en niveles de lectura avanzados en el tema de estadística que en el de probabilidad. Esta situación se presenta al contrario en 3ºESO en dicha editorial. En cambio, no se observan diferencias en la editorial Santillana.

CONCLUSIÓN

En este trabajo presentamos resultados de una investigación sobre libros de texto dirigidos a la Educación Secundaria Obligatoria en España, en la que se analiza el contexto con que se presenta la actividad matemática mediante tablas estadísticas y el nivel de lectura que se plantea de estas representaciones en dichas tareas. La relevancia del contexto en la actividad estadística prevalece al que pueda tener en la actividad matemática, en general, como se pone de manifiesto en la primera edición del proyecto GAISE (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education, Franklin et al., 2007), cuyas premisas se mantienen en su segunda edición (Bargagliotti et al., 2020, p.6). Además, la actual normativa curricular en España intensifica los contenidos relativos a la inferencia informal (MEFP, 2022), por lo que se espera que los libros de texto atiendan a dichas recomendaciones, proponiendo niveles de lectura más sofisticados sobre las tablas estadísticas.

Los resultados sobre el contexto respaldan los de investigaciones previas, prevaleciendo el contexto personal, seguido del social, en ambas editoriales analizadas. En cambio, detectamos la incidencia en una de las editoriales, aunque poco significativa, por plantear tareas descontextualizadas, principalmente en los últimos cursos de secundaria. Estos resultados debieran ser considerados por los profesores cuando escojan las editoriales de los textos que se utilizarán para esta etapa educativa, que las Administraciones Educativas en España entregan gratuitamente a los centros escolares periódicamente. Una segunda perspectiva de estos resultados se enfoca en la responsabilidad de los docentes por evitar plantear las tareas descontextualizadas que se proponen en los textos y combinar la enseñanza con el uso de proyectos (Batanero et al., 2013; Batanero y Díaz, 2011; Bargagliotti et al., 2020). Porque puede suceder que los estudiantes resuelvan tareas procedimentales, pero no sean capaces de trasladar a su vida cotidiana aquello que se les enseña en la escuela (Gage y Spiegelhalter, 2016).

En cuanto al nivel de lectura, se observan ligeras diferencias entre editoriales cuando diferenciamos la orientación de la lección, según se traten contenidos de probabilidad o estadística descriptiva para desarrollar el sentido estocástico. Pero, en cualquier caso, destacan las tareas que plantean un nivel básico de lectura (N2 o N1). Esta situación no favorece el desarrollo del pensamiento crítico y creatividad de los estudiantes (OCDE, 2023) ni se encuentra en la línea de lo que se entiende por sentido estocástico en el currículo en España (MEFP, 2022). Puesto que: “Si bien el conocimiento y los hechos son importantes, ser capaz de razonar con ellos y aplicarlos

en situaciones no rutinarias requiere enseñanza para una comprensión más profunda.” (Gage y Spiegelhalter, 2016, p. v).

Consideramos que los resultados que se presentan en este trabajo y las implicaciones didácticas que se han puesto en relieve son de interés para docentes e investigadores, tanto en lo que refiere al contexto como en cuanto al nivel de lectura que se propone en la actividad matemática vinculada al estudio de la tabla estadística. Porque en las directrices curriculares de la gran mayoría de países y en documentos que ofrecen orientaciones curriculares a nivel internacional para la enseñanza, aprendizaje y evaluación de la estadística (por ejemplo, en Franklin et al., 2007; Bargagliotti et al., 2020) se demanda mayor atención al desarrollo del razonamiento del estudiante y enfocarse menos en desarrollar técnicas o procedimientos (Batanero et al., 2013; Batanero y Díaz, 2011; Bargagliotti et al., 2020; Gage y Spiegelhalter, 2016; OCDE, 2023), que es un resultado que se ha evidenciado en el estudio que se describe en este trabajo.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amorim, N. y Silva, R. (2016). Apresentação e utilização de tabelas em livros didáticos de matemática do 4º e 5º anos do ensino fundamental. *Em Teia*, 7(1), 1-21.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J.M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, 76, 55-67.
- Arteaga, P., Jiménez-Castro, M. y Batanero, C. (2021). Variables que caracterizan los gráficos estadísticos y las tareas relacionadas con ellos en los libros de texto de educación secundaria en Costa Rica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 125-140. <https://doi.org/10.35763/aiem20.4001>
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II) report*. American Statistical Association.
- Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con Proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- Bivar, D. y Selva, A. (2011). Analisando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros

- didáticos de matemática. En R. Borba, C. Monteiro y A. Ruiz (Eds.), *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-12). Universidade Federal de Pernambuco.
- Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M.J., Colera, R. y Aicardo, A. (2023). *Matemáticas 4 ESO. Operación Mundo*. Editorial Anaya.
- Delors, J., Al Mufti, I., Amagi, I., Carneiro, R., Chung, F., Geremek, B., Gorham, W., Kornhauser, A., Manley, M., Padrón Quero, M., Savané, M. A., Singh, K., Stavenhagen, R., Won Suhr, M. y Nazhao, Z. (1996). *Informe a la Unesco de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI: La educación encierra un tesoro*. Santillana. Ediciones UNESCO.
- Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. (2015). Tabla estadística en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de educación primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 4(7), 10-39.
- Díaz-Levicoy, D., Ruz, F. y Molina-Portillo, E. (2017). Tabla estadística en libros de texto chilenos de tercer año de educación primaria. *Espaço Plural*, 18(36), 196-218.
- Elgueda-Ibarra, M. y Gea, M.M. (2024, en prensa). La probabilidad en el currículo español de Educación Secundaria Obligatoria por Comunidades Autónomas. *Actas de las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Estrella, S., Mena-Lorca, A. y Olfos, R. (2017). Naturaleza del objeto matemático Tabla. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, 10(20), 105-122.
- Evangelista, B. y Guimarães, G. (2019). Análise de atividades sobre tabelas em livros didáticos brasileiros dos anos iniciais do Ensino Fundamental. En J.M. Contreras, M.M. Gea, M.M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.) *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-9). Grupo FQM126.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. American Statistical Association.
- Gage, J. y Spiegelhalter, D. (2016). *Teaching Probability*. Cambridge University Press.
- García-García, J., Díaz-Levicoy, D., Vidal, H. y Arredondo, E. (2019). La tabla estadística en libros de texto de educación primaria en México. *Paradigma*, 40(2), 153-175.
- Gea, M.M., Pallauta, J.D., Batanero, C. y Valenzuela-Ruiz, S.M. (2022). Statistical tables in Spanish Primary School textbooks. *Mathematics*, 10(15), 2809. <https://doi.org/10.3390/math10152809>
- Gea, M.M. (2023). El libro de texto en la enseñanza de la estadística. En P. Scott, Y. Morales y A. Ruiz (Eds.), *Memorias XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Trabajos invitados de la XVI CIAEM* (pp. 123-134). Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Grence Ruiz, T. (Dir.). (2022). *Matemáticas 1ºESO. Proyecto Construyendo Mundos*. Editorial Santillana.

- Guimarães, G., Gitirana, V., Cavalcanti, M. y Marques, M. (2007). Livros Didáticos de Matemática nas Séries Iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. En M.C. dos Santos (Ed.), *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*, (pp. 1-17). Universidade de Belo Horizonte.
- Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: an introduction to its methodology*. Sage Publications.
- Koschat, M. (2005). A case for simple tables. *The American Statistician*, 59(1), 31-40. <https://doi.org/10.1198/000313005X21429>
- MEFP. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Autor.
- MEFPD (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español*. Programa editorial del Ministerio de Educación y Formación Profesional.
- Montes, M., Codes, M. y Contreras, L. C. (2022). Consideraciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En L. Blanco, N. Climent, M.T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.) *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 37-54). Editorial Universidad de Granada y SEIEM.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, OCDE. (2023). *Supporting Teachers to Foster Creativity and Critical Thinking: A draft professional learning framework for teachers and leaders*. Educational Research and Innovation. OECD Publicaciones.
- Pallauta, J.D. (2022). *Análisis de las tablas estadísticas en textos escolares y su comprensión por estudiantes de Educación Básica*. [Tesis doctoral]. Universidad de Granada. <https://hdl.handle.net/10481/77953>
- Pallauta, J. D., Arteaga, P., Begué, N. y Gea, M.M. (2021). Análisis de la complejidad semiótica y contexto de las tablas estadísticas en los libros de texto españoles de secundaria. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(4), 193-220. <http://dx.doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p193-220>
- Pallauta, J.D., Caviedes, S., Muñoz-Cruz, M. y Coragem, C. (2023). La estadística y la probabilidad en libros de texto de educación infantil y primaria de España y Chile. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 12(2), 1-30. <http://dx.doi.org/10.24197/edmain.2.2023.1-30>
- Pallauta, J.D., Gea, M.M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2021). Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. *Bolema*, 35(71), 1803-1824. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a26>
- Pallauta, J.D., Gea, M.M. y Arteaga, P. (2021). Caracterización de las tareas propuestas sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos de educación básica. *Paradigma*, 42(1), 32-60. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p32-60.id1017>
- Pallauta, J.D., Gea, M.M., Arteaga, P. y Batanero, C. (2021). Niveles de lectura y contextos en las actividades sobre tablas estadísticas en textos chilenos y españoles. *RECHIEM*, 13(4), 119-133. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.74>

- Pallauta, J.D., Gea, M.M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2023). Algebraization Levels of Activities Linked to Statistical Tables in Spanish Secondary Textbooks. En G.F. Burrill, L.O. Souza y E. Reston (Eds) *Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives* (pp. 317-339). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_23
- Pomilio, Carlos J., Miño, M. Brignone, N.F., García Facal, G., Telesnicki, M.C., Fass, M., Filloy, J., Cueto, G., Fernández, M.S. y Pérez, A. (2016). Análisis de actividades sobre estadística descriptiva en libros de educación media: ¿Qué se pretende que los estudiantes aprendan? *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1345-1364.
- United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, UNESCO. (2017). *La UNESCO Avanza La Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*. Autor
- Vásquez, C., Pincheira, N., Piñeiro, J.L. y Díaz-Levicoy, D. (2019). ¿Cómo se promueve el aprendizaje de la estadística y la probabilidad? Un análisis desde los libros de texto para la Educación Primaria. *Bolema*, 33(65), 1133-1154. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a08>
- Vásquez, C., Arredondo, E.H. y García-García, J.I. (2022). Representaciones estadísticas a temprana edad: una aproximación desde los libros de texto de Chile y México. *Bolema*, 36(72), 116-145. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a06>

ANALYSIS OF THE READING LEVEL AND CONTEXT OF STATISTICAL TABLES IN SPANISH SECONDARY TEXTBOOKS TO DEVELOP STOCHASTIC SENSE

Abstract

Stochastic sense that students must acquire during their compulsory education in Spain is strongly linked to the reading and interpretation of statistical information, which is generally represented by statistical tables and graphs. Its development should be oriented towards critical assessment and decision-making in a variety of data-driven situations. In this paper we study the reading level and the context of the mathematical activity with statistical tables by the content analysis method in a sample of 10 Spanish secondary school textbooks. These textbooks cover completely Spanish secondary education (12 - 15 years old) and correspond to two prestige publishers great used in mathematics education at secondary school in Spain. The results show differences between publishers in the use of tasks with no context, with one of them reaching less than 3.5% in the first three grades and another one exceeding 10% In the fourth grade, the percentage of this type of task increases in both publishers, but the differences between them remain. In general, basic levels of table reading are proposed, neither is there any progression towards more advanced levels, as the educational level of the course progresses. This tendency does not change in any of the publishers when considering the orientation of the lesson in the development of stochastic sense, according to contents in descriptive statistics or probability.

Keywords: Statistical tables, reading level, context, textbooks, Secondary Education.

ANÁLISE DO NÍVEL DE LEITURA E DO CONTEXTO DE TABELAS ESTATÍSTICAS EM TEXTOS DO ENSINO SECUNDÁRIO ESPANHOL PARA DESENVOLVER O SENTIDO ESTOCÁSTICO

Resumo

O sentido estocástico que os estudantes devem adquirir durante sua formação básica na Espanha está fortemente vinculado à leitura e interpretação de informações estatísticas, geralmente, representadas por meio de tabelas e gráficos. Seu desenvolvimento deve ser orientado para a avaliação crítica e a tomada de decisões em diversas situações fundamentadas em dados. Neste trabalho, utilizamos a análise de conteúdo para abordar o estudo do nível de leitura que é proposto na atividade matemática com tabelas estatísticas e o contexto em que é apresentado em uma mostra de 10 livros de texto direcionados para a Educação Secundaria Obrigatória na Espanha (12 a 15 anos). Os textos cobrem toda esta etapa educativa e correspondem a editoriais de grande uso e prestígio no ensino de matemática para Educação secundária na Espanha. O contexto proposto por essas tarefas é analisado com base no marco teórico utilizado em testes internacionais. Os resultados informam diferenças no planejamento de tarefas descontextualizadas entre editoriais, em um editorial não se alcança os 3,5% nos três primeiros cursos e em outros se supera os 10% No quarto curso cresce a porcentagem deste tipo de tarefas em ambos os editoriais, mas as diferenças entre eles são mantidas. Em geral, são considerados níveis básicos de leitura da tabela, e não se observa a progressão para níveis mais avançados, após o avanço do curso. Esta tendência não muda em nenhum dos editoriais ao considerar a orientação da lição no desenvolvimento do sentido estocástico, dependendo do conteúdo da estatística descritiva ou da probabilidade.

Palavras-chave: Tabelas estatísticas, nível de leitura, contexto, livros didáticos, Ensino Secundário.

María M. Gea Serrano

Universidad de Granada, Granada, España.

mmgea@ugr.es

<https://orcid.org/0000-0002-5229-0121>

Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, actualmente Profesora Titular en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y responsable del Grupo de Investigación PAIDI: FQM126-Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada. Ha sido Coordinadora del Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española en Educación Matemática y coleader en la Conferencia Internacional sobre Enseñanza de Estadística (ICOTS-11). Actualmente es coleader del Grupo de Educación en Estadística y Probabilidad en el Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática (CERME). Ha participado en numerosos eventos nacionales e internacionales como ponente o miembro de comité científico y organizador. Es Editora Asociada de la revista Educación Matemática y ha colaborado como editora en diferentes números especiales en Educación Estadística en prestigiosas revistas en Educación Matemática.

Jocelyn D. Pallauta

Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile.

jocelyn.diaz@ulagos.cl

<https://orcid.org/0000-0001-5508-04924>

Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, actualmente Académica del Departamento de Ciencias Exactas y de los programas de Magíster y Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos. Su investigación está centrada en Educación Estadística y Formación de Profesores. Ha participado en congresos nacionales e internacionales como CERME (Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática), ICOTS (Conferencia Internacional en la Enseñanza de la Estadística), RELME o SEIEM, entre otros. Además ha participado en proyectos de investigación como investigadora principal y co-investigadora. Actualmente es miembro de la Sociedad Chilena de Educación Matemática, de la Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística y del Grupo de investigación PAIDI: FQM126-Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Pedro Arteaga Cezón

Universidad de Granada, Granada, España.

parteaga@ugr.es

<https://orcid.org/0000-0002-8347-7669>

Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Granada, actualmente es Profesor Titular en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Ha ejercido como Coordinador del Grado en Educación Infantil de la Universidad de Granada. Su investigación está centrada en Educación Estadística y Formación de Profesores. Ha participado en congresos nacionales e internacionales como CERME (Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática), ICOTS (Conferencia Internacional en la Enseñanza de la Estadística), CIBEM, RELME o SEIEM, o, entre otros. Destaca su participación como coleader del Grupo de Educación en Estadística y Probabilidad en el Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática (CERME), así como en la Conferencia Internacional sobre Enseñanza de Estadística (ICOTS).

LA PRESENCIA DE CONCEPTOS ESTADÍSTICOS EN EL PROYECTO EDITORIAL (PARADIDÁCTICO) “ACTIVIDADES Y JUEGOS CON ESTADÍSTICA”

Ailton Paulo de Oliveira Júnior
Ana Meire de Oliveira Morais
Luzia Roseli da Silva Santos

RESUMEN

En este estudio se analizó la presencia de conceptos estadísticos para estudiantes de Educación Primaria en el proyecto editorial presentado a través de un libro paradidáctico denominado “Actividades y juegos con Estadística”, producido y publicado por primera vez en idioma inglés en 1995 por su autor, nacido en Australia, siendo traducido y publicado en portugués, en Brasil, en 1998. Para su análisis, se utilizó un instrumento considerando la técnica de análisis de contenido, formado por diecisiete categorías organizadas en cuatro dimensiones: 1) Descripción del proyecto editorial; 2) Presencia de la estadística; 3) Contenidos/conceptos que se tratan; 4) Planificación y gestión. Se considera que los contenidos estadísticos tratados en el paradidáctico favorecen el desarrollo de la alfabetización estadística, sin embargo, podrían trabajarse mejor para presentar un aspecto más interdisciplinario, es decir, estar mejor asociados con los contenidos de otras áreas del conocimiento. Se observó que el enfoque sobre los contenidos estadísticos del proyecto editorial es relevante para la educación primaria en Brasil, además de presentar un lenguaje atractivo para los estudiantes, permitiendo considerar las capacidades de intervención que tiene el material didáctico puede ofrecer a la enseñanza de la estadística.

Palabras clave: Libro paradidáctico, Enseñanza de Estadística, Análisis de Contenido, Educación Primaria, Brasil.

INTRODUCCIÓN

Según los Parámetros Curriculares Nacionales – PCN, conjunto de directrices que orientan la práctica pedagógica en las escuelas (Brasil, 1997), para que los estudiantes puedan ejercer la ciudadanía, deben saber calcular, medir, razonar, argumentar y tratar estadísticamente las informaciones, para que puedan influir en la toma de decisiones sobre cuestiones políticas y sociales.

Desde la misma perspectiva, la Base Curricular Común Nacional - BNCC, documento actual que define los aprendizajes esenciales a trabajar en las escuelas brasileñas a lo largo de la Educación Primaria, propone que todos los ciudadanos desarrollen habilidades para recolectar, organizar, representar, interpretar y organizar. datos de una variedad de contextos para poder hacer juicios informados y tomar decisiones apropiadas. Incluye también la necesidad de razonar y utilizar conceptos, representaciones e índices estadísticos para describir, explicar y predecir fenómenos (Brasil, 2018).

Además, los Parámetros Curriculares Nacionales - PCN, Brasil (1997) advierten que en el mundo contemporáneo se imponen los siguientes requisitos: (1) dominio de la lengua hablada y escrita; (2) principios de reflexión matemática; (3) principios de explicación científica; (4) condiciones para disfrutar del arte y los mensajes estéticos; (5) dominios de conocimiento tradicionalmente presentes en diferentes concepciones del papel de la educación en el mundo democrático; entre muchos otros requisitos.

En el BNCC (Brasil, 2018), se indica que el contacto con cuentos, cuentos, fábulas, poemas, cuerdas, etc. proporciona familiaridad con los libros, con diferentes géneros literarios. La diferenciación entre ilustración y escritura, aprendiendo la dirección de la escritura y las formas correctas de manejar los libros, reconociendo así la lectura como fuente de placer e información.

A partir de esta discusión, todavía se asume que los libros de texto (didácticos) siguen siendo un recurso muy utilizado por los docentes y que, en cierta medida, regulan el proceso de enseñanza y aprendizaje (Piñeiro y Vásquez, 2019).

En general, este tipo de libro orienta a estudiantes y profesores sobre el contenido del vasto campo del conocimiento en el que se encuadra un determinado contenido (matemáticas o estadística) del año escolar. A diferencia de los llamados libros de texto (didácticos), el libro paradidáctico, objeto central de este trabajo, es un recurso didáctico utilizado para promover una comprensión más profunda de contenidos que el libro didáctico puede no alcanzar.

Así, para Rangel (2014), los libros paradidácticos, en su origen, trataban de distinguir estos productos de los libros de texto (didácticos) tradicionales, siempre asociados a disciplinas, organizados en colecciones seriadas y diseñados para el uso cotidiano. La principal diferencia radicaba en que el paradidáctico no pretendía abarcar el tema de una serie (año escolar) ni, mucho menos, un segmento completo de la educación. Se centraron en un único tema de interés curricular, tratado de forma más especializada y/o profunda. Como resultado, podrían utilizarse en diferentes momentos y niveles de educación.

Complementando, Ciabotti y Oliveira Júnior (2019) consideran que, a partir de la Ley de Directrices y Bases de la Educación - LDB, Brasil (1996) y el establecimiento de los Parámetros Curriculares Nacionales - PCN (Brasil, 1997), los libros paradidácticos están cada vez más presentes en la vida escolar cotidiana, ya que trae temas transversales, que generalmente no están cubiertos en los libros de texto. Son un recurso importante para enriquecer una secuencia didáctica y planes de lecciones, convirtiéndose en un recurso importante que potencia el aprendizaje y ofrece a los estudiantes la posibilidad de interactuar de manera reflexiva y crítica con su entorno social, desarrollando y experimentando su ciudadanía.

Así, el objetivo de este estudio fue analizar la presencia de contenidos/conceptos estadísticos en el proyecto editorial (libro paradidáctico) publicado en el mercado editorial brasileño en 1998 y denominado “Actividades y juegos con Estadística” de Marion Smoothery destinado a la Educación Primaria (estudiantes de 6 a 10 años).

Es importante resaltar que un proyecto editorial educativo se concibe como un conjunto de acciones encaminadas a poner a disposición obras didácticas, pedagógicas y literarias, entre otros materiales, para apoyar la práctica educativa, en el caso de este estudio, los libros paradidácticos, normalmente utilizados en las aulas de los diferentes niveles de enseñanza. tanto por parte de los estudiantes como de sus profesores.

MARCO TEÓRICO

Para Oliveira Júnior y Santos (2020), el material paradidáctico, aunque forma parte del mismo género de libro de texto, difiere según el tipo de abordaje del contenido y la forma en que se articulan el simbolismo estadístico, las imágenes y el texto escrito.

Carneiro et al. (2018) señalan que los libros paradidácticos se desarrollan para enseñar contenidos educativos utilizando cuentos literarios de forma lúdica, con personajes ilustrativos

utilizando contextos reales e hipotéticos, posibilitando el diálogo a través de elementos textuales como el escenario, los personajes y los conflictos del cuento.

No sólo se deben observar los aspectos literarios, sino prestar atención al potencial que encierra la historia, y no sólo a la trama que relata. Este es el primer paso para empezar a ver la literatura en otros aspectos, ya que un relato literario puede aportar diferentes posibilidades didácticas. También es de destacar que a través de todos los contenidos tratados existe un compromiso con la alfabetización de los estudiantes (Montoito, 2019).

Partiendo de la importancia de este material didáctico, Oliveira Júnior et al. (2015) enfatizan que es necesario incluir en la escuela primaria actividades que promuevan la construcción del lenguaje matemático a través de la lectura y la escritura en las clases, destacando la importancia de la construcción de libros que se denominan paradidácticos en la enseñanza de la estadística para la escuela primaria.

Complementando esta indicación, según Coutinho (2016), analizar cómo los libros de texto presentan contenidos y establecen secuencias de aprendizaje es importante especialmente para los docentes, ya que este material muchas veces es la única ayuda en la preparación de sus clases, ejerciendo gran influencia tanto en la construcción de conocimientos como en las prácticas docentes, como en la construcción del conocimiento de los estudiantes. Además, la investigación en Educación Estadística apunta a la necesidad de realizar más estudios sobre estos materiales didácticos en la búsqueda de desarrollar adecuadamente la alfabetización estadística de los estudiantes.

Además, Gal (2002) considera que, para un ciudadano alfabetizado, la alfabetización estadística es la capacidad que tiene una persona para interpretar, analizar críticamente y comunicar información estadística. En consecuencia, para Ben-Zvi y Garfield (2004), la alfabetización estadística incluye habilidades básicas que pueden usarse para comprender información estadística o resultados de investigación (capacidad para organizar datos, construir y mostrar gráficos y tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos).

Finalmente, indicando investigaciones en Brasil sobre el uso de libros de texto como herramienta pedagógica para la enseñanza de estadística en el aula, Oliveira Júnior y Santos (2023) analizaron la literatura en Brasil que utilizaron o crearon libros paradidácticos para la enseñanza de la estadística en la escuela primaria. Se consideraron como resultados trece estudios, de 2002 a 2021. La investigación está dirigida a estudiantes y docentes de los años iniciales (6 a 10 años) y

últimos años de educación primaria (11 a 14 años) y se destaca que los estudios aún están en sus inicios, lo que indica la necesidad de seguir trabajando, utilizando este enfoque.

En otro estudio, Oliveira Júnior y Morais (2024), en prensa, mapearon proyectos editoriales publicados en el mercado editorial brasileño, específicamente libros paradidácticos destinados a la enseñanza de estadística para los primeros años de la Escuela Primaria y que fueron producidos/publicados entre 1997 y 2022, refiriéndose a la forma en que se caracterizan como material didáctico para apoyar la enseñanza y el aprendizaje. Se observó que los abordajes de contenidos estadísticos son relevantes para los primeros años de la escuela primaria, realizándose con un lenguaje ligero, humorístico, atractivo para estudiantes de 6 a 10 años, permitiendo considerar las capacidades de intervención que tiene el libro paradidáctico puede ofrecer a la enseñanza de la estadística.

MATERIAL Y MÉTODOS

Se considera que el objetivo de la investigación es analizar la presencia de conceptos estadísticos para estudiantes de educación primaria en el proyecto editorial presentado a través de un libro paradidáctico.

Así, para este estudio se consideró el libro paradidáctico titulado “Actividades y juegos con Estadística”, publicado en 1998, editado por Scipione y escrito por Marion Smoothey. El libro fue publicado en 1995 en inglés por su autor, nacido en Australia, traducido por Sérgio Quadros y publicado en portugués, en Brasil, en 1998.

En el desarrollo de esta investigación se utilizó la metodología cualitativa, utilizando como método el análisis del contenido. El análisis de contenido en el contexto de este trabajo, según Rico y Fernández-Cano (2013), se utiliza para examinar la diversidad de significados escolares de diferentes conceptos, por ejemplo, los estadísticos, presentados en el material didáctico. Esta técnica, según Espina y Novo (2019), sirvió de apoyo para la construcción de este instrumento de análisis, permitiendo recolectar información respecto del tratamiento de diferentes contenidos de distintos proyectos editoriales.

Para diseñar el instrumento de análisis se consideró uno basado en la técnica de análisis de contenido según la propuesta de Espina y Novo (2019), conformado por diecisiete categorías, organizadas en cuatro dimensiones: 1) Descripción del proyecto editorial; 2) Presencia de Estadísticas; 3) Contenidos cubiertos; 4) Planificación y gestión.

Las categorías que subyacen a cada una de estas dimensiones fueron adaptadas a las concepciones actuales de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Estadística en la Educación Primaria (Alsina, 2017, 2018; Brasil, 2018; NCTM, 2000).

En cuanto al procedimiento seguido para el análisis de los datos, se indica que las categorías de las dimensiones 1 y 2 fueron analizadas cualitativamente. Por otro lado, los pertenecientes a las dimensiones 3 y 4 fueron analizados inicialmente de manera cualitativa, respondiendo las preguntas de forma narrativa y explicando detalladamente lo observado en los proyectos editoriales.

Los resultados obtenidos siguen el orden en que fueron recogidos en el instrumento de análisis y presentados en el diseño metodológico, es decir, divididos por cuatro dimensiones y, a su vez, por las diferentes categorías (C_i , donde $i = 1, \dots, 17$). Además, se ilustran algunas tareas propuestas en el proyecto editorial para una mejor comprensión de los resultados obtenidos.

Posteriormente se cuantificaron las categorías referentes a las dimensiones 3 y 4 para facilitar la descripción de los resultados obtenidos. La cuantificación se realizó considerando los niveles según Espina y Novo (2019) y descritos en la tabla 1. A cada categoría se le asignó un número en función de su grado de presencia en el proyecto editorial.

Tabla 1.
Criterios de asignación de categorías de puntuación

Nivel	Criterio
0 – Ausencia	Lo indicado en la categoría no se verifica en el proyecto editorial.
1 – Bajo	No hay suficientes referencias y las especificaciones marcadas en la categoría son pocas.
2 – Medio	En el proyecto editorial se puede asegurar que las especificaciones determinadas en la categoría se cumplen medianamente.
3 – Alto	Las especificaciones establecidas en la categoría pueden verse plenamente reflejadas en el proyecto editorial.

Fuente: Espina e Novo (2019, p. 98)

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Creemos en la posibilidad de desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística a través de proyectos editoriales (libros paradidácticos) que puedan constituir material didáctico que favorezca la labor del docente y contribuya al aprendizaje de los estudiantes de manera reflexiva y crítica, principalmente cuando los libros presentados contienen aspectos que presentan

situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes, a partir de posibles historias de vida que los rodean, asociándolas con la enseñanza de la estadística.

Describiendo lo paradidáctico según su proyecto editorial (Dimensión 1)

La dimensión 1 describe el proyecto editorial, presentando 5 categorías (C1 a C5), es decir, la descripción del proyecto editorial proporciona el año de publicación del proyecto editorial, su nombre, nivel educativo y enfoque metodológico. Por lo tanto, en la Tabla 2 presentamos la descripción del proyecto editorial referente a la dimensión 1, enfocado a realizar una clasificación del proyecto editorial.

Tabla 2.

Descripción del paradidáctico referente a la dimensión 1

Dimensión 1. Descripción del Paradidáctico
C1. Editorial: Scipione
C2. Paradidáctico: Actividades y juegos con Estadística
C3. Año de publicación: 1998
C4. Nivel educativo: escuela primaria
C5. Aproximación metodológica al proyecto editorial: Cuadernos Estadísticos

En esta primera dimensión, el análisis se centra en clasificar el proyecto editorial según su enfoque metodológico. Así, se describe el planteamiento de este proyecto editorial, indicando que, en 1998, se publicó el proyecto editorial de la editorial Scipione “Actividades y juegos con Estadística” (Smoothey, 1998), nivel de educación (Educación Primaria).

Como enfoque metodológico, el proyecto editorial se clasifica como cuadernos estadísticos, ya que presenta un conjunto de actividades/problemas/ejercicios que desarrollan contenidos/conceptos estadísticos.

El libro forma parte de la colección “Investigación Matemática” y utiliza situaciones cotidianas para trabajar conceptos que permitan al estudiante familiarizarse con la estadística y adquirir conocimientos para resolver juegos y actividades propuestas en forma de rompecabezas, senderos, laberintos y rompecabezas plegables.

Grando (2004) destaca que es fundamental incluir a los niños en actividades que permitan un camino que vaya de la imaginación a la abstracción, a través del planteamiento de hipótesis y prueba de conjeturas, la reflexión, el análisis, la síntesis y la creación, por parte del niño, de estrategias diversificadas de resolución de problemas. en juegos. También menciona que, al

analizar los atributos y/o características del juego que pueden justificar su inclusión en situaciones de enseñanza, se evidencia que representa una actividad lúdica que involucra el deseo e interés del jugador por la propia acción del juego.

Indicando la presencia de conceptos estadísticos en el proyecto editorial (Dimensión 2)

La dimensión 2 y sus dos categorías (C6 y C7) indican la presencia de estadísticas en el proyecto editorial, siendo la categoría C6 el porcentaje de actividades que presentan contenidos relacionados con estadísticas que están dirigidas a estudiantes en Brasil (Enseñanza Primaria y Secundaria).) de 6 a 18 años según BNCC.

Se observa que todas las actividades están orientadas a la enseñanza de la estadística, abarcando diferentes contenidos estadísticos, los cuales se pueden observar a través del índice del libro y presentados en la Figura 1.

Figura 1.

Índice del libro presentando su estructura y contenidos estadísticos

Índice	
Tabla de frecuencia	7
Datos	15
Muestras	17
Pictogramas	20
Gráfico de barras	23
Gráficos circulares	29
Levantamiento de datos	40
Valor medio	43
Amplitud	54
Gráficos de líneas	57
Glosario	60
Respuestas	62
Índice	64

Fuente: Smoothey (1998, p. 5)

A partir de la categoría C7, es decir, la descripción de cómo se distribuyen en torno a contenidos estadísticos las actividades dirigidas a los estudiantes de este nivel de educación, el libro presenta una secuencia de 12 (doce) temas enfocados a contenidos estadísticos según el BNCC (Figura 1). que se pueden vincular a la escuela primaria (los primeros siete temas, además del décimo) y la secundaria (octavo y noveno tema). Además, los temas finales indican un glosario

que presenta los términos estadísticos utilizados en el libro según lo indicado por la propia autora, así como las respuestas a las actividades propuestas.

En Brasil (2018), el BNCC se guía por el supuesto de que el aprendizaje está intrínsecamente relacionado con la comprensión, es decir, con la captación de los significados de objetos matemáticos o estadísticos, sin dejar de lado sus aplicaciones. Los significados de estos objetos resultan de las conexiones que los estudiantes establecen entre ellos y los demás componentes, entre ellos y su vida cotidiana y entre diferentes temáticas. De esta forma, recursos didácticos como juegos, libros (didácticos o para didácticos), etc., desempeñan un papel esencial en la comprensión y utilización de estas nociones. Sin embargo, estos materiales necesitan integrarse en situaciones que conduzcan a la reflexión y la sistematización, para que pueda iniciarse un proceso de formalización del conocimiento.

En el libro analizado, no existe una narrativa que sirva de hilo conductor de las actividades propuestas, sin indicación de progresión en cuanto a su secuencia. Las actividades no resaltan claramente los objetivos que proponen, pero es posible identificarlos al leer los textos explicativos que las acompañan.

El material didáctico parte de situaciones cotidianas para trabajar conceptos estadísticos, permitiendo al estudiante familiarizarse con el tema tratado y adquirir conocimientos a través de juegos y actividades propuestas en forma de rompecabezas, diferentes juegos, senderos, laberintos y rompecabezas plegables.

También muestra cómo se pueden compilar y estudiar datos estadísticos en gráficos de conteo, gráficos de barras, gráficos circulares y otras formas, y cómo se pueden utilizar para calcular promedios.

El contenido estadístico se aborda de forma gradual, indicando tablas, gráficos, estimaciones y otros conceptos estadísticos. Las actividades están organizadas para cubrir y desarrollar las competencias propuestas por BNCC en Brasil. Algunas actividades vienen con comentarios sobre su uso en el aula con el fin de ofrecer consejos a quienes quieran utilizarlas.

Dimensión 3: Contenido estadístico en el proyecto editorial

La dimensión 3 presenta análisis de contenido estadístico en el proyecto editorial, así como cuatro categorías más (C8 a C11). Con esta dimensión se pretendió recoger cómo se trabajan los contenidos y si son adecuados para los estudiantes (Tabla 3).

Tabla 3.

Descripción del proyecto editorial referente a la dimensión 3 (Contenido estadístico del proyecto editorial)

Categoría	Análisis	Nivel
C8. ¿Los contenidos son adecuados al nivel de desarrollo del sujeto al que van dirigidos?	En relación con este aspecto, el paradidáctico presenta actividades y contenidos adecuados y relacionados con la edad y nivel de conocimientos del sujeto.	3
C9. ¿Los contenidos están relacionados con aspectos de la vida diaria de los estudiantes?	En este aspecto, encontramos que en el paradidactico esta relación se presenta de manera moderada, a través de la propuesta de algunas actividades abordando contextos como: ir al cine, comer helado, número de horas dormidas.	2
C10. ¿Los contenidos de Estadística están relacionados con otras materias?	Respecto a este aspecto, no observamos relación entre los contenidos estadísticos presentados en el paradidactico y los contenidos de otras materias.	0
C11. ¿El aprendizaje de Estadísticas ocurre en el proyecto de manera cíclica?	Observamos que los contenidos estadísticos se presentan desde los más simples hasta los más elaborados. El tutorial presenta actividades de recolección de datos y tabla de frecuencia.	3

Considerando la categoría C8 (Los contenidos son adecuados para estudiantes de 6 a 10 años), categoría C9 (Los contenidos están relacionados con aspectos de la vida diaria de los estudiantes) y C11 (El aprendizaje de la estadística se realiza en el proyecto de manera cíclica), se presenta en la Figura 2, actividad que presenta una contextualización que está asociada a los contenidos estadísticos adheridos por estudiantes de 6 a 10 años según el BNCC (Brasil, 2018).

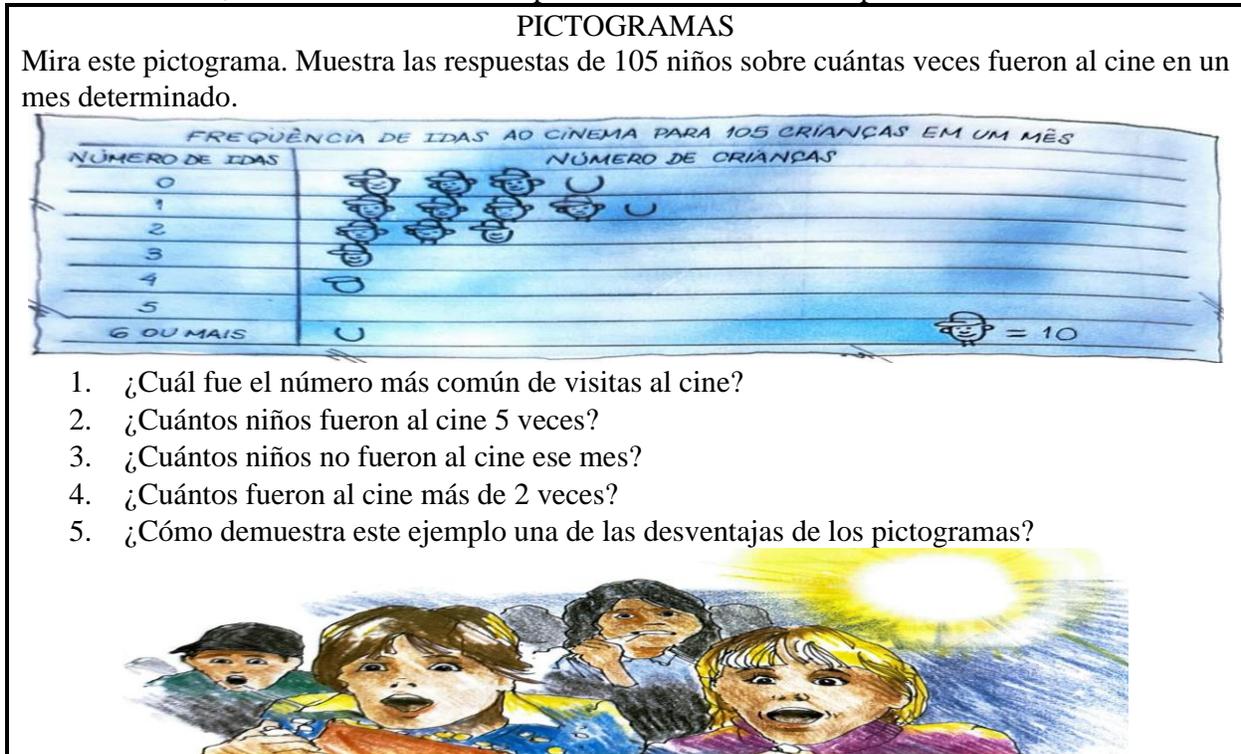
Según indicaciones del BNCC (Brasil, 2018), al preparar el currículo, vale la pena sugerir que los datos que pueden recopilar, organizar y representar los estudiantes sean para responder preguntas cuyas respuestas no sean demasiado obvias. Leer datos en tablas o gráficos sencillos requiere, además de conocer los números involucrados, observar y reconocer los elementos que los constituyen en dichas representaciones.

El mismo documento (Brasil, 2018) sugiere que los datos que pueden recopilar, organizar y representar los estudiantes son para responder preguntas cuyas respuestas no sean demasiado obvias. Así, por ejemplo, preguntar cuántas veces los estudiantes fueron al cine en un mes determinado, implica consideraciones sobre la realización de una investigación, seguida de la organización de los datos y la construcción de diferentes representaciones (tabla estadística o gráfica) para finalmente responder a una pregunta, indicando, por ejemplo, ¿cuántos niños fueron

al cine 5 veces? o ¿cuántos niños hubo en el cine este mes?

Figura 2.

Presentación de una actividad adecuada para alumnos de 6 a 10 años, asociada a la vida cotidiana de estos alumnos, además de indicar el aspecto más sencillo de los presentados en el libro



1. ¿Cuál fue el número más común de visitas al cine?
2. ¿Cuántos niños fueron al cine 5 veces?
3. ¿Cuántos niños no fueron al cine ese mes?
4. ¿Cuántos fueron al cine más de 2 veces?
5. ¿Cómo demuestra este ejemplo una de las desventajas de los pictogramas?

Respuestas al pictograma de ir al cine en la página 22.

1. El número más común de visitas al cine fue 1.
2. Ningún niño fue al cine 5 veces ese mes.
3. Treinta y un niños no fueron al cine.
4. Ocho niños fueron al cine más de 2 veces.
5. Una de las desventajas de este pictograma es la dificultad de saber el número exacto de niños correspondientes a un símbolo incompleto.

Fuente: Smoothery (1998, p. 22; 25)

Por ejemplo, la tabla de frecuencia (Figura 2), permite presentar los datos sobre las visitas al cine de una forma más clara que simplemente dibujando o enumerando a los niños. Sin embargo, en el pictograma, cada niño dibujado representa un grupo de 10 niños y los resultados se registraron como grupos de números. Este aspecto puede poner de relieve una desventaja, ya que la representación del número de niños que fueron al cine está indicada por grupos de 10 niños y no por su representación unitaria.

Otra presentación de los mismos aspectos y presentados en la Figura 3, sin embargo, presenta una actividad que requiere razonamientos más elaborados o referidos a estudiantes de 11

a 14 años, o lo que se considera en Brasil, los últimos años de la escuela primaria según el BNCC (Brasil, 2018).

Figura 3.

Presentación de una actividad adecuada para alumnos de 11 a 14 años, asociada a la vida cotidiana de estos alumnos, además de indicar el aspecto más elaborado de los presentados en el libro

GRÁFICOS DE BARRAS

Los gráficos de barras de la página siguiente muestran los resultados de la encuesta sobre asistencia al cine. Esta es la tabla de frecuencias en la que se basan los gráficos.

105 niños fueron al cine en un mes determinado

Número de visitas al cine	Frecuencias
0	31
1	41
2	25
3	5
4	2
5	0
6 o más	1
Total	105

Esta es la misma tabla de frecuencias utilizada para el pictograma de la página 22. Un gráfico de barras muestra los resultados tan claramente como un pictograma. Las barras más largas corresponden a las frecuencias más altas y viceversa.

La ventaja del gráfico de barras es que el lector puede utilizar la escala para obtener valores de frecuencia exactos. No importa si las barras son verticales u horizontales.

Nótese que aparece claramente el hecho de que ningún niño fue al cine 5 veces, indicando con la barra que está ausente.

Haz una gráfica de barras para representar la tabla de frecuencia de margaritas de la página 14.

Fuente: Smoothery (1998, p. 26-27)

Se observa que inicialmente la actividad propone, de manera lúdica, a través del pictograma, que el estudiante registre los datos recolectados, partiendo de los contenidos más simples como recolección, organización e interpretación de datos, a través de una representación tabular. , para luego solicitar el uso de estos conceptos en la elaboración de gráficos de barras (horizontales) o de columnas (verticales), abordando los elementos que componen la construcción gráfica, es decir, la forma en que se representan los datos: escalas; subtítulos; fuentes; fechas; entre otros.

Según el BNCC (Brasil, 2018), se recomienda realizar investigaciones que involucren variables categóricas y numéricas, organizar los datos recolectados a través de tablas estadísticas, gráficos de columnas o barras, gráficos pictóricos y lineales. También se sugiere presentar un texto escrito sobre el propósito de la investigación, así como un resumen de los resultados que implique

identificar que las variables en los estudios estadísticos son los valores que asumen ciertas características dentro de una investigación.

En el caso de la propuesta de libro paradidáctico, la habilidad prevé la investigación con una variable numérica o cuantitativa discreta, según esté relacionada con la situación de conteo (número de visitas al cine) o podría ser: número de consultas médicas; número de hijos de una familia; etc. Se considera que el problema propuesto parte de la realización de una investigación que se desarrolla con base en procedimientos como identificar un problema a responder y desarrollar procedimientos que van desde la elección de la población investigada hasta el procedimiento de recolección, organización y presentación de datos de investigación y de solución. el problema investigado.

Según la BNCC (Brasil, 2018), la Educación Primaria debe apostar por el desarrollo de la alfabetización estadística, definida como las habilidades de razonar, representar, comunicar y argumentar estadísticamente, con el fin de favorecer el establecimiento de conjeturas, la formulación y resolución de problemas en diversos contextos, utilizando conceptos, procedimientos, hechos y herramientas estadísticas. Es esta alfabetización la que asegura que los estudiantes reconozcan que el conocimiento es fundamental para comprender y actuar en el mundo y se den cuenta del carácter de juego intelectual de la estadística, como un aspecto que favorece el desarrollo del razonamiento lógico y crítico, estimula la investigación y puede resultar placentero.

Así, se observa que la BNCC basa la descripción de sus objetos de aprendizaje en la descripción de las habilidades que deben alcanzar los estudiantes, respectivamente, a lo largo de su vida escolar y a lo largo del desarrollo de la alfabetización estadística. Se espera que un estudiante brasileño de cuarto año de escuela primaria (aproximadamente 9 años) sea capaz de “realizar investigaciones que involucren variables categóricas y numéricas y organizar datos recopilados a través de tablas y gráficos de columnas simples o agrupados, con y sin el uso de tecnologías digitales” (Brasil, 2018, p. 293).

Dimensión 4: Gestión y Planificación

Finalmente, la dimensión 4 y sus categorías (C12 a C17) que analizan la planificación y gestión del proyecto editorial (Tabla 4). Se pretende analizar el diseño, gestión y evaluación de actividades de competencia matemática en el aula (Alsina, 2016) en el paradidáctico.

Tabla 4.

Descripción del proyecto editorial referente a la dimensión 4 (Gestión y Planificación).

Categoría	Análisis	Nivel
C12. ¿Se sugiere a los docentes realizar actividades previas a los expedientes propuestos relacionados con Estadística?	El paradidáctico no incluye la propuesta de realizar actividades previas a los contenidos relacionados con Estadística, estrategia importante para que el docente identifique qué conocimientos estadísticos ya tienen los estudiantes, para así tener un diagnóstico de los niveles de conocimiento estadístico y luego planificar el clases, estrategias e intervenciones a utilizar, promoviendo el aprendizaje.	0
C13. ¿Se sugiere que en algún momento los docentes preparen actividades complementarias relacionadas con contenidos de Estadística?	No se presentan sugerencias para que los docentes elaboren actividades complementarias que colaboren con la sistematización de los contenidos estadísticos propuestos en el paradidáctico.	0
C14. ¿La tutoría prevé una posible adaptación curricular en las tareas que propone, relacionadas con la Estadística?	Respecto a este aspecto, consideramos que el paradidactico no presenta una propuesta de adaptación curricular de las actividades que propone. Dados los diferentes niveles de aprendizaje presentes en el aula, es necesaria una adaptación para incluir a todos en el proceso de enseñanza/aprendizaje.	0
C15. ¿Se utiliza vocabulario matemático preciso en el paradidáctico de la estadística?	El libro propone actividades utilizando vocabulario matemático adecuado a la edad y nivel educativo del sujeto y presenta, al final, apéndices con explicaciones sobre los temas presentes en los capítulos y las respuestas a los ejercicios propuestos (Figura 2).	3
C16. Además del material impreso, ¿se ejemplifican otras actividades en diferentes contextos: situaciones de la vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, cuentos y canciones, recursos tecnológicos?	Sí, el tutorial presenta ejemplos de actividades con situaciones de la vida cotidiana y sugiere el uso de un transportador para crear un gráfico circular y una calculadora para calcular porcentajes. Algunas actividades abordan contextos cotidianos como: ir al cine, comer helado, número de horas dormidas.	3
C17. ¿El editor establece alguna guía para evaluar el contenido de Estadística y Probabilidad?	Respecto a este aspecto, el paradidáctico no establece lineamientos para la evaluación de contenidos en Estadística, lo cual consideramos importante en el sentido de permitir al docente identificar dificultades de aprendizaje, evaluar su trabajo y replanificar sus clases.	0

Considerando la categoría C15, se utiliza vocabulario o glosario preciso en el paradidáctico de estadística (Figura 4). Para Assis et al. (2019), el conocimiento y aplicación de la estadística en la práctica requiere, además de conocimientos teóricos y resolución de problemas y estudios de casos, el significado verbal de diferentes términos, entradas, símbolos, ecuaciones, leyes,

teoremas, definiciones, conceptos, entre otros, utilizados. al utilizar esta importante herramienta tan frecuentemente utilizada por los investigadores en general.

Figura 4.

Presentación del glosario

GLOSARIO
Muestra: grupo pequeño encuestado, generalmente para proporcionar información sobre un grupo más grande.
Amplitud: diferencia entre el valor mayor y el menor de una muestra.
Censo: recuento oficial y organizado de una población.
Datos: hechos y cifras que pueden organizarse y procesarse para proporcionar información.
Divisor: número que divide exactamente a otro, sin dejar resto: 12 es divisor de 360, porque $360/12 = 30$, con resto cero. 11 no es divisor de 35, porque 35 dividido por 11 da 3 con un resto de 2.
Estadísticas: números recopilados y presentados de forma sistemática para proporcionar cierta información.
Frecuencia: número de veces que ocurre un evento.
Gráfico de barras: una forma de representar información numérica que utiliza una serie de barras o columnas de diferentes alturas.
Encuesta de Datos: encuesta para recoger datos de una muestra, organizarlos y tratarlos estadísticamente con el objetivo de extraer alguna información de esta.
Pictograma: forma de presentar los resultados y un levantamiento de datos, utilizando símbolos.
Porcentajes: “por ciento” significa “en cada cien”. Diez por ciento significa 10 sobre 100. Cualquier decimal o fracción se puede convertir a porcentaje. La mitad ($1/2$) es cincuenta por ciento, porque 50 de 100 es $1/2$.
Tabla de Frecuencias: tabla que organiza los resultados de un conteo, presentando la frecuencia correspondiente a cada resultado.

Fuente: Smoothery (1998, p. 60-61)

El glosario presentado al final del libro permite ampliar el vocabulario relacionado con la Estadística, contribuyendo a la alfabetización estadística, a pesar de considerar que se presentan algunos problemas en cuanto a la descripción de términos. Se sugiere que al utilizar este material se pida a los estudiantes que busquen los significados de todos los términos y los comparen con lo indicado en el libro.

Debemos considerar que la creciente necesidad de extraer información de los datos de observación que sea comprensible para cualquier persona en diferentes áreas de la actividad humana ha llevado cada vez más al uso de la estadística en los más diversos dominios de la ciencia, requiriendo un buen conocimiento de sus métodos y técnicas (Assis et al, 2019).

Se sigue considerando la categoría C16, que es la necesidad de indicar material impreso que ejemplifique otras actividades en diferentes contextos: situaciones de la vida cotidiana,

materiales manipulativos, juegos, cuentos y canciones, recursos tecnológicos. Consideramos que estos factores son importantes y contribuyen a la adquisición de conceptos, las resoluciones de las actividades permiten al estudiante analizar sus respuestas, reflexionar sobre sus errores y aclarar sus dudas respecto al contenido tratado en las actividades.

Destacamos que, a través de las habilidades de lectura y comprensión de la información contenida en gráficos y tablas, que son bastante comunes en nuestra vida diaria, los ciudadanos, desde su educación inicial, pueden desarrollar habilidades que serán utilizadas y mejoradas a lo largo de su vida. Al dominar este conocimiento, los ciudadanos se vuelven capaces de actuar para transformar la información en datos que les permitan guiarse hacia una mejor comprensión de su realidad.

CONCLUSIÓN

En este estudio, el paradidáctico analizado forma parte de la Serie de Investigación Matemática de la Editora Scipione, que propone la enseñanza de la Estadística a partir de situaciones cotidianas, trabajando conceptos en los que el estudiante se familiariza con el tema y puede adquirir conocimientos para resolver las actividades propuestas.

Se considera que las actividades propuestas en el libro paradidáctico, apoyadas en los objetos de conocimiento y habilidades estadísticas según el BNCC (Brasil, 2018) para la educación básica, abren un espacio para el desarrollo de la alfabetización estadística anclada en la resolución de problemas de una de carácter estadístico, tales como lo que prevé el ciclo estadístico investigativo: (i) formulación de una pregunta estadística investigativa; (ii) recopilación y consideración de datos; (iii) análisis de datos; (iv) interpretación de resultados que establezca una relación con la pregunta de investigación.

Este estudio presenta algunos aspectos según Alsina (2017), en el que se presenta un itinerario didáctico para la enseñanza de la estadística en Educación Primaria. Se refuerza la importancia de la estadística en el desarrollo integral y la alfabetización estadística, presentando situaciones de la vida cotidiana y materiales manipulables.

Buscando desarrollar la alfabetización estadística, al final del libro se encuentra un glosario con explicaciones sobre los temas presentes en los capítulos, así como las respuestas a los ejercicios propuestos. Se entiende por alfabetización estadística la capacidad de recoger y

organizar datos y representarlos numérica y gráficamente, apropiándose del vocabulario, conceptos y símbolos propios del lenguaje estadístico.

Se considera que los contenidos estadísticos tratados en el paradidáctico favorecen el desarrollo de la alfabetización estadística, sin embargo, echamos de menos que estos contenidos se trabajen de una manera más interdisciplinar con contenidos de diferentes áreas del conocimiento. El paradidáctico tampoco presenta propuestas para la realización de actividades previas o complementarias que favorezcan la sistematización de los contenidos tratados.

Se considera que las actividades están en línea con el BNCC (Brasil, 2018) en relación con la enseñanza de la estadística, considerando que desde los primeros pasos debe involucrar el trabajo con la recolección y organización de datos de una investigación de interés para los estudiantes, siendo que planificar cómo realizar la investigación ayuda a comprender el papel de la estadística en la vida diaria de los estudiantes. Así, juega un papel fundamental la lectura, interpretación y construcción de tablas y gráficos, así como la forma en que se produce el texto escrito para la comunicación de datos, pues es necesario entender que el texto debe resumir o justificar las conclusiones.

El paradidáctico analizado en este estudio va en línea con lo mencionado anteriormente y propone la enseñanza de la estadística a partir de situaciones cotidianas, trabajando conceptos en los que el estudiante se familiariza con el tema y puede adquirir conocimientos para resolver las actividades propuestas.

Esperamos que este estudio despierte la necesidad de desarrollar propuestas que contribuyan a incrementar la presencia de la estadística en las aulas de Educación Primaria y, al mismo tiempo, sea el punto de partida para el diseño de nuevas actividades que fomenten la alfabetización estadística.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Assis, J.P. de, Sousa, R.P. de y Dias, C.T. dos S. (2019). *Glossário de estatística*. EdUFERSA.
- Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon*, 92, 7-29.
- Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon*, 95, 25-48.

- Alsina, Á. (2018). El número natural para organizar, representar e interpretar la información (estadística, azar y probabilidad). En M.C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 173-211). Editorial Paraninfo.
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Kluwer Academic Publisher.
- Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática* (1ª a 5ª séries). MEC/SEF.
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular - BNCC: Educação é a base*. Ministério da Educação.
- Carneiro, R.F., Magalhães, L.M. y Cabral, W.A. (2018). Histórias infantis na formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. En R.F. Carneiro, A.C. Souza y L. de F. Bertini (Eds.), *A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: práticas de sala de aula e de formação de professores* (pp. 162-178). SBEM.
- Ciabotti, V. y Oliveira Júnior, A.P. de. (2019). *Caminhos para a elaboração do livro paradidático "Jogando na Olimpíada Nacional de Probabilidade" no Ensino Fundamental*. Appris.
- Coutinho, C. de Q.S. (2016). O livro didático e a abordagem da estatística: o olhar do professor. *Vidya*, 36(2), 257-274.
- Espina, E. y Novo, M.L. (2019). Análisis de la presencia de la geometría en los proyectos editoriales de Educación Infantil. *Educación Matemática*, 31(3), 81-112. <https://doi.org/10.24844/em3103.04>
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1-51.
- Grando, R.C. (2004). *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. Paulus.
- Montoito, R. (2019). Entrelugares: pequeno inventário inventado sobre matemática e literatura. *Bolema*, 33(64), 892-915. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a22>
- Oliveira Júnior, A.P., Costa, R., Delalíbera, B.C.S., Alves, L.A., Sila, G.R., Oliviera, L.S. y Fontana, E.A. (2015). Livro paradidático no ensino de estatística no Ensino Fundamental. En P.R. Scott y Á. Ruíz (Eds.), *Memorias 14 Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas: Estadística y Probabilidad*. (pp. 131-142). Chiapas, Mexico. Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Oliveira Júnior, A.P. y Santos, L.R.S. (2020). Potencialidades da utilização de livros paradidáticos no ensino de estatística para o ensino fundamental. En F.A. Kian y A.P. de Oliveira Júnior (Eds.), *Leituras sobre educação: a voz do Professor* (pp. 87-97). Edua.
- Oliveira Júnior, A.P. de y Santos, L.R.S. (2023). A utilização e criação de paradidáticos para o ensino de estatística no ensino fundamental no Brasil *Cadernos de Pesquisa*, 30(3), 55-80. <https://doi.org/10.18764/2178-2229v30n3.2023.40>
- Oliveira Júnior, A.P. y Morais, A.M.O. (2024). A potencialidade dos livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro voltado ao ensino de estatística com abordagem para os anos iniciais do ensino fundamental. *Cadernos de Pesquisa: Pensamento Educacional*, en prensa.

- Piñeiro, J.L. y Vásquez, C. (2019). Un estudio exploratorio a las tensiones en los criterios de selección de problemas en profesores de educación primaria. *Educar em Revista*, 35(78), 65-84.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares.
- Smole, K.S. y Diniz, M.I. (2007). *Cadernos do Mathema: Jogos de matemática de 6º. a 9º. ano*. Artmed.
- Smoothey, M. (1998). *Atividades e Jogos com Estatística*. Editora Scipione.

THE PRESENCE OF STATISTICAL CONCEPTS IN THE EDITORIAL (PARADIDACTIC) PROJECT “ACTIVITIES AND GAMES WITH STATISTICS”

Abstract

In this study, the presence of statistical concepts for Primary Education students was analyzed in the editorial project presented through a paradidactic book called “Activities and games with Statistics”, produced and published for the first time in English in 1995 by its author, born in Australia, being translated and published in Portuguese, in Brazil, in 1998. For its analysis, an instrument was used considering the content analysis technique, made up of seventeen categories organized in four dimensions: 1) Description of the editorial project; 2) Presence of statistics; 3) Contents/concepts that are discussed; 4) Planning and management. It is considered that the statistical contents treated in the paradidactic favor the development of statistical literacy, however, they could be worked better to present a more interdisciplinary aspect, that is, to be better associated with the contents of other areas of knowledge. It was observed that the focus on the statistical contents of the editorial project is relevant for primary education in Brazil, in addition to presenting an attractive language for students, allowing us to consider the intervention capabilities that the didactic material can offer to the teaching of statistics.

Keywords: paradidactic book, teaching of statistics, content analysis, Primary Education, Brazil.

A PRESENÇA DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS NO PROJETO EDITORIAL (PARADIDÁTICO) “ATIVIDADES E JOGOS COM ESTATÍSTICA”

Resumo

Neste estudo, foi analisada a presença de conceitos estatísticos para alunos do Ensino Fundamental no projeto editorial apresentado por meio de um livro paradidático denominado “Atividades e jogos com Estatística”, produzido e publicado pela primeira vez em inglês em 1995 por seu autor, nascido em Austrália, sendo traduzido e publicado em português, no Brasil, em 1998. Para sua análise foi utilizado um instrumento considerando a técnica de análise de conteúdo, composto por dezessete categorias organizadas em quatro dimensões: 1) Descrição do projeto editorial; 2) Presença de estatísticas; 3) Conteúdos/conceitos discutidos; 4) Planejamento e gestão. Considera-se que os conteúdos estatísticos tratados no paradidático favorecem o desenvolvimento do letramento estatístico, porém, poderiam ser mais bem trabalhados por apresentarem um aspecto mais interdisciplinar, ou seja, estarem melhor associados aos conteúdos de outras áreas do conhecimento. Observou-se que o foco nos conteúdos estatísticos do projeto editorial é relevante para o ensino fundamental no Brasil, além de apresentar uma linguagem atrativa para os alunos, permitindo considerar as capacidades de intervenção que o material didático pode oferecer ao ensino de estatística.

Palavras-chave: livro paradidático, ensino de estatística, análise de conteúdo, Ensino Fundamental, Brasil.

Ailton Paulo de Oliveira Júnior

Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, Brasil

ailton.junior@ufabc.edu.br

<https://orcid.org/0000-0002-2721-7192>

Es licenciado en Ciencias Estadísticas por la Escuela Nacional de Ciencias Estadísticas, Licenciado en Matemáticas por la Universidad Católica de Brasilia, Magíster en Investigación Operacional por el Instituto Militar de Ingeniería, Doctorado en Educación (Didáctica, Prácticas Escolares y Enseñanza Técnicas) de la Universidad de São Paulo y Post-Doctorado en Educación de la Universidad de São Paulo. Actualmente es profesor asociado de la Licenciatura en Matemáticas del Centro de Matemática, Computación y Cognición y del Programa de Posgrado (Maestría y Doctorado) en Docencia e Historia de las Ciencias y Matemáticas de la Universidad Federal del ABC - UFABC. Es coordinador del Grupo de Estudio en Educación Estadística y Matemática - GEEM, certificado por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (CNPq) teniendo como prioridad la discusión y estudio de cuestiones relativas a la Educación Estadística y Matemática desde los primeros años de la Educación Primaria. Escolar hasta la Educación Superior.

Ana Meire de Oliveira Morais

Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, Brasil

moraisanameire@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0004-2913-4560>

Estudiante de Doctorado en el Programa de Postgrado en Docencia e Historia de las Ciencias y Matemáticas de la Universidad Federal del ABC. Postgrado en Educación Inclusiva de la Facultad de Educación de la Universidad de São Paulo y Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas de la Facultad de Educación de São Luis. Es licenciado en Pedagogía por la Facultad de São Bernardo do Campo. Actualmente es docente de la Red Municipal de Educación de São Bernardo do Campo. Tiene experiencia en el área de Educación, con énfasis en Enseñanza Aprendizaje, trabajando principalmente en los siguientes temas: juegos, matemáticas, aprendizaje.

Luzia Roseli da Silva Santos

Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, Brasil

luzia.santos@ufabc.edu.br

<https://orcid.org/0000-0001-6930-9215>

Estudiante de doctorado en el posgrado estricto sensu en Enseñanza e Historia de las Ciencias y Matemáticas de la UFABC; Maestría en Enseñanza e Historia de las Ciencias y Matemáticas por la UFABC; Especialista en TI en Salud de la UNIFESP; Especialista en Planificación, Implementación y Gestión de EAD por la UFF; Especialista en Psicopedagogía con énfasis en Educación Especial; Especialista en Neuro psicopedagogía; Especialista en Autismo; Especialista en Neurociencia y rehabilitación cognitiva; Especialista en Discapacidad Intelectual. Licenciada en Pedagogía, Licenciada en Artes Visuales y Tecnóloga Informática para la Gestión Empresarial. Trabaja como coordinadora del Departamento de Educación Especializada del Departamento de Educación de Barueri – São Paulo y como profesora de educación especial en la municipalidad de São Bernardo do Campo, São Paulo, Brasil.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN LIBROS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA NUEVA ESCUELA MEXICANA

Catalina Navarro Sandoval

Lizzet Morales Garcia

RESUMEN

El propósito del capítulo es presentar las configuraciones epistémicas asociadas al significado pretendido de las Medidas de Tendencia Central (MTC), con base en los libros de texto saberes y pensamiento científico de la educación secundaria en el marco de la Nueva Escuela Mexicana (NEM). Para lo cual se utilizaron los elementos teóricos y metodológicos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Algunos de los resultados muestran, que en las situaciones-problema se promueven los significados de media o media aritmética, mediana y moda, de manera extra matemática e intra matemática. En el lenguaje se abordan datos numéricos, manejo de fórmulas, tablas, gráficos de barras, entre otros. En cuanto a los procedimientos, se centra en el cálculo o determinación de la media, mediana y moda. En cuanto a las proposiciones se puntualiza en las características propias de la media, mediana y moda. Lo anterior sirve como base para el diseño de ejercicios y/o problemas con base en los significados y características de las medidas de tendencia central.

Palabras clave: Medidas de tendencia central, libros de texto, configuración epistémica, secundaria.

Como citar: Navarro, C. y Morales-García, L. (2024). Medidas de tendencia central en libros de Educación Secundaria de la nueva escuela mexicana. En D. Díaz-Levicoy y A. Salcedo (Eds.), *Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística* (pp. 281-306). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN LA INVESTIGACIÓN

Las Medidas de Tendencia Central (MTC), tales como la media, mediana y moda, son consideradas elementos esenciales de la cultura estadística, entre otros aspectos por su amplio uso en los medios de comunicación; y particularmente por su inclusión como elemento de enseñanza en los currículos de diferentes países, por ejemplo, México (Secretaría de Educación Pública-SEP, 2022), Chile (Ministerio Nacional de Educación- MINEDUC, 2012), entre otros. Los estudios sobre las MTC en Educación Matemática, se han enfocado en indagar sobre la comprensión de estas en estudiantes y profesores (e.g., Estrella, 2016; Daza et al., 2022; Rodríguez-Alveal et al., 2016) y su análisis en libros de texto de matemáticas (e.g., Cobo y Batanero, 2004; Díaz-Levicoy et al., 2020; Estrella, 2008; García-García et al., 2021; García-García, Urrutia et al., 2021; Parra-Fica et al., 2024).

En el primer caso, Estrella (2016) analizó las respuestas dadas por profesores de Educación Primaria en formación, a una situación problema relacionada con la media donde se consideraron valores atípicos en los datos. Entre los resultados, se señaló que las ideas estadísticas de contexto y representatividad de un conjunto de datos, están alejadas de la formación de los profesores. Por otra parte, Daza et al. (2022) realizaron un acercamiento a las representaciones semióticas y a las transformaciones del objeto media en estudiantes de Educación Media, con el estudio se estableció que los registros que más reconocen y ponen en juego son los de representación de lenguaje natural y simbólico. Mientras que, en Rodríguez-Alveal et al. (2016) analizaron la comprensión de las MTC en estudiantes de pedagogía. Los resultados indicaron que en general los estudiantes no presentaron conocimientos teóricos sobre el uso de las MTC.

En el segundo caso, existen diferentes investigaciones que han informado sobre el análisis de las MTC en libros de texto de matemáticas. Por ejemplo, Cobo y Batanero (2004) estudiaron el significado de la media en libros de texto españoles de la Educación Secundaria Obligatoria, donde caracterizaron los problemas propuestos, los algoritmos de cálculo, las definiciones, las propiedades, las representaciones y los argumentos, los autores señalaron que en este nivel educativo se da más importancia a las definiciones y al cálculo de la media que al estudio de sus propiedades.

Estrella (2008) estudió la transposición didáctica de las MTC en un libro de texto de 7° de Educación Básica en Chile. La autora concluye que el texto carece de un lenguaje matemático fino, presenta ambigüedad en el uso de los términos y sus significados, los conceptos son presentados

por medio de fórmulas y las actividades se reducen a su aplicación inmediata. Por otra parte, Díaz-Levicoy et al. (2020) analizaron actividades sobre MTC en libros de texto mexicanos de Educación Primaria. Los resultados evidenciaron el predominio de la media aritmética y la moda, la tarea de calcular una MTC, la representación de listado de datos y tabla de datos y el contexto personal.

García-García et al. (2021) estudiaron las actividades relacionadas con las MTC en tres libros de texto chilenos de séptimo básico. Los resultados indicaron el predominio de la media, la tarea de calcular la MTC, la representación de listado de datos, la mención directa y la forma de trabajo individual. Asimismo, García-García, Urrutia et al. (2021) estudiaron el significado de la media, mediana y moda en libros de texto escolares de séptimo año de Educación Básica en Chile, donde caracterizaron el tipo de situaciones-problema (por ejemplo, la media para obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto), procedimientos (por ejemplo, la media mediante el cálculo gráfico), conceptos (por ejemplo, la mediana como centro de la distribución), propiedades (por ejemplo, la media, mediana y moda pertenecen al rango de la variable), elementos lingüísticos (por ejemplo, tablas y gráficos) y argumentos (por ejemplo, uso de gráficos como justificación).

Parra-Fica et al. (2024) analizaron tareas sobre las MTC en libros de texto chilenos de 5° a 8° año de Educación Básica. Los resultados indicaron que los textos se enfocan en el trabajo con la media y la moda, específicamente en tareas para calcular. El interés por realizar investigación sobre MTC en libros de texto de matemáticas se justifica desde la importancia del libro de texto como mediador entre el currículo y el aula (Braga y Belver, 2016), siendo ampliamente utilizado por el profesor, lo que lo ha convertido en una de las principales herramientas de enseñanza del docente, puesto que en este se organizan diferentes actividades, tareas o evaluaciones sobre un determinado concepto, en este caso las MTC.

Por otra parte, las MTC son consideradas esenciales en el desarrollo de la cultura estadística, sin embargo, García-García, Urrutia et al. (2021) resaltaron que son escasas las investigaciones que involucren el análisis de la media, mediana y moda, de manera conjunta, en los libros de texto. Además, con la actualización de los libros de texto de la Educación Básica en México (SEP, 2022) surge la necesidad del análisis de los nuevos materiales educativos. Por tal motivo el objetivo del presente capítulo es caracterizar el significado pretendido de las MTC en libros de texto de Educación Secundaria en México.

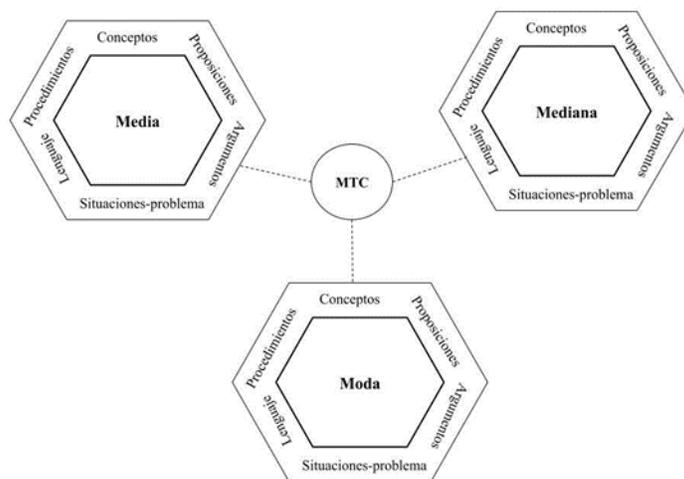
CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA EN EL ANÁLISIS DE TAREAS

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un sistema teórico modular que se caracteriza, entre otros aspectos, por la importancia que le otorga al significado de un objeto matemático. En ese sentido, esta perspectiva es entendida desde un punto de vista pragmático, es decir, depende del contexto dónde se utilice y en consecuencia del sistema de prácticas de donde emerge. En línea con lo anterior, es descrito como “la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde interviene tal objeto” (Godino, 2022, p. 9). En este caso, la correspondencia entre las MTC y el sistema de prácticas donde estas intervienen. Con ello, se distingue, entre el significado personal e institucional de un objeto matemático (Godino y Batanero, 1994).

Por lo anterior, los libros de texto son considerados como portadores del significado institucional de un objeto matemático (Godino y Batanero, 1994; Burgos et al., 2020) dado que las tareas que en estos se presentan tienen como objetivo la enseñanza-aprendizaje de un determinado concepto matemático. En ese sentido, admite un análisis centrado en prácticas matemáticas. En correspondencia con lo anterior, un método para delimitar el significado institucional de un objeto matemático es el análisis de los sistemas de prácticas y las configuraciones epistémicas implicadas.

Figura 1.

Configuración epistémica asociada a cada MTC



El objetivo de este análisis es presentar las configuraciones epistémicas asociadas al significado pretendido de las MTC (Figura 1) y han sido utilizadas en algunas investigaciones

(Morales-Garcia et al., 2021; Morales-Garcia y Navarro, 2021). En general, la configuración epistémica es entendida como una red de objetos primarios (situaciones-problema, lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos) que se activan durante la resolución de cierta clase de situaciones-problema, en este caso, situaciones-problema relacionadas con las MTC en libros de texto de matemáticas en Educación Secundaria.

Donde los objetos primarios son entendidos de la siguiente forma:

- *Situaciones-problema*. Son aplicaciones extra-matemática e intra-matemática del objeto matemático.
- *Lenguaje*. Incluye términos, expresiones, notaciones gráficas del objeto matemático en sus diversos registros de representación.
- *Procedimientos*. Son las técnicas utilizadas en la resolución de cada situación-problema.
- *Conceptos*. Introducidos explícitamente mediante definiciones o descripciones en los libros de texto.
- *Proposiciones*. Son entendidas como enunciados sobre conceptos utilizados en la resolución de situaciones-problema.
- *Argumentos*. Enunciados para validar o explicar proposiciones o procedimientos.

METODOLOGÍA

Para alcanzar el objetivo de investigación, el cual está relacionado con caracterizar el significado pretendido de las MTC en libros de texto de Educación Secundaria en México. Se desarrolló una investigación cualitativa con enfoque descriptivo. 1) revisión de plan y programas de estudio; 2) identificación de ejemplos; 3) Análisis de ejemplos y 4) presentación de resultados.

Revisión del plan y programa de estudio de la nueva escuela mexicana

El plan de estudios 2022 (SEP, 2022) de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), considera la *integración curricular* como un aspecto primordial, por ende, los programas sintéticos consideran distintos elementos curriculares, tales como los campos formativos (lenguajes; Saberes y pensamiento científico; Ética, Naturaleza y sociedades; y de lo humano y lo comunitario), los contenidos y los procesos de desarrollo de aprendizaje. De modo que la integración de

conocimientos a través de los campos formativos se considera un proceso.

En particular, el contenido relacionado con Matemáticas, está incluido en el campo formativo *saberes y pensamiento científico*, cuyo objetivo de aprendizaje es la comprensión y explicación de los fenómenos y procesos naturales tales como el cuerpo humano, seres vivos, materia, energía, salud, medio ambiente y tecnología, desde la perspectiva de diversos saberes y su relación con lo social (SEP 2022). En línea con lo anterior, algunas de sus finalidades son: la comprensión para explicar procesos y fenómenos naturales en su relación con lo social, los cuales ocurren en el mundo con base en los saberes y el pensamiento científico por medio de indagación, interpretación, experimentación, sistematización, representación con modelos y argumentación de tales fenómenos; así como realizar toma de decisiones libres, responsables y conscientes orientadas al bienestar individual, familiar y comunitario para la vida saludable (SEP 2022).

Tabla 1.

Contenidos y proceso de desarrollo de aprendizaje de las MTC en Educación Secundaria

Contenido	Proceso de desarrollo de aprendizaje		
	1°	2°	3°
Interpretación de la información a través de medidas de tendencia central y de dispersión.	Determina e interpreta la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa, la media, la mediana y la moda en un conjunto de datos. Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) y el rango de un conjunto de datos, y justifica con base en ellas sus decisiones.	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) y de dispersión (rango y la desviación media) de un conjunto de datos, y justifica con base en ellas sus decisiones. Identifica tendencias en los datos centrándose en sus valores representativos y sus variaciones.	Determina y compara las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y de dispersión (rango y desviación media) de dos conjuntos de datos para tomar decisiones.

Nota: información del contenido y proceso de desarrollo de aprendizaje de las MTC en el plan sintético fase 6 de la SEP (2022).

A continuación, en la Tabla 1, se presenta el contenido específico a abordar sobre el proceso de desarrollo de aprendizaje de las MTC en los libros Saberes y Pensamiento Científico de los tres grados de la Educación Secundaria en México.

Identificación de ejemplos en los libros de texto

En la Tabla 2, se presenta información detallada sobre la cantidad de ejemplos propuestos para atender las MTC en los tres libros de texto.

Tabla 2.

Información de los libros de texto y la cantidad de ejemplos analizados.

Código	Título	Editorial	Tema/lecciones	Ejemplos
T1	Saberes y pensamiento científico. Primer grado.	SEP	Análisis de dispersión de datos. Medidas de tendencia central	11
T2	Saberes y pensamiento científico. Segundo grado.	SEP	Recolección, registro, análisis y comunicación de datos. Medidas de tendencia central y dispersión. Tendencia de datos.	4
T3	Saberes y pensamiento científico. Tercer grado.	SEP	Medidas de tendencia central y de dispersión en la toma de decisiones-	1
Total				16

Análisis de los ejemplos

A continuación, se detalla, en qué consistió el análisis de cada ejemplo en los libros de texto (Figura 2).

- *Identificación de los objetos primarios* (situaciones-problema, lenguaje, procedimientos, concepto, proposiciones y argumentos) que se activan en la solución propuesta en el libro de texto.
- *Organización de los objetos primarios* asociados con la media, la mediana y la moda. Se organizaron los objetos primarios asociados a cada MTC.
- *Establecimiento de una configuración epistémica* para cada MTC. Se estableció una configuración epistémica que brindará información sobre los objetos primarios que se activan en la resolución de situaciones-problema.

Figura 2.

Instrumento utilizado para la identificación de objetos primarios

Ejemplo 3	Objetos primarios	Significado																														
<p>Ejemplo 1 Del conjunto de datos del ejemplo 1 de la sección anterior, el maestro determina la moda.</p> <table border="1" data-bbox="341 388 600 462"> <tr><td>10</td><td>9</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>8</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td>9</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>9</td></tr> </table> <p>Solución Se marcan con colores los valores que se repiten para que sean identificados con mayor facilidad; posteriormente se elabora una tabla de frecuencia.</p> <table border="1" data-bbox="284 535 600 619"> <thead> <tr> <th>Valor</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td></tr> <tr><td>10</td><td>2</td></tr> </tbody> </table> <p>Por tanto: $Mo = 9$</p> <p>En este caso, si hubiera otro número 8, el conjunto tendría dos modas y se podría afirmar que es bimodal.</p>	10	9	10	9	8	7	8	9	8	8	9	9	8	7	9	8	7	8	9	9	Valor	Frecuencia	7	3	8	7	9	8	10	2	<p>Situación-problema</p> <p>Lenguaje</p> <hr/> <p>Conceptos</p> <p>Procedimientos</p>	<p>Con base en un conjunto de 20 datos organizados, determinar la moda.</p> <p>Datos numéricos</p> <p>Símbolo de la moda Mo</p> <p>Calificación (valor)</p> <p>tabla de frecuencias</p> <hr/> <p>Moda y frecuencia</p> <p>Determinar la moda con base en datos dados.</p> <p>a) marcar con distinto color las calificaciones que se repiten y b) elaborar una tabla de frecuencias.</p>
10	9	10	9	8																												
7	8	9	8	8																												
9	9	8	7	9																												
8	7	8	9	9																												
Valor	Frecuencia																															
7	3																															
8	7																															
9	8																															
10	2																															
<p><i>Secuencia de prácticas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ● Con base en un conjunto de datos determinar la moda (hay 20 datos). ● Organizar los datos usando colores para marcar los valores que se repiten. ● Elaborar una tabla de frecuencias con base en los valores repetidos. ● Determinación de la moda 	<p>Proposiciones</p> <hr/> <p>Argumentos</p>	<p>Si hubiera otro número 8, el conjunto tendría dos modas y se podría afirmar que es bimodal.</p> <hr/> <p>Se marcan con colores los valores que se repiten para que sean identificados con mayor facilidad, posteriormente se elabora una tabla de frecuencia.</p>																														

RESULTADOS

Como se ha venido señalando, en el presente capítulo el objetivo es analizar los ejemplos propuestos, para el tratamiento de las medidas de tendencia central, en los tres libros de texto Saberes y conocimiento científico de Educación Secundaria en México. Como resultado, se identificaron un total de dieciséis ejemplos relacionados con las MTC, estos distribuidos en los tres grados de la Educación Secundaria, de los cuales cuatro abordan a la media, cuatro a la mediana, cuatro a la moda y dos ejemplos abordan tanto a la media como a la mediana y finalmente dos que abordan a las tres MTC. En la Tabla 3 se presenta información detallada.

Ahora bien, como se ha mencionado la MTC media, en los libros de texto analizados se identificaron cuatro ejemplos, tres en el libro de texto de primer grado y uno en libro de texto de segundo grado, por lo que esta medida es abordada en los dos primeros grados de la Educación Secundaria, por tanto, en la tabla 4 se presentan en conjunto los elementos primarios relacionados con dicha medida.

Tabla 3.

Datos de la muestra por curso y área de conocimiento

Código	Media	Mediana	Moda	Media-Mediana	Media-Mediana-Moda	Total
T1	3	3	3	2	0	11
T2	1	1	1	0	1	4
T3	0	0	0	0	1	1
Total	4	4	4	2	2	16

Tabla 4.

Configuración epistémica de la media

Objeto primario	Significado
Situaciones-problema	Los ejemplos recurren al cálculo de masa corporal promedio de 10 estudiantes o a la estatura promedio de pacientes de un hospital o bien de la media aritmética de las calificaciones de un grupo de estudiantes. O bien a la determinación de la media de un conjunto de datos.
Lenguaje	Datos numéricos; símbolo de la media: \bar{X} ; intervalos; clase; m clases X_i ; frecuencia f_m ; sumar producto $X_i f_i$; suma de las frecuencias: N ; $N = [X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_m f_m] \div [f_1 + f_2 + \dots + f_m] = \frac{\sum X_i f_i}{\sum f_i}$ con $1 \leq i \leq m$; conjunto de datos no agrupados; media aritmética \bar{X} ; Suma y división.
Procedimientos	Calcular la media o promedio aplicando fórmulas.
Conceptos	Media aritmética o promedio; Clase; frecuencia; intervalo; valores extremos.
Proposiciones	La masa promedio de los estudiantes es de 50.8 kg. Si todos los estudiantes tuvieran la misma masa corporal, este valor sería de 50.8 kg. La estatura promedio es de 171.97 cm. La clase menor tiene como valor promedio 162 cm y la clase mayor 183 cm; por lo tanto, la mayoría de los datos están cerca del promedio. La media aritmética es 8.45 la media aritmética es sensible a valores extremos. La media equilibra en cierto sentido los valores de los datos. La media podrá calcularse solo si el conjunto de datos es numérico. La media es única para un conjunto de datos. Los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) alteran significativamente a esta medida. Para calcular la moda se debe identificar el dato que más se repita.
Argumentos	Aplicación correcta de la fórmula.

Respecto de la MTC mediana, de manera similar que la media, es abordada en los dos primeros grados de la Educación Secundaria, tres ejemplos durante el primer grado y uno en el segundo grado. En la tabla 5 se presentan los objetos primarios presentes en los ejemplos de la mediana.

Tabla 5.**Configuración epistémica de la mediana**

Objeto primario	Significado
Situaciones-problema	Los ejemplos se centran en calcular la mediana de un conjunto de calificaciones de estudiantes de una clase de matemáticas. Así como de un conjunto de datos ordenados del mayor al menor.
Lenguaje	Datos numéricos; datos intermedios; posición u orden de los datos; datos menores; datos mayores; Número de datos par o impar; valores centrales; valores extremos; mediana; y representación de la mediana (Me , \tilde{x}).
Procedimientos	Ordenar las calificaciones de menor a mayor. Identificar si el número de datos es par o impar. Identificar el o los datos intermedios. Identificar los datos que están en el centro y calcular el promedio. En el primer caso la mediana es el valor que está en la posición central. Aplicar la fórmula para calcular la mediana. El resultado es el valor de la mediana del conjunto de datos
Conceptos	Mediana; par; impar; y orden en los datos.
Proposiciones	La cantidad de datos es par. La mediana es 5.2. La cantidad de datos es impar. La mediana es 8.4 El conjunto de datos es par. La mediana es el promedio de los datos que quedan en el centro. La mediana es 8.5 La mediana es 12. Cuando el número de datos es par, la mediana es igual a la media de los dos valores centrales. Los valores extremos normalmente no la afectan. Para identificar la mediana se debe buscar el dato que se encuentra en la posición central del conjunto de valores, cuando estos se ordenan de menor a mayor o viceversa.
Argumentos	Aplicación correcta del procedimiento y la fórmula para calcular la mediana. El conjunto de datos es impar. Por tanto, la mediana es el valor que ocupa la posición central.

De la MTC moda, al igual que la media y la mediana, se aborda en los dos primeros grados de la Educación Secundaria, en total cuatro ejemplos, tres ejemplos durante el primer grado y uno en el segundo grado. En la tabla 6 se presentan los objetos primarios relacionados con la moda.

Por otra parte, en dos ejemplos se calcula el promedio y se identifica la mediana, dichos ejemplos se presentan en el libro de primer grado únicamente. En la tabla 7 se presentan los elementos primarios de los ejemplos relacionados con la media-mediana.

Tabla 6.

Configuración epistémica de la moda

Objeto primario	Significado
Situaciones-problema	Identificar la frecuencia de cada país en la respuesta de 100 personas encuestadas. Identificar la moda en un conjunto de datos. Determinar la región que tiene mayor preferencia por el nuevo lanzamiento de un videojuego.
Lenguaje	Tabla de frecuencia, conjunto, datos, bimodal, datos numéricos, moda, símbolo de la moda (Mo), porcentaje, gráfico de barras, símbolo de la moda (\hat{x}).
Procedimientos	Identificar en la tabla, cuál es el país que tiene mayor frecuencia (lectura de tabla). Identificar la moda mediante la lectura de un gráfico de barras. Determinar la moda con base en datos dados. Identificar el dato que más se repite. a) marcar con distinto color las calificaciones que se repiten y b) elaborar una tabla de frecuencias.
Conceptos	Tabla de frecuencia, conjunto, moda, bimodal, frecuencia
Proposiciones	La moda es el dato del conjunto que presenta la mayor frecuencia. Un conjunto de datos puede tener una o más modas e incluso ninguna si todos tienen la misma frecuencia. Cuando un conjunto de datos tiene dos modas, se denomina bimodal. Existen conjuntos de datos multimodales; es decir, aquellos en los que varios datos se repiten las mismas veces, el mayor número de veces. Los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) no afectan la moda. Existen conjuntos de datos amodales, que son aquellos en los que no hay un dato con mayor frecuencia. La moda puede obtenerse, aunque el conjunto de datos no sea numérico.
Argumentos	Definición de moda.

Tabla 7.

Configuración epistémica de la media-mediana

Objeto primario	Significado
Situaciones-problema	Calcular la media y la mediana de un conjunto de calificaciones. Conocer el promedio del sueldo de los empleados de una empresa.
Lenguaje	Promedio \bar{x} , mediana Me , datos numéricos, listado de datos, conjunto y dato atípico.
Procedimientos	Procedimiento y fórmula para calcular o identificar el promedio y la mediana.
Conceptos	Promedio, mediana, conjunto y dato atípico.
Proposiciones	El promedio no da información correcta del salario promedio de los empleados, por la presencia de un valor extremo. La mediana es la MTC que da mejor información de los datos analizados. La media es una medida de tendencia central inestable en comparación con

Objeto primario	Significado
	la mediana. Si el conjunto tiene un dato atípico, la media cambia considerablemente, mientras que la mediana no.
Argumentos	Características de los valores de los datos analizados. Características de la media y la mediana.

Para el caso de la media-mediana-moda, se presentan dos ejemplos, uno en segundo grado y uno más en el tercer grado de la Educación Secundaria. En la tabla 8, se presentan los significados de los objetos primarios de los dos ejercicios.

Tabla 8.
Configuración epistémica de la media-mediana-moda

Objeto primario	Significado
Situaciones-problema	Determinar la medida de tendencia central que mejor representa la cantidad de horas que 12 adolescentes miran televisión durante una semana. Calcular las medidas de tendencia central de los goles anotados de un jugador en partidos jugados.
Lenguaje	Datos numéricos; tabla de doble entrada; medidas de tendencia central; símbolo de la media \bar{x} ; suma y división; símbolo de la mediana \tilde{x} ; símbolo de moda \hat{x} ; media muestral; valor central; ordenar datos de menor a mayor y número de datos par o impar.
Procedimientos	Calcular la media o promedio aplicando la fórmula. Determinar la mediana. Determinar la moda
Conceptos	Media, mediana y moda
Proposiciones	La mediana podría ser la mejor representante, pues al menos la mitad de los adolescentes ven menos de 6.5 horas de televisión y la otra mitad ven más horas. Las tres medidas están alejadas una de la otra. La moda no es una buena representante, ya que ni la mitad de los adolescentes ven la televisión 3 horas. La media se ve afectada por el valor 28 (dato extremo) y más de la mitad de los datos están por debajo de la media; por tanto, tampoco es buena representante del conjunto de datos. La media es 2. La mediana es 2.5 La moda es 3. La media aritmética o media de la muestra representa el valor promedio de todas las observaciones. Para n datos de una muestra, donde cada x es una medición, se define a la media como la suma de todos sus valores y se divide entre el total de los datos. La mediana es el valor que divide a los datos en dos partes iguales. Para obtener la mediana primero se ordenan los datos de menor a mayor. El número de datos puede ser par o impar.

Objeto primario	Significado
	La moda es el valor que se repite más veces.
Argumentos	Cálculo e interpretación de las medidas de tendencia central y las características de cada una.

Situaciones- problema

Se identificaron 16 situaciones-problema en los tres libros de texto analizados, de estos en 12 se identificaron aplicaciones *extra-matemáticas* y en 4 aplicaciones *intra-matemáticas*. Específicamente, respecto de las aplicaciones extra-matemáticas, tres corresponden a ejemplos de la media (cálculo de masa corporal promedio, al cálculo de la estatura promedio de pacientes y el cálculo del promedio de las calificaciones de un grupo de estudiantes); tres más a la mediana (cálculo de la mediana de un conjunto de calificaciones); dos ejemplos de la moda (preferencia de país para aprender inglés y la región con mayor preferencia por un nuevo lanzamiento de un videojuego); dos ejemplos más correspondientes a tratamiento de la media y mediana de forma conjunta (calcular la media y la mediana de un conjunto de calificaciones y los sueldos de empleados de una empresa), lo anterior para identificar cuál es la MTC que se ajusta más a la información de los datos analizados; y finalmente dos ejemplos relacionados con el tratamiento de la media, la mediana y la moda en conjunto (determinación de las medidas de tendencia central que mejor representa la cantidad de horas que 12 adolescentes miran televisión durante una semana y de los goles anotados de un jugador en partidos jugados).

Mientras que los cuatro ejemplos restantes son de aplicación intra-matemática, puesto que se basan en el análisis de conjuntos de datos dados, de éstos uno pertenece a la MTC media, uno a la mediana y dos a la moda. En general, se puede afirmar que la mayoría de los ejemplos que se proponen en los textos analizados corresponden a aplicaciones extra-matemáticas. En la Figura 3 se presentan dos situaciones-problema, una relacionada con la aplicación *extra-matemática* y otra *intra-matemática*.

Figura 3.

Ejemplo de situaciones-problema con aplicaciones extra-matemática e intra-matemática.

Situación-problema con aplicación extra-matemática	Situación-problema con aplicación intra-matemática																																																																																						
<p>Ejemplo 4 La tabla muestra la cantidad de horas que 12 adolescentes miran televisión durante una semana; determina la medida de tendencia central que representa mejor los datos de la tabla.</p> <table border="1" data-bbox="305 426 748 468"> <thead> <tr> <th>Adolescentes</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> <th>11</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Horas</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>3</td> <td>15</td> <td>10</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>3</td> <td>7</td> <td>28</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> <p>Para responder al planteamiento, se obtienen las medidas de tendencia central como sigue:</p> <p>Media: $\bar{x} = \frac{5 + 8 + 8 + 3 + 15 + 10 + 3 + 6 + 3 + 7 + 28 + 3}{12} = 8,25$</p> <p>Mediana: 3, 3, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 8, 10, 15, 28</p> <p>$\frac{6 + 7}{2} = 6,5$ $\tilde{x} = 6,5$</p> <p>Moda: 3, 3, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 8, 10, 15, 28</p> <p>$\hat{x} = 3$</p>	Adolescentes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Horas	5	8	8	3	15	10	3	6	3	7	28	3	<p>Ejemplo 1 Del ejemplo anterior, se desea conocer la mediana para cada una de las filas una vez ordenados los datos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, así como la del conjunto total.</p> <table border="1" data-bbox="1040 380 1227 422"> <tbody> <tr> <td>10</td> <td>9</td> <td>10</td> <td>9</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>9</td> <td>8</td> <td>7</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table> <p>Solución Para obtener la mediana de cada una de las filas, primero se ordenan los datos de menor a mayor en la forma indicada y posteriormente se selecciona el valor central.</p> <table border="1" data-bbox="1040 478 1227 520"> <tbody> <tr> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>10</td> <td>10</td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> • Fil. 1: $Mo = 7$ • Fil. 2: $Me = 8$ • Fil. 3: $Me = 9$ • Fil. 4: $Mo = 9$ <p>• Total: el conjunto tiene 20 números, entonces debe haber nueve en cada extremo (resultan en la tabla con color verde). Así, la mediana es el promedio de 8 y 9 (ordenados con color anaranjado).</p> <table border="1" data-bbox="1040 615 1227 657"> <tbody> <tr> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>10</td> <td>10</td> </tr> </tbody> </table> <p>Por tanto, la mediana es:</p> $\bar{x} = \frac{8 + 9}{2} = 8,5$	10	9	10	9	8	7	8	9	8	9	9	9	8	7	9	8	7	8	9	9	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	10	10	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	10	10
Adolescentes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12																																																																											
Horas	5	8	8	3	15	10	3	6	3	7	28	3																																																																											
10	9	10	9	8																																																																																			
7	8	9	8	9																																																																																			
9	9	8	7	9																																																																																			
8	7	8	9	9																																																																																			
7	7	7	8	8																																																																																			
8	8	8	8	8																																																																																			
9	9	9	9	9																																																																																			
9	9	9	10	10																																																																																			
7	7	7	8	8																																																																																			
8	8	8	8	8																																																																																			
9	9	9	9	9																																																																																			
9	9	9	10	10																																																																																			
<p>Determinar la medida de tendencia central que mejor represente la cantidad de horas que 12 adolescentes miran televisión durante una semana.</p>	<p>Calcular la mediana de un conjunto de datos.</p>																																																																																						

Fuente: T1(p. 88) y T2 (p. 103).

Lenguaje

Con el análisis de los dieciséis ejemplos de las MTC, se identificó que se hace uso de los términos *datos numéricos*, *conjuntos numéricos* o *listado de datos* y de *símbolos* para abordar tanto a la media (\bar{x}), la mediana (Me , \tilde{x}) y la moda (Mo , \hat{x}). De manera particular el lenguaje usado en los ejemplos de la media son los términos: *intervalos*, *clase*, *m clases*, *conjunto de datos no agrupados*, *media aritmética* \bar{x} , *suma* y *división*; así como las expresiones: X_i *frecuencia* f_m , *sumar producto* $X_i f_i$, *suma de las frecuencias*: N , $N = [X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_m f_m] \div [f_1 + f_2 + \dots + f_m] = \frac{\sum X_i f_i}{\sum f_i}$ con $1 \leq i \leq m$. En el caso de la mediana se usan los siguientes términos: *datos intermedios*, *posición u orden de los datos*, *datos menores*, *datos mayores*, *número de datos par o impar*, *valores centrales* y *valores extremos*. Para moda se usan los términos *bimodal* y *porcentaje*, respecto de las notaciones gráficas, aparecen tabla de frecuencia y gráfico de barras. En los ejercicios donde se abordan a las MTC media-mediana se usan los términos *conjunto* y *dato atípico*. Y finalmente en los ejercicios donde se abordan las tres MTC se usan los términos: *medidas de tendencia central*, *media muestral* y *ordenar datos de menor a mayor*, de las notaciones gráficas se usa una tabla de doble entrada. A modo de ejemplo, en la Figura 4 se concentra información relacionada con lo presentado en los libros de texto analizados.

Procedimientos

En los dieciséis ejemplos regularmente calculan el promedio para encontrar la media mediante la aplicación de la fórmula, de manera similar proceden para calcular la mediana cuando esta tiene dos valores centrales. O bien se ordenan los datos de menor a mayor en el caso de la mediana para identificar si el número de datos es par o impar y con ello determinar el o los datos intermedios, y con ello obtener que la mediana es el valor central de los datos o bien aplicar la fórmula en los dos datos centrales. En el caso de la moda con base en una tabla de frecuencia o bien la lectura de un gráfico o en un conjunto de datos se determina o identifica el dato que más se repite. Finalmente, en los dos ejemplos donde se pide determinar la MTC que mejor se ajusta para la solución, se ponen en juego los procedimientos de cada una de las medidas. En la Figura 5 se presentan algunos procedimientos involucrados en los ejemplos analizados.

Figura 4.

Ejemplo del lenguaje usado en los libros de texto analizados sobre las MTC

<p>Ejemplo 1 En una escuela secundaria se realiza una encuesta en la que se pregunta la masa corporal de los estudiantes en kilogramos. Los resultados se muestran a continuación:</p> <p>46 53 47 46 49 56 59 56 49 47</p> <p>Hay 10 datos, por tanto, la media es:</p> $\bar{x} = \frac{46 + 53 + 47 + 46 + 49 + 56 + 59 + 56 + 49 + 47}{10} = \frac{508}{10} = 50.8$ <p>La masa promedio de los estudiantes es de 50.8 kg. Este dato indica que, si todos los estudiantes tuvieran la misma masa corporal, este valor sería de 50.8 kg. Cuando hay muchos datos, se definen intervalos para agruparlos. Usualmente, estos intervalos tienen la misma longitud y de cada uno se elige un representante, el cual es el promedio de los extremos del intervalo y se conoce como <i>clase</i>. Así, se tienen m clases X_i y en cada una la cantidad de datos en el intervalo, o frecuencia f_i. Para obtener la suma de datos se debe sumar cada producto $X_i f_i$. El total de datos es la suma de las frecuencias y se denota como N.</p> $N = [X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_m f_m] \div [f_1 + f_2 + \dots + f_m] = \frac{\sum X_i f_i}{\sum f_i}, \text{ con } 1 \leq i \leq m.$	<p>Ejemplo 2 En otra clase de matemáticas se registraron las siguientes calificaciones:</p> <p>6.5 6.7 6.9 7.4 8.4 8.5 8.7 9 9.3</p> <p>Para este caso, la cantidad de datos es impar, por lo cual la mediana es uno de los datos del conjunto. Ya que son nueve en total, el quinto es el valor medio:</p> $Me = 8.4$ <p>Ambos conjuntos de datos son comparables por ser de la misma situación. Se puede entonces afirmar que la mediana de la primera clase es menor que la mediana de la segunda clase.</p>
<p>Datos numéricos. Símbolo de la media: \bar{X}. Intervalos. Clase, m clases X_i. Frecuencia f_m. Sumar producto $X_i f_i$. Suma de las frecuencias: N $N = [X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_m f_m] \div [f_1 + f_2 + \dots + f_m] = \frac{\sum X_i f_i}{\sum f_i} \text{ con } 1 \leq i \leq m$</p>	<p>Datos numéricos. Datos intermedios. Posición u orden de los datos y representación de la mediana (Me).</p>

Fuente: T1 (p. 91 y 93).

Figura 5.

Ejemplo de los procedimientos que aparecen en los libros de texto al abordar las MTC

<p>Ejemplo 2 El contador de una empresa desea conocer el promedio de los sueldos de los empleados. Para saber cuánto gana aproximadamente cada uno, elaboró las siguientes listas:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">Puesto</th> <th style="text-align: left;">Sueldo mensual</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Encargado de almacén A</td><td>\$16 550.00</td></tr> <tr><td>Encargado de almacén B</td><td>\$16 550.00</td></tr> <tr><td>Encargado de ventas</td><td>\$18 750.00</td></tr> <tr><td>Supervisor de calidad</td><td>\$19 450.00</td></tr> <tr><td>Encargado de compras</td><td>\$17 650.00</td></tr> <tr><td>Operador de montacargas</td><td>\$15 680.00</td></tr> <tr><td>Director general</td><td>\$59 650.00</td></tr> </tbody> </table> <p>Solución El salario del director sobrepasa a los demás; por tal motivo, el promedio puede ser una fuente de errores. El promedio es:</p> $\bar{x} = \$23\,468.57$ <p>Por otro lado, la mediana es:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">Puesto</th> <th style="text-align: left;">Sueldo mensual</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Operador de montacargas</td><td>\$15 680.00</td></tr> <tr><td>Encargado de almacén A</td><td>\$16 550.00</td></tr> <tr><td>Encargado de almacén B</td><td>\$16 550.00</td></tr> <tr><td>Encargado de compras</td><td>\$17 650.00</td></tr> <tr><td>Encargado de ventas</td><td>\$18 750.00</td></tr> <tr><td>Supervisor de calidad</td><td>\$19 450.00</td></tr> <tr><td>Director general</td><td>\$59 650.00</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">$Me = \\$17\,650.00$</p> <p>En este caso, la mediana es un dato más aproximado a los salarios.</p>	Puesto	Sueldo mensual	Encargado de almacén A	\$16 550.00	Encargado de almacén B	\$16 550.00	Encargado de ventas	\$18 750.00	Supervisor de calidad	\$19 450.00	Encargado de compras	\$17 650.00	Operador de montacargas	\$15 680.00	Director general	\$59 650.00	Puesto	Sueldo mensual	Operador de montacargas	\$15 680.00	Encargado de almacén A	\$16 550.00	Encargado de almacén B	\$16 550.00	Encargado de compras	\$17 650.00	Encargado de ventas	\$18 750.00	Supervisor de calidad	\$19 450.00	Director general	\$59 650.00	<p>La media aritmética o media de la muestra representa el valor promedio de todas las observaciones. Para n datos de una muestra $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ donde cada x_i es una medición, se define la media como la suma de todos los valores y se divide entre el total de datos:</p> $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ <p>Para el ejemplo del goleador, se tiene la tabla en la que se describe el número de partidos jugados y el de goles del jugador. Así, la media muestral es la suma de los goles entre el total de partidos jugados.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Partido</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Núm. de goles del jugador</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>12</td> </tr> </tbody> </table> $\bar{x} = \frac{3 + 2 + 0 + 1 + 3 + 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$ <p>Quiere decir que en promedio el jugador metió dos goles en la temporada. Este valor se reconoce en estadística como el <i>valor central</i>.</p> <p>La <i>mediana</i> es el valor que divide a los datos en dos partes iguales. Para obtener la mediana, primero se ordenan los datos de menor a mayor. El número de datos puede ser par o impar. Por ejemplo, los siguientes siete valores {1, 2, 4, 5, 6, 8, 9} (número impar de datos) están ordenados de menor a mayor; la mediana es el valor del centro, es decir el 5, ya que antes del 5 hay tres datos y después del 5 también hay tres.</p> <p>Cuando la colección de datos sea un número par, como en el caso de los goles, se ordenan los datos, aunque se repita alguno y se obtiene el conjunto {0, 1, 2, 3, 3, 3} de goles.</p> <p>La mediana es el promedio de los dos datos de en medio: Mediana = $\frac{2+3}{2} = 2.5$</p> <p>Hay tres datos antes del 2.5 y tres datos después del 2.5, también esa es la mediana.</p> <p>La <i>moda</i> es el valor que se repite más veces. En el ejemplo de los goles anotados la moda es 3, ya que ese dato se repite tres veces.</p> <p>En resumen, las medidas de tendencia central de los datos del goleador son las siguientes:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tbody> <tr> <td>Media (valor central o promedio)</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>Mediana (divide en dos partes iguales a los datos)</td> <td>2.5</td> </tr> <tr> <td>Moda (valor que se repite más)</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	Partido	1	2	3	4	5	6	Total	Núm. de goles del jugador	3	2	0	1	3	3	12	Media (valor central o promedio)	2	Mediana (divide en dos partes iguales a los datos)	2.5	Moda (valor que se repite más)	3
Puesto	Sueldo mensual																																																						
Encargado de almacén A	\$16 550.00																																																						
Encargado de almacén B	\$16 550.00																																																						
Encargado de ventas	\$18 750.00																																																						
Supervisor de calidad	\$19 450.00																																																						
Encargado de compras	\$17 650.00																																																						
Operador de montacargas	\$15 680.00																																																						
Director general	\$59 650.00																																																						
Puesto	Sueldo mensual																																																						
Operador de montacargas	\$15 680.00																																																						
Encargado de almacén A	\$16 550.00																																																						
Encargado de almacén B	\$16 550.00																																																						
Encargado de compras	\$17 650.00																																																						
Encargado de ventas	\$18 750.00																																																						
Supervisor de calidad	\$19 450.00																																																						
Director general	\$59 650.00																																																						
Partido	1	2	3	4	5	6	Total																																																
Núm. de goles del jugador	3	2	0	1	3	3	12																																																
Media (valor central o promedio)	2																																																						
Mediana (divide en dos partes iguales a los datos)	2.5																																																						
Moda (valor que se repite más)	3																																																						
<p>Cálculo del promedio y la mediana mediante el uso de fórmula.</p>	<p>Procedimientos para identificar cada MTC:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Calcular la media o promedio muestral aplicando la fórmula. -Para la mediana, identificar si el número de datos ordenados es par o impar. En el primer caso, la mediana es el valor que está en la posición central, o bien la mediana es el valor de la media de los dos datos que ocupan la posición central. -Para la determinación de la moda se identifica el dato que más veces se repite. 																																																						

Fuente: T1 (p. 104) y T3 (77 y 78).

Conceptos

Explícitamente en los tres libros de texto analizados de la educación secundaria, presentan

definiciones de la media y se refieren a ésta como media aritmética o promedio, así mismo, toman relevancia conceptos tales como: clase, frecuencia, intervalo y valores extremos. En el caso de la mediana, además de presentar la definición de ésta resultan importantes los conceptos par, impar y orden en los datos. De manera similar ocurre con la moda, pues se presenta su definición y con ella conceptos como conjunto, bimodal y frecuencia. Otro concepto relevante en los ejemplos sobre media-mediana es dato atípico. En la Figura 6, se presentan algunos ejemplos relacionados con lo descrito anteriormente.

Figura 6.

Los conceptos referidos a las MTC presentes en los libros de texto analizados.

La media

La *media aritmética* o *promedio* se define como el cociente de la suma de los valores de todos los datos x_i , y la cantidad total de datos n . La media se simboliza como \bar{x} .

El cálculo de la media es como sigue, si se tiene un conjunto de n datos no agrupados:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}, \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

La mediana

La mediana se define como el valor medio de un conjunto de datos cuantitativos ordenado, es decir, es el dato que a su izquierda y a su derecha tiene la misma cantidad de datos. Cuando el conjunto tiene una cantidad impar de datos, la mediana es el dato de en medio del conjunto. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos datos centrales. Se simboliza *Me*.

La moda

La moda es el dato del conjunto que presenta la mayor frecuencia. Un conjunto de datos puede tener una o más modas, e incluso ninguna si todos tienen la misma frecuencia. Cuando un conjunto de datos tiene dos modas, se denomina *bimodal*.

Fuente: T1 (p. 91, 92 y 94).

Proposiciones

En los cuatro ejemplos referidos al tratamiento de la media, se hace alusión en sus enunciados al uso de conceptos durante su solución como los siguientes: la masa promedio de los estudiantes es de 50.8 kg; si todos los estudiantes tuvieran la misma masa corporal, este valor sería de 50.8 kg; la estatura promedio es de 171.97 cm; la clase menor tiene como valor promedio 162 cm y la clase

mayor 183 cm; por lo tanto la mayoría de los datos están cerca del promedio; la media aritmética es 8.45; la media aritmética es sensible a valores extremos; la media equilibra en cierto sentido los valores de los datos; la media podrá calcularse solo si el conjunto de datos es numérico; la media es única para un conjunto de datos; y finalmente los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) alteran significativamente a esta medida.

Para el caso de los cuatro ejemplos sobre la mediana se hace alusión en sus enunciados lo siguiente: la cantidad de datos es par; la mediana es 5.2; la cantidad de datos es impar; la mediana es 8.4; el conjunto de datos es par; la mediana es el promedio de los datos que quedan en el centro; la mediana es 8.5; la mediana es 12; cuando el número de datos es par, la mediana es igual a la media de los dos valores centrales; los valores extremos normalmente no la afectan; y para identificar la mediana se debe buscar el dato que se encuentra en la posición central del conjunto de valores, cuando estos se ordenan de menor a mayor o viceversa.

En los cuatro ejemplos respecto de la moda, en sus enunciados se hace referencia a: la moda es el dato del conjunto que presenta la mayor frecuencia; un conjunto de datos puede tener una o más modas e incluso ninguna si todos tienen la misma frecuencia; cuando un conjunto de datos tiene dos modas, se denomina bimodal; existen conjuntos de datos multimodales, es decir, aquellos en los que varios datos se repiten las mismas veces, el mayor número de veces; los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) no afectan la moda; existen conjuntos de datos amodales, que son aquellos en los que no hay un dato con mayor frecuencia; y la moda puede obtenerse aunque el conjunto de datos no sea numérico.

Respecto de los ejemplos donde se trabajan en conjunto la media-mediana se presentan las siguientes proposiciones: el promedio no da información correcta del salario promedio de los empleados, por la presencia de un valor extremo; la mediana es la MTC que da mejor información de los datos analizados; la media es una medida de tendencia central inestable en comparación con la mediana; y si el conjunto tiene un dato atípico, la media cambia considerablemente, mientras que la mediana no.

Y finalmente de los ejemplos que involucran a media-mediana-moda aluden a las siguientes proposiciones: la mediana podría ser la mejor representante, pues al menos la mitad de los adolescentes ven menos de 6.5 horas de televisión y la otra mitad ven más horas; las tres medidas están alejadas una de la otra; la moda no es una buena representante, ya que ni la mitad de los adolescentes ven la televisión 3 horas; la media se ve afectada por el valor 28 (dato extremo)

y más de la mitad de los datos están por debajo de la media, por tanto tampoco es buena representante del conjunto de datos; la media es 2; la mediana es 2.5; la moda es 3; la media aritmética o media de la muestra representa el valor promedio de todas las observaciones; para n datos de una muestra, donde cada x es una medición, se define a la media como la suma de todos sus valores y se divide entre el total de los datos; la mediana es el valor que divide a los datos en dos partes iguales. Para obtener la mediana primero se ordenan los datos de menor a mayor; el número de datos puede ser par o impar; y la moda es el valor que se repite más veces.

En la Figura 7, se presentan algunas de las proposiciones identificadas respecto de las MTC en los libros de texto analizados.

Figura 7.

Ejemplo de las proposiciones presentes en las MTC en los libros de texto analizados

<p>Ejemplo 2 En el conjunto de datos 4, 3, 2, 5, 5, 5, 5, 8, 7, 6, la moda es 5.</p> <p>$\bar{x} = 5$</p> <p>Dentro de las características de la moda destacan las siguientes:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Existen conjuntos de datos multimodales; es decir, aquellos en los que varios datos se repiten las mismas veces, el mayor número de veces. 2. Los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) no afectan la moda. 3. Existen conjuntos de datos amodales, que son aquellos en los que no hay un dato con mayor frecuencia. 4. La moda puede obtenerse aunque el conjunto de datos no sea numérico. <p>Por último, para identificar la mediana se debe buscar el dato que se encuentra en la posición central del conjunto de valores, cuando éstos se ordenan de menor a mayor o viceversa.</p>	<p>Ejemplo 3 Se tienen los siguientes valores ordenados de menor a mayor de un conjunto de datos:</p> <p>6, 9, 9, 12, 12, 12, 15, 15, 18, 21, 21</p> <p>El dato que está en la posición central es el 12, ya que hay 5 datos menores antes y 5 datos mayores después. Por tanto, este número es la mediana.</p> <p>$\bar{x} = 12$</p> <p>Dentro de las características de la mediana destacan:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Cuando el número de datos es par, la mediana es igual a la media de los dos valores centrales. <p>Si los datos son 2, 3, 3, 4, 5, 5, los valores centrales son 3 y 4, así que la mediana será:</p> $\frac{3 + 4}{2} = 3.5 \text{ es decir } \bar{x} = 3.5$ <ol style="list-style-type: none"> 2. Los valores extremos normalmente no la afectan.
<p>La moda es 5. Existen conjuntos de datos multimodales; es decir, aquellos en los que varios datos se repiten las mismas veces, el mayor número de veces. Los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) no afectan la moda. Existen conjuntos de datos amodales, que son aquellos en los que no hay un dato con mayor frecuencia. La moda puede obtenerse aunque el conjunto de datos no sea numérico.</p>	<p>Identificar si el número de datos ordenados es par o impar. En el primer caso la mediana es el valor que está en la posición central. O bien la mediana es el valor de la media de los dos datos que ocupan la posición central.</p>

Fuente: T2 (p. 87 y 88).

Argumentos

Los argumentos usados para el cálculo de la media muestran la aplicación correcta de la fórmula. Mientras que los argumentos para la mediana se sugiere la aplicación correcta del procedimiento, así como de la fórmula para calcular la mediana, señalando que si el conjunto de datos es impar la mediana es el valor que ocupa la posición central. Respecto de la moda se basan en la definición de la moda. En el caso de los ejemplos que en conjunto abordan a la media-mediana se centran en evidencias las características de los valores de los datos analizados y las características propiamente de la media y la mediana. Finalmente, respecto de la media-mediana-moda se centra en el cálculo e interpretación de las medidas de tendencia central y sus características. En la Figura 8, se presentan algunos ejemplos donde se evidencian los argumentos usados en los libros texto de secundaria de la NEM.

Figura 8.

Ejemplos del uso de argumentos en los libros de texto analizados

<p>Ejemplo 1 Se realizó una encuesta a 100 personas, a las que se les preguntó por el país en el cual les gustaría estudiar o practicar inglés. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:</p> <p style="text-align: center;">País de preferencia</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>País</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Australia</td> <td>21</td> </tr> <tr> <td>Canadá</td> <td>46</td> </tr> <tr> <td>Estados Unidos</td> <td>21</td> </tr> <tr> <td>Nueva Zelanda</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>Inglaterra</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>100</td> </tr> </tbody> </table> <p>Se identifica en la tabla que la moda es Canadá con una frecuencia de 46; por tanto, éste es el país preferido por los encuestados. Si se retiraran las respuestas de esta nación, el resultado sería un conjunto de datos bimodal, ya que tanto Estados Unidos como Australia tienen la misma frecuencia y serían modas.</p>	País	Frecuencia	Australia	21	Canadá	46	Estados Unidos	21	Nueva Zelanda	7	Inglaterra	5	Total	100	<p>Ejemplo 1 Del conjunto de datos del ejemplo 1 de la sección anterior, el maestro determina la moda.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>10</td><td>9</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td> </tr> <tr> <td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>8</td><td>8</td> </tr> <tr> <td>9</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>8</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>9</td> </tr> </tbody> </table> <p>Solución Se marcan con colores los valores que se repiten para que sean identificados con mayor facilidad; posteriormente se elabora una tabla de frecuencia.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Valor</th> <th>Frecuencia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>7</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table> <p>Por tanto: $Mo = 9$</p> <p>En este caso, si hubiera otro número 8, el conjunto tendría dos modas y se podría afirmar que es bimodal.</p>	10	9	10	9	8	7	8	9	8	8	9	9	8	7	9	8	7	8	9	9	Valor	Frecuencia	7	3	8	7	9	8	10	2
País	Frecuencia																																												
Australia	21																																												
Canadá	46																																												
Estados Unidos	21																																												
Nueva Zelanda	7																																												
Inglaterra	5																																												
Total	100																																												
10	9	10	9	8																																									
7	8	9	8	8																																									
9	9	8	7	9																																									
8	7	8	9	9																																									
Valor	Frecuencia																																												
7	3																																												
8	7																																												
9	8																																												
10	2																																												
<p>Definición de moda.</p>	<p>Se marcan con colores los valores que se repiten para que sean identificados con mayor facilidad; posteriormente se elabora una tabla de frecuencia</p>																																												

Fuente: T1 (94 y 105).

DISCUSIÓN

De manera general en los libros de texto conocimiento y saberes científicos de la Educación Secundaria, los ejemplos relacionados con MTC son presentados mediante una estructura, es decir, se presenta de inicio la definición que corresponde a cada una de las medidas y posteriormente se presentan los ejemplos, a diferencia de lo que señala Estrella (2008) en un libro de texto que presenta ambigüedad en el uso de los términos y sus significados. Ahora en el caso de este análisis se pudo visualizar en el caso de la media, un uso muy matematizado que podría no ser tan entendible para los estudiantes de secundaria, de manera similar que Estrella (2008) quién señala que el libro de texto de 7° de educación básica en Chile carece de un lenguaje matemático fino, los conceptos son presentados por medio de fórmulas y las actividades se reducen a su aplicación inmediata.

Otro aspecto que se pudo observar en los libros de texto analizados es que existe un equilibrio entre el número de ejemplos presentados para cada una de las MTC, es decir, se presentan cuatro ejemplos para abordar a la media, cuatro ejemplos para la mediana y cuatro para la moda, y se complementa lo anterior con cuatro ejemplos más, de los cuales en dos se aborda de manera conjunta media-mediana y en dos más se pide identificar la MTC que más de ajusta a la solución del ejemplo, poniendo en juego en el mismo ejemplo a la media-mediana-moda. A diferencia de lo señalado por Díaz-Levicoy et al. (2020); García-García et al. (2021) y Parra-Fica et al. (2024) quienes identificaron en libros de texto mexicanos en el primer caso, libros de texto chilenos de séptimo básico el segundo caso y en quinto básico el tercer caso, el predominio de la media aritmética y la moda en el primer y el tercer caso, así como una sola tarea para calcular MTC y la media únicamente en el segundo caso.

Por su parte en García-García, Urrutia et al. (2021) estudiaron el significado de la media, mediana y moda en libros de texto escolares de séptimo año de Educación Básica en Chile, donde caracterizaron el tipo de situaciones-problema, procedimientos, conceptos, propiedades, elementos lingüísticos y argumentos. Específicamente respecto de las situaciones-problema refieren a la media para obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto, mientras que en el presente estudio se identificaron aplicaciones intra-matemáticas y extra-matemáticas, tanto para la media, la mediana y la moda. En cuanto a los procedimientos en García-García, Urrutia et al. (2021) refieren a la media mediante el cálculo gráfico, lo que coincide con lo encontrado en este trabajo respecto de la media y para calcular la mediana cuando esta tiene dos valores centrales. En García-García,

Urrutia et al. (2021) refieren a conceptos mediante la mediana como centro de la distribución, en el caso de este estudio presentan definiciones de las tres medidas de tendencia central y se puntualizan conceptos como los siguientes: clase, frecuencia, intervalo y valores extremos respecto de la media, conceptos como par, impar y orden en los datos en el caso de la mediana y conjunto, bimodal y frecuencia en el caso de la moda.

En cuanto a las propiedades en García-García, Urrutia et al. (2021) refieren a la media, mediana y moda pertenecen al rango de la variable, mientras que en el presente trabajo se refiere a que la media aritmética es sensible a valores extremos, que la media equilibra en cierto sentido los valores de los datos y que podrá calcularse solo si el conjunto de datos es numérico; la media es única para un conjunto de datos; y finalmente los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) alteran significativamente a esta medida.

Para el caso de la mediana, en este estudio se identificó que cuando el número de datos es par, la mediana es igual a la media de los dos valores centrales y que los valores extremos normalmente no la afectan, así mismo que para identificar la mediana se debe buscar el dato que se encuentra en la posición central del conjunto de valores, cuando estos se ordenan de menor a mayor o viceversa.

Y finalmente para la moda la refieren como el dato del conjunto que presenta la mayor frecuencia, que un conjunto de datos puede tener una o más modas e incluso ninguna si todos tienen la misma frecuencia, que cuando un conjunto de datos tiene dos modas, se denomina bimodal y que pueden existir conjuntos de datos multimodales, es decir, aquellos en los que varios datos se repiten las mismas veces, el mayor número de veces, que los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) no afectan la moda, que existen conjuntos de datos amodales, que son aquellos en los que no hay un dato con mayor frecuencia y por último que la moda puede obtenerse aunque el conjunto de datos no sea numérico.

En García-García, Urrutia et al. (2021) refieren a elementos lingüísticos tales como el uso de tablas y gráficos, mientras que en el presente trabajo además de referir al uso de tablas y gráficos también se refiere al uso de fórmulas. En García-García, Urrutia et al. (2021) refieren a los argumentos con el uso de gráficos como justificación, el presente trabajo refiere al cálculo de la media mediante la aplicación correcta de la fórmula. A partir de la mediana se sugiere la aplicación correcta del procedimiento. Y para la moda se basan en la definición de la moda.

CONCLUSIÓN

El objetivo de la investigación presentada en este capítulo, fue caracterizar el significado pretendido de las MTC en libros de texto de Educación Secundaria en México, para ello la configuración epistémica fue un elemento que permitió informar sobre situaciones-problema, lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos. Se identificó que en los libros analizados existe un equilibrio en cuanto a la cantidad de ejemplos para cada MTC, además, que en dos ejemplos se abordan las tres MTC. Así mismo, se identificó que se inicia con la presentación de las definiciones de las MTC y posteriormente se van citando las características propias de cada una. Aún con todo lo anterior, es necesario mencionar que este tipo de análisis son relevantes para identificar las necesidades básicas para diseños o creaciones de tareas apropiadas por parte de los profesores de matemáticas en servicio. Puesto que los libros de texto son un apoyo inegable, siempre es importante contar con tareas o materiales didácticos que complementen la enseñanza aprendizaje en este caso de las medidas de tendencia central.

Por otra parte, fue importante realizar esta investigación sobre análisis de libros de texto, pues permitió identificar que uno de los dieciséis ejemplos analizados, está mal planteado, de ahí la relevancia de que el profesor de matemáticas en servicio tenga la capacidad de ubicar tales errores, mostrando con ello la importancia de realizar investigaciones que involucren también al profesor de matemáticas en servicio de los diferentes niveles educativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Braga, G. y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218.
- Burgos, M., Castillo, M.J., Beltrán-Pellicer, P. Giacomone, B. y Godino, J.D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre la proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema*, 34(66), 40-68. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.
- Daza., J.C., Leguizamón, J.F. y Álvarez, A.F. (2022). Interpretaciones semióticas de media aritmética como medida de tendencia central. *Revista Boletín Redipe*, 11(1), 290-308. <https://doi.org/10.36260/rbr.v11i1.1643>
- Díaz-Levicoy, D., Morales-García, L. y Rodríguez-Alveal, F. (2020). Las medidas de tendencia central en libros de texto de Educación Primaria en México. *Paradigma*, 41, 706-729.

- Estrella, S. (2008). Medidas de tendencia central en la enseñanza básica en Chile. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 4(1), 20-32.
- Estrella, S. (2016). Comprensión de la media por profesores de educación primaria en formación continua. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 18(1), 1-22.
- García-García, J.I., Imilpán Rivera, I., Díaz Levicoy, D. y Arredondo, E.H. (2021). Las medidas de tendencia central en libros de texto de séptimo básico de Chile. *Revista Conrado*, 17(81), 261-268.
- García-García, J. I., Urrutia-Leiva, I.B., Vásquez-Chicao, S.H. y Hernández-Arredondo, E. (2021). Significado de la media, mediana y moda en textos escolares de séptimo básico. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(4), 186-199. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.84>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significados institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355
- Godino, J. (2022). Emergencia, estado actual y perspectiva del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*. 2(2), 1-24.
- MINEDUC. (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Ministerio de Educación.
- Morales-García, L. y Navarro, C. (2021). Idoneidad epistémica del significado de número natural en libros de texto mexicanos. *Bolema*, 35(71), 1338-1368. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a06>
- Morales-García, L., Navarro, C. y Díaz-Levicoy, D. (2021). Significados del número natural en libros de texto mexicanos: un análisis descriptivo. *Educación Matemática*, 33(3), 94-120. <https://doi.org/10.24844/EM3303.04>
- Parra-Fica., López-Martín, M. y Díaz-Levicoy, D. (2024). Measures of central tendency in primary education textbooks in Chile. *Eurasia-Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6),1-14. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14592>
- Rodríguez-Alveal, F., Maldonado, A.C. y Sandoval, P. (2016). Comprensión de las medidas de tendencia central: un estudio comparativo en estudiantes de pedagogía en matemática en dos instituciones formadoras chilenas. *Revista da Avaliação da Educação Superior*, 21(3), 929-952.
- Secretaría de Educación Pública. (2022). *Avance del contenido del Programa sintético de la Fase 6*. [Material en proceso de construcción].
- SEP (2023). *Saberes y pensamiento científico. Primer grado*. Secretaría de Educación Pública.
- SEP (2023). *Saberes y pensamiento científico. Segundo grado*. Secretaría de Educación Pública.
- SEP (2023). *Saberes y pensamiento científico. Tercer grado*. Secretaría de Educación Pública.

MEASURES OF CENTRAL TENDENCY IN SECONDARY EDUCATION TEXTBOOKS OF THE NEW MEXICAN SCHOOL

Abstract

The purpose of the chapter is to present the epistemic configurations associated with the intended meaning of the Measures of Central Tendency (MCT), based on the textbooks of knowledge and scientific thought of secondary education in the framework of the New Mexican School (NMS). The theoretical and methodological elements of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction (OSA) are used. Some of the results show that in the problem-situations the mean or arithmetic mean, median and mode meanings are promoted in an extra and intra mathematical way. In the language, numerical data, handling of formulas, tables, bar graphs, among others, are addressed. As for procedures, it focuses on the calculation or determination of the mean, median and mode. As for the propositions, it focuses on the characteristics of the mean, median and mode. The above serves as a basis for the design of exercises and/or problems based on the meanings and characteristics of the measures of central tendency.

Keywords: measures of central tendency, textbooks, systemic configuration, secondary school.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL EM LIVROS DIDÁTICOS DE ENSINO MÉDIO DA ESCOLA NEW MEXICAN

Resumo

O objetivo do capítulo é apresentar as configurações epistêmicas associadas ao significado pretendido das Medidas de Tendência Central (MTC), com base nos livros didáticos de conhecimento e pensamento científico do ensino médio no âmbito da Nova Escola Mexicana (NEM). São utilizados os elementos teóricos e metodológicos do Enfoque Ontosemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS). Alguns dos resultados mostram que, nas situações-problema, os significados de média ou média aritmética, mediana e moda são promovidos de forma extra e intra matemática. Na linguagem, são tratados dados numéricos, manuseio de fórmulas, tabelas, gráficos de barras, entre outros. Em termos de procedimentos, o foco está no cálculo ou na determinação da média, da mediana e da moda. Quanto às proposições, o foco está nas características da média, da mediana e da moda. Isso serve de base para a elaboração de exercícios e/ou problemas baseados nos significados e nas características das medidas de tendência central.

Palavras-chave: medidas de tendência central, livros didáticos, configuração sistêmica, secundário.

Catalina Navarro Sandoval

Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, México.

catalinans@uagro.mx

<http://orcid.org/0000-0001-5214-0062>

Licenciada en Matemáticas área: Enseñanza de la Matemática y Computación, por la Universidad Autónoma de Guerrero; Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional; Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, por la Universidad Autónoma de Guerrero. Cuenta con Perfil PRODEP (Programa para el Desarrollo Profesional docente) que otorga la Secretaría de Educación Pública; es miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME); es miembro del Comité Científico de Evaluación del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa; es miembro del Sistema Estatal de Investigadores del estado de Guerrero; es miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI); pertenece al Cuerpo Académico en consolidación: Educación Matemática. Es profesora e investigadora de tiempo completo de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero desde el año 2005.

Lizzet Morales Garcia

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

lizzet.morales@correo.buap.mx

<https://orcid.org/0000-0002-2295-2278>

Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Actualmente es Profesora-investigadora en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) donde dicta cursos en la Maestría en Educación Matemática y el Doctorado en Educación Matemática. Sus principales líneas de investigación están enfocadas en el análisis de libros de texto de matemáticas y la formación de profesores. Por otra parte, es integrante del Padrón de Investigadoras e Investigadores 2024 (BUAP) y de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM).

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA EN MANUALES DIDÁCTICOS BRASILEÑOS EN LA EDUCACIÓN INFANTIL

Ana Paula Bolsan Sagrilo

Edvonete Souza de Alencar

RESUMEN

Este capítulo muestra un extracto de una disertación en la que presentamos los datos recopilados sobre el conocimiento para enseñar estadística. Así, nuestro objetivo es presentar cuáles son los conocimientos especializados para la enseñanza de la estadística recogidos en los manuales didácticos brasileños destinados a la Educación Infantil. La presente investigación posee un carácter documental. En este capítulo presentamos las categorías que evidencian la enseñanza de gráficos estadísticos. Consideramos que los resultados aportados pueden ayudar en el desarrollo de otros materiales formativos, teniendo en cuenta las especificidades para la didáctica del objeto de nuestro estudio, que son las matemáticas.

Palabras clave: Educación Infantil, Estadística, Formación de profesores.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se pretende reflexionar sobre los conocimientos fundamentales que un docente debe dominar para enseñar matemáticas de manera exitosa, impulsando a los profesores a explorar nuevas estrategias e investigaciones, con el objetivo de mejorar la enseñanza de las matemáticas a nivel global.

Cuando ponemos el foco en el contenido matemático, las expectativas aumentan según el grado de especialización de cada profesor, lo cual también involucra sus preferencias, sus creencias y sus concepciones históricas sobre el contenido, así como su formación en la materia.

El presente capítulo presenta un extracto de una disertación elaborada por la primera autora, en la que se analizan manuales didácticos brasileños de Educación Infantil, con el fin de identificar los conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas según estos textos. El objetivo de este capítulo es exponer los conocimientos especializados para la enseñanza de la estadística que se reflejan en dichos manuales destinados a la Educación Infantil. Destacamos que estos manuales están diseñados para docentes especializados en este ámbito educativo.

Para ello, se ha escogido analizar el primer manual didáctico publicado en Brasil, especializado en el ámbito de la enseñanza en Educación Infantil.

A lo largo de este capítulo, se presentan el marco teórico, la metodología, los resultados y discusión de los datos extraídos de los manuales seleccionados para la enseñanza de la estadística, y las conclusiones.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico se basa en el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), el cual se organiza en dos dominios principales, con las creencias situadas en el centro, vinculándose a ambos dominios. Un dominio representa los conocimientos necesarios que el docente debe tener sobre el contenido matemático, mientras que el otro abarca los aspectos metodológicos esenciales para su enseñanza (Flores-Medrano et al., 2014).

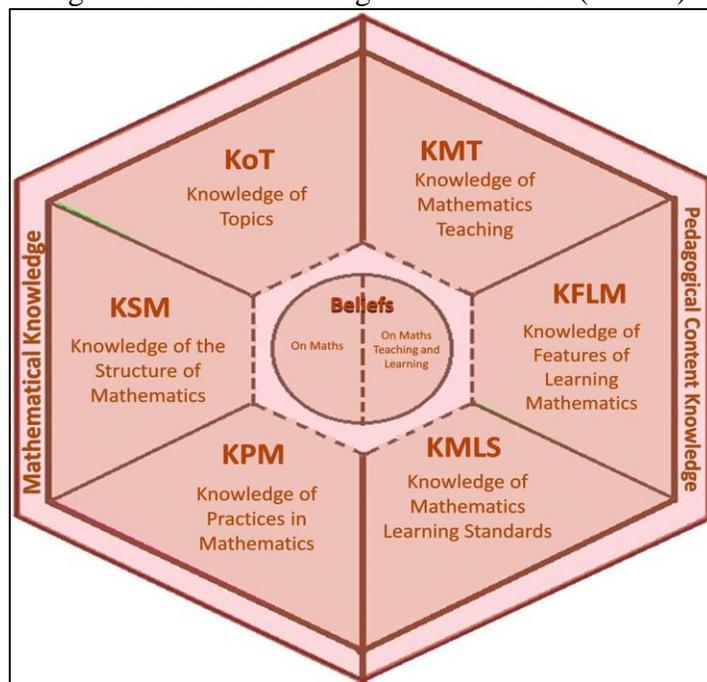
Este modelo teórico fue construido bajo la premisa de que adquiriría especificidad si fuera esencial para la formación docente (Montes et al., 2013). Por ello, lo consideramos un modelo teórico innovador que contribuye de manera significativa a las discusiones sobre la formación del profesorado.

De acuerdo con la Figura 1, el modelo teórico se compone del conocimiento matemático (KM) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK). Dentro de estos dos dominios existen seis subdominios: el Conocimiento de los Tópicos (KoT), el Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM), el Conocimiento de la Práctica de las Matemáticas (KPM), el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), el conocimiento de la enseñanza de la Matemática (KMT) y el Conocimiento de los Parámetros de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Los tres primeros forman parte del dominio del KM y los tres últimos del dominio PCK. Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK).

En la Figura 1 se presenta este modelo teórico en forma de hexágono, mostrando todos los dominios y subdominios que conforman el conocimiento especializado para la formación docente. Según Moriel Junior, “en el centro están las creencias de los profesores sobre la Matemática, su enseñanza y aprendizaje, pues permean los subdominios y dan sentido a sus acciones” (Moriel Junior, 2021, p. 2).

Figura 1.

Representación en forma geométrica de un hexágono del modelo (MTSK)



Fuente: Montes y Carrillo (2015, p. 321)

Al observar la Figura 1, podemos ver que en la parte izquierda el KM fue denominado inicialmente como Conocimiento del Contenido por Shulman en 1986 (Montes, 2015), ya que este

conocimiento podía aplicarse a diversas disciplinas en las que los educadores desempeñan su labor. Sin embargo, en el modelo MTSK, se le denomina KM debido a su enfoque específico en la enseñanza de las matemáticas (ibídem). Este dominio se refiere, por tanto, al conocimiento de la disciplina matemática en sí misma, pues dominar la materia que se va a enseñar es fundamental para un profesor (Flores-Medrano et al., 2014).

Para facilitar la comprensión de este dominio, se ha organizado un cuadro resumen (obsérvese Tabla 1) con los siguientes subdominios y categorías.

El dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) comprende el conocimiento de los profesores sobre la práctica educativa, incluyendo cómo enseñar y qué estrategias emplear, así como su conocimiento tanto del currículum como de las teorías de aprendizaje.

Tabla 1.

Subdominios y categorías del dominio Conocimiento Matemático (MK)

Subdominios	Categorías
Conocimiento de los Topicos (KoT)	Definiciones de temas matemáticos Propiedades y Fundamentos Registros de Representación de Temas Matemáticos Fenomenología Procedimientos
Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	Conexiones de Simplificación Conexiones de Complejidad Conexiones Auxiliares Conexiones Transversales
Conocimiento de la práctica de las matemáticas (KPM)	Descriptor General Descriptor Específico

Fuente: Elaboración de la autora basada en los datos de Flores-Medrano et al. (2014)

Para facilitar la comprensión de este segundo dominio, se ha estructurado en los siguientes subdominios y categorías, los cuales se detallan en la siguiente *tabla 2*.

Tabla 2.

Subdominios y categorías del Dominio Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)

Subdominios	Categorías
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Formas de aprendizaje Puntos fuertes o dificultades Formas de interacción de los estudiantes con el

Subdominios	Categorías
	contenido matemático
	Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas
Conocimiento de la enseñanza de la Matemática (KMT)	Teorías de Enseñanza Personales o Institucionalizadas Recursos Materiales y Virtuales Asociados al Contenido Matemático Tareas, Ejemplos, Técnicas y Estrategias
Conocimiento de los parámetros de aprendizaje de matemáticas (KMLS)	Contenidos Matemáticos Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental Secuenciación de temas diversos

Fuente: Elaborado por la autora a partir de Flores-Medrano et al. (2014)

En la siguiente sección presentamos los aspectos metodológicos de la investigación.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada en esta investigación es el método documental, tal y como la fundamentan Marconi y Lakatos (2013). Según estos autores, este modelo metodológico se caracteriza por lo siguiente:

La investigación documental se caracteriza por restringir sus fuentes de recolección de datos a documentos, escritos o no, constituyendo lo que se conoce como fuentes primarias. Estas fuentes pueden elaborarse en el momento en que ocurre el hecho o fenómeno, o bien ser creadas después. (Marconi y Lakatos, 2013, p. 174)

Además, observamos que no todos los materiales pueden ser considerados como documentos. Los materiales utilizados en una investigación bibliográfica y en una investigación documental son diferentes. La principal diferencia es que los materiales considerados documentos no han pasado por un proceso de análisis y, salvo algunas excepciones, si han pasado por dicho proceso, estos pueden ser revisados con otros objetivos.

Ante lo expuesto, seleccionamos los manuales didácticos del profesor de Educación Infantil para identificar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, ya que se trata de materiales que aún no han sido analizados con el sesgo empleado en la disertación. Para este capítulo nos servimos de la disertación titulada “El conocimiento del profesor de educación infantil para la enseñanza de matemáticas: análisis de los libros del PNLD/2019”, donde seleccionamos las partes en las que aparecían conocimientos significativos para la enseñanza de la estadística.

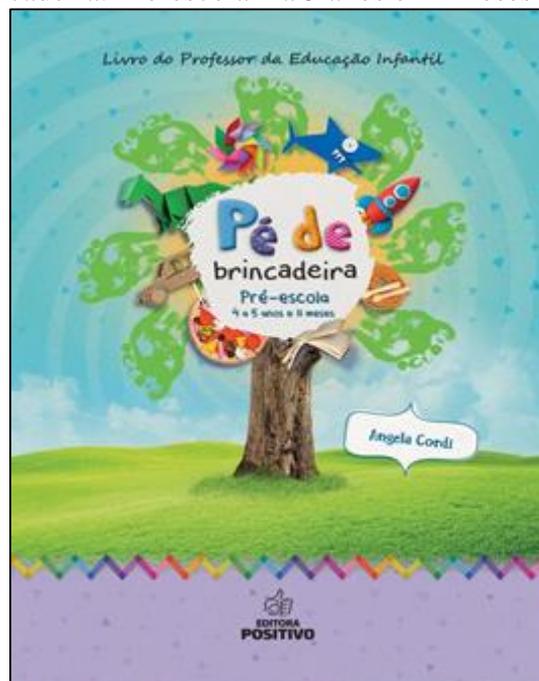
En este sentido, entre los manuales didácticos brasileños de Educación Infantil, seleccionados para ese análisis, se destacan dos manuales del Programa Nacional del Libro

Didáctico/2019: *Pé de brincadeira: Pré-escola 4 a 5 anos e 11 meses*, de Cordi (2018), y *Cadê? Achou!/: Educar, cuidar e brincar na ação pedagógica da creche*, de Pinto (2018). En estas obras se presentan varias propuestas educativas que permiten a los educadores de Educación Infantil analizarlas, adaptarlas a su realidad y desarrollarlas en su práctica educativa con los estudiantes. Las portadas de los manuales utilizados se pueden ver en las siguientes figuras (véanse Figura 2 y 3).

A continuación, realizamos una revisión de los materiales seleccionados y, a través de fichas, agrupamos y categorizamos los contenidos por semejanza. Al seleccionar cada parte para conformar una categoría, esta se dirigía a un subdominio y a una categoría específica. Sin embargo, en este capítulo, presentamos únicamente las categorías que abordan el conocimiento relacionado con la enseñanza de gráficos estadísticos.

Figura 2.

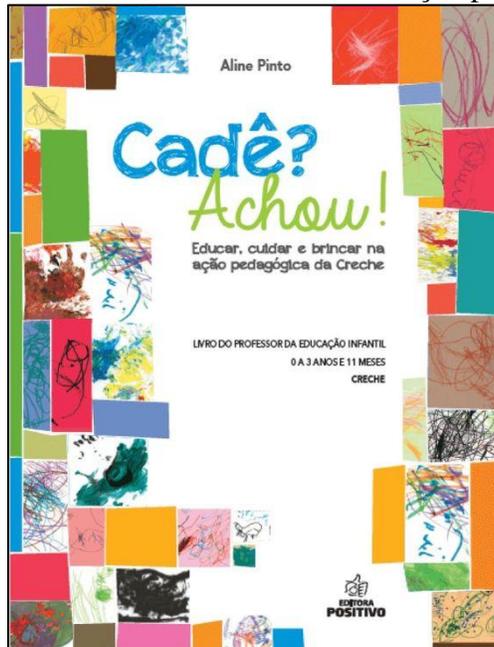
Portada del libro *Pé de brincadeira: Pré-escola 4 a 5 anos e 11 meses*



Fuente: Cordi (2018)

Figura 3.

Portada del libro *Cadê? Achou!: Educar, cuidar e brincar na ação pedagógica da creche.*



Fuente: Pinto (2018)

En la siguiente sección, expondremos los análisis de los datos, incluyendo los fragmentos y las posibles reflexiones derivadas del subdominio.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Al analizar los fragmentos del libro *Pé de brincadeira: Pré-escola 4 a 5 anos e 11 meses*, creamos la categoría “gráficos”. De esta seleccionamos los siguientes extractos con el fin de conocer cuáles son los conocimientos necesarios para enseñar estadística (obsérvese Tabla 3).

Tabla 3.

Fragmento LPEI clasificado en la categoría Registros de Representación de Temas Matemáticos (KoT)

N.º	Fragmentos del libro relacionados con la categoría registros de representación de temas matemáticos
1.º	Cuente con la participación de los niños para reagrupar las fotografías según los criterios elegidos para componer el gráfico en el cartel (p. 50).
2.º	[...] invite al grupo a construir un gráfico con la información que trajeron [...] Pregunte a los niños: ¿Quién viene a pie a la institución? Pida que traigan las cajitas diseñadas para construir la barra del gráfico que corresponde al ítem “a pie”. Luego, pregunte; ¿Quién viene a la escuela en coche? Proceda de la misma manera para todas las opciones de desplazamiento (p. 194).
3.º	Pida a los niños que elaboren un dibujo, representando la profesión que eligieron. Cuando

N.º	Fragmentos del libro relacionados con la categoría registros de representación de temas matemáticos
	los dibujos estén listos, pídale que formen grupos de acuerdo con sus preferencias [...]. Llame a un grupo a la vez en el cartel para componer el gráfico. Los niños deben pegar la tarjeta o la caja de modo que compongan una columna. [...] Cuando el gráfico esté listo, promueva el análisis y su interpretación (p. 137).

A partir de lo demostrado, organizamos esas situaciones en las subcategorías que denominamos “gráfico”. Antes de abordar esta categoría, es importante destacar que los profesores “deben proporcionarles diferentes experiencias de interacción que les permitan construir saberes” (Brasil, 2009, p. 93). Creemos que los alumnos deben estar expuestos a diferentes situaciones para elaborar relaciones y lograr un aprendizaje más significativo.

De este modo, consideramos que, al leer los extractos seleccionados, los educadores de Educación Infantil pueden desarrollar sus conocimientos sobre los diferentes registros de representación como el uso de gráficos y la compensación de su valor. Estos conocimientos pueden ser aplicados mediante fotos, uso de cajas y dibujos. Dado que el manual didáctico es un recurso autoformativo, los conocimientos previos pueden influir en el uso que le dan los docentes.

Además, consideramos que los fragmentos analizados favorecen los Registros de Representación de Temas Matemáticos. La ausencia del subdominio Conocimiento de Tópicos (KoT) compromete también la planificación de las prácticas educativas y la actuación de los profesores (Alencar et al., 2021).

Aunque las menciones sobre registros de representación sean escasas, estas pueden contribuir al desarrollo y a la ampliación del conocimiento docente para la enseñanza de gráficos estadísticos, como se evidencia en la Tabla 4:

Tabla 4.

Fragmentos do LPEI clasificados en la categoría tareas, ejemplos, técnicas y estrategias (KMT)

N.º	Fragmentos del libro relacionados con la categoría tarea, ejemplos, técnicas y estrategias
4.º	Exponga el gráfico elaborado por la clase en el mural del aula. Recurre a él siempre que necesite verificar cantidades de elementos, como el número de niños y niñas, etc. (p. 50).
5.º	Pregunte a los niños si la información se obtuvo claramente a través del gráfico. Con eso, se espera que evalúen si colocaron las fotos de manera que facilite la visualización y, cuando necesario, el conteo (p. 50).

Los fragmentos presentados se refieren a las propuestas pedagógicas con gráficos. Estas propuestas incluyen reflexiones que pueden mejorar la enseñanza de matemáticas (KMT) y que abarcan recursos y estrategias de enseñanza, entre los cuales se encuentran el uso de gráficos,

capaces de potenciar diferentes formas de reflexión (Carrillo et al., 2018).

Consideramos que la formación de profesores se verá favorecida desde el momento en que se establezcan conexiones con los temas transversales, especialmente cuando se centran en las acciones descritas en el manual didáctico mencionado. Además, es evidente que los profesores necesitarían contar con más propuestas para reflexionar sobre los contenidos matemáticos, lo cual mejoraría su formación. Como señalan Policastro, Almeida y Ribeiro (2017, p. 127) “los aprendizajes y resultados de los alumnos son impactados directamente por el conocimiento de los profesores”

En el libro *Cadê? Achou!: Educar, cuidar e brincar na ação pedagógica da creche*, también identificamos en el subdominio KoT: categoría Registros de Representación de Temas Matemáticos el uso de gráficos como potenciadores en la enseñanza de la música a los estudiantes.

En la Tabla 5 se puede observar un fragmento seleccionado del libro:

Tabla 5.

Fragmento LPEI clasificado en la categoría Registros de Representación de Temas Matemáticos (KoT)

N.º	Fragmentos del libro relacionados con la categoría tarea, ejemplos, técnicas y estrategias
1.º	Si es posible, cree una especie de gráfico utilizando las tarjetas con las fotos de la llamada construidas en la sección recepción [...]. Para ello, cree símbolos que ilustren la opción de voto. Por ejemplo, un dibujo de una margarita para ilustrar la canción “¿Dónde está la margarita?” o un dibujo de un tren para representar la canción “Tren de hierro”, y así sucesivamente. Luego, instruya a los niños a colocar sus fotos debajo de los símbolos que representan sus votos (p. 216).

Fuente: Elaborado por la autora a partir de los datos del libro *Cadê? Achou!: educar, cuidar e brincar na ação pedagógica da Creche* (Pinto, 2018)

Con base en el fragmento anterior, los profesionales podrán potenciar el contenido matemático en el caso KoT. El contenido identificado es la cuantificación, que puede ser observada mediante gráficos datos e información numérica. Creemos que estos gráficos pueden ayudar en la interpretación de los datos.

Por lo tanto, destacamos la importancia de revisar los materiales utilizados, especialmente en la formación docente de los profesionales de Educación Infantil que trabajan con niños de 0 a 3 años y 11 meses. El uso de los diferentes tipos de registro puede ser una herramienta para apoyar la enseñanza, especialmente en temas que despiertan el interés de los alumnos (Muñoz-Catalán et al., 2022). Por ello, es crucial que los educadores tengan acceso a una variedad de materiales de apoyo.

CONCLUSIONES

Al analizar los fragmentos sobre cómo los manuales didácticos abordan los conocimientos especializados para enseñar gráficos, identificamos que estos contenidos se reflejan en algunos de los subdominios y categorías. En particular, el subdominio KoT- y la categoría Registros de Representación, aparecen en los manuales *Pé de brincadeira* y *Cadê? Achou!: Educar, cuidar e brincar na ação pedagógica da creche*. Observamos que el sistema de representación gráfica KoT es el más destacado en estos manuales didácticos.

El subdominio (KMT): categoría Tareas, Ejemplos, Técnicas y Estrategias, se menciona en el libro *Pé de brincadeira* y ofrece actividades con materiales dirigidos al trabajo de las matemáticas, incluyendo propuestas con gráficos.

De esta manera, observamos que no se han identificado otros subdominios para la formación docente. Por ello, consideramos que este estudio puede servir como punto de reflexión para el desarrollo de futuras investigaciones sobre el tema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alencar, E.S., Díaz-Levicoy, D. y Soares, M.R. (2021). Um, dois, três: o conhecimento de professores dos anos iniciais do ensino fundamental sobre o sistema de numeração decimal. *Zetetiké*, 29, 1-16. <https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661779>
- Brasil (2009). *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil. Resolução CNE/CEB nº 5, de 17 de dezembro de 2009. Fixa as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil*. Ministério da Educação.
- Cordi, A. (2018). *Pé de brincadeira: Pré-escola 4 a 5 anos e 11 meses*. Aprende Brasil.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra Modelación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M.A. Montes, D. Escudero-Ávila y E.F. Medrano (Eds.), *Un Marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 57-72). Universidad de Huelva.
- Marconi, M.A. y Lakatos, E.M. (2003). *Fundamentos da Metodologia Científica*. Atlas.
- Montes, M.A., Contreras, L.C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). SEIEM.
- Moriel Junior, J. G. (2021). Conhecimento Especializado de Professor de Matemática (MTSK) na Web of Science até 2020. *Zetetiké*, 29, 1-18. <https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8660030>
- Muñoz-Catalán, M.C., Joglar-Prieto, N., Ramírez, M. y Codes, M. (2022). El modelo MTSK desde la perspectiva del profesor de Educación Infantil: foco en el dominio matemático. En J.

- Carrillo, M.A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* (pp. 235-250). Dykinson.
- Pinto, A. (2018) *Cadê? Achou!: Educar, cuidar e brincar na ação pedagógica da creche*. Editora Positivo.
- Policastro, M.S., Almeida, A.R. y Ribeiro, M. (2017). Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa. *Espaço Plural*, 18(36), 123-154.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15(2), 4-14. <https://journals.sagepub.com/doi/10.3102/0013189X015002004>

SPECIALIZED KNOWLEDGE FOR TEACHING STATISTICS IN BRAZILIAN DIDACTIC MANUALS FOR EARLY CHILDHOOD EDUCATION

Abstract

This chapter shows an excerpt from a dissertation, in which we present the revealed data on knowledge to teach statistics. Thus, our aim is to present what are the specialized knowledge to teach statistics revealed in Brazilian didactic manuals for Early Childhood Education. The research is documentary. In this chapter we present the categories that showed the teaching of graphics. We consider that the revealed knowledge can help in the development of other training materials, bearing in mind that that character the knowledge of the mathematical object, as well as its specificities to teach it.

Keywords: Child Education, statistical education, teacher training.

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR ESTATÍSTICA EM MANUAIS DIDÁTICOS BRASILEIROS NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Resumo

Este capítulo mostra um trecho de uma dissertação, na qual apresentamos os dados revelados sobre o conhecimento para ensinar estatística. Assim, nosso objetivo é apresentar quais são os conhecimentos especializados para se ensinar estatísticas reveladas em manuais didáticos brasileiros destinados à Educação Infantil. A pesquisa é de caráter documental. Nesse capítulo apresentamos as categorias que evidenciavam o ensino de gráficos. Consideramos que os conhecimentos revelados podem ajudar no desenvolvimento de outros materiais formativos, tendo em vista que esse caráter o conhecimento do objeto matemático, assim como de suas especificidades para ensiná-lo.

Palavras-chave: Educação Infantil, educação estatística, formação de professores.

Ana Paula Bolsan Sagrilo

Secretaria Municipal de Educación de la Prefeitura de Santiago, RS, Brasil

anapaulabsagrilo@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8053-7611>

Resumen curricular. Maestría en enseñanza de Ciências y Matemáticas por la institución de la Universidad Federal de la Grand Dourados-UFGD (2023). Licenciada en Pedagogía por la Universidad Federal de la Grand Dourados-UFGD (2018). Participo del Programa Institucional Voluntário de Iniciación Científica- PIVIC/UFGD (2015-2016) e do Programa Institucional de las Bolsas de Iniciación Científica PIBIC/UFGD (2016-2017). Actualmente es docente en la Secretária Municipal de Educacación de la Prefeitura de Santiago - RS – Brasil.

Edvonete Souza de Alencar

Universidad de Brasília - Brasil

edvonete.alencar@unb.br

<https://orcid.org/0000-0002-5813-8702>

Resumen curricular. Postdoctora en Educación por la Universidad de Sevilla (2024). Doctora en Educación Matemática por la PUC-SP (2016). Maestría en Educación Matemática por la Universidad Bandeirante de São Paulo (2012), licenciada en Pedagogía por la Universidad Braz Cubas (2005) y en Matemáticas por la Universidad Metropolitana de Santos (2013). Actualmente es profesora adjunta (Nivel III) del Magisterio Superior en la Universidad de Brasilia -Facultad de Educación (2024).

SKEW THE SCRIPT: A STUDY OF HOW TEACHERS USE A RELEVANT AND ELECTRONIC STATISTICS CURRICULUM IN THE U.S.

Travis Weiland

Anita Sundrani

SUMMARY

In this chapter we present a qualitative analysis of a statistics curriculum, Skew the Script which provides “free, nonpartisan, relevant math lessons that...1. Boost math engagement and achievement among students from underserved backgrounds 2. Prepare all students to think critically as citizens.” To begin to get a sense of how high school teachers who teach AP statistics use this novel curriculum we surveyed and interviewed 16 teachers who use the curriculum to investigate the following research questions: 1) Why do AP Statistics teachers use Skew the Script in their teaching?; 2) How does the official curriculum influence AP statistics teacher's use of Skew the Script instructional materials in their operational curriculum?; 3) How do AP statistics teachers use the Skew the Script instructional materials for their operational curriculum? We found that teachers chose to use the Skew the Script curriculum because it presented relevant examples of statistics in practice. Teachers mostly used the curriculum as a supplement along with other curricular resources rather than as the main curriculum. Additionally, there is some evidence that the pandemic accelerated teachers use of electronic curriculum like Skew the Script because teachers had to teach virtually and needed access to high quality electronic curricular resources rapidly. Though our sample was small and convenient it seems like curriculum that aim to be relevant for students and are made freely available electronically hold promise to improve statistics education in secondary school settings.

Keywords: Relevant statistics, textbooks, electronic texts, open educational resources.

Como citar: Weiland, T. y Sundrani, A. (2024). Skew the script: a study of how teachers use a relevant and electronic statistics curriculum in the U.S. En D. Díaz-Levicoy y A. Salcedo (Eds.), *Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística* (pp. 321-341). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

INTRODUCTION

Statistics has increasingly become an important topic for students to experience in the K-12 curriculum as the data literacy demands of citizenship in today's information age have increased. A prime example of this need was put on display during the pandemic when a wide range of data visualizations containing complex measurements proliferated the media in an attempt to inform the public of the impact and danger of COVID-19 (Ancker, 2020; da Silva et al., 2021; Engledowl & Weiland, 2021; Lewis, 2021; Radinsky & Tabak, 2022). In spite of this demand, we struggle to get school mathematics teachers to engage in teaching the statistics content of their state-mandated standards. In the context of the U.S., statistics has been a content strand in the school mathematics curriculum for decades (Scheaffer & Jacobbe, 2014). However, teachers still report feeling ill prepared to teach the statistics content they are expected to cover (Lovett & Lee, 2017, 2019). Additionally, as teaching in the U.S. is increasingly driven by high stakes standardized assessment, a common reason we have heard teachers report not spending time on the statistics standards is because they do not typically show up in items on those assessments.

One bright spot for statistics in the K-12 curriculum is the Advanced Placement Statistics Course, which is offered in high schools across the U.S. The course is taken by high school students and is designed to be representative of a college introduction to statistics course curriculum. Colleges and Universities will give high school students college credit for taking the course in high school if their score on the final exam in the course reaches a benchmark, depending on the selectivity of the institution. It was first taught in the 1996-1997 school year with approximately 7500 students taking the exam (Franklin et al., 2011). In 2023, 242,929 students took the AP Statistics exam (The Albert Team, 2024). As a note, though this is an impressive number, it is a small proportion of the approximately 17 million students in enrolled in high school that year (United States Census Bureau, 2023).

The learning goals of the course are described as:

- Selecting methods for collecting or analyzing data
- Describing patterns, trends, associations, and relationships in data
- Using probability and simulation to describe probability distributions and define uncertainty in statistical inference

- Using statistical reasoning to draw appropriate conclusions and justify claims (The College Board, 2024)

These objectives align well with the typical college level introduction to statistics course (Franklin et al., 2011), though it does not fully align with recommendations by the American Statistical Association for college level introduction to statistics courses (GAISE College Report ASA Revision Committee, 2016). There is a wide range of enactments of AP Statistics as well. For example, according to Lee and Harrison (2021) from a national survey they conducted of AP Statistics teachers in the U.S. in 2018,

A typical student in these classrooms spends over twice as much time working in groups (mean = 27%, SD= 14%) as they do working individually (mean=12%, SD=8%), not including time taking assessments (mean=12%, SD=5%), which is likely done individually. Teachers report that students typically spend approximately the same amount of time together as a whole class (mean=38%, SD=16%) as they do working in groups and individually combined (p. 323)

These results show there is a wide range of ways that instruction is enacted in AP Statistics classrooms across the U.S. The size of these classes is also smaller than other mathematics courses with the typical AP Statistics class consisting of students numbering in the low 20s (mean=22.5, median=24; Lee & Harrison, 2021).

The AP Statistics course is one of the few opportunities for students to engage in learning advanced statistical ideas in the K-12 curriculum. However, it is not clear the course supports students in being critically data literate for engaging with the needs of being a critical citizen in today's day and age as described by scholars (Louie, 2022; Nicholson et al., 2018; Weiland, 2017). For example, there is no mention of preparing students to be critical consumers of data in popular media in the AP statistics curriculum. Furthermore, in a national survey of AP Statistics teachers 43% reported spending little time on the topic and only 13% reporting spending a lot of time on the topic (Lee & Harrison, 2021). There seems to be a mismatch between the learning goals of the AP Statistics curriculum and the data literacy demands of today's information age societies.

In this chapter we present a curriculum analysis of a statistics curriculum, *Skew the Script* (Skew the Script, 2024), that attempts to address the mismatch between the AP Statistics curriculum and the demands of citizenship by providing “free, nonpartisan, relevant math lessons that 1. Boost math engagement and achievement among students from underserved backgrounds 2. Prepare all students to think critically as citizens (Skew the Script, 2024)” The curriculum is made freely available electronically for anyone to use. To begin to get a sense of how AP statistics

teachers use this novel curriculum we surveyed and interviewed 16 teachers who use the curriculum to investigate the following research questions:

- 1) Why do AP Statistics teachers use Skew the Script in their teaching?
- 2) How does the official curriculum influence AP statistics teacher's use of Skew the Script instructional materials in their operational curriculum?
- 3) How do AP statistics teachers use the Skew the Script instructional materials for their operational curriculum?

BACKGROUND

To provide some background and situate our study in the literature we will start by discussing Remillard and Heck's (2014) empirically derived framework on conceptualizing the curriculum enactment process. We will use that framework to then situate other areas of research relevant to our study, namely literature around electronic curriculum and statistics and probability textbooks. We then provide some background on the specific planned curriculum, Skew the Script, which is the focus on our study.

Conceptualizing the Curriculum Enactment Process

Curriculum enactment is a complex set of interwoven components that involves state, district, and school level actors leading to instruction in the classroom. While teaching directly links to a curriculum and lesson plan, there are several elements that influence what that curriculum looks like and how it is interpreted by the teacher. Remillard and Heck (2014) conceptualize this curriculum enactment process from beginning to end (see Figure 1). Notably, curriculum enactment consists of both official and operational curriculum.

Official curriculum impacts instruction through state and local level policies, including curricular aims and objectives, designated curriculum, and content of consequential assessments. Curricular aims and objectives are often represented through state-adopted curricular standards. These standards then dictate what designated curriculum is available to teachers through approved materials, such as textbooks, pacing calendars, and set curricular packages. Content of consequential assessments, or high-stakes tests, are both influenced by curricular aims and objectives and also act on them as they are used to track student learning and to evaluate teachers. Each aspect of the official curriculum is the result of outside influences, including but not limited

to legislative policies, education research, and other education innovations (Remillard & Heck, 2014).

The official curriculum then affects the *operational curriculum*, which teachers are responsible for. The operational curriculum is what happens in the classroom, beginning with the teacher-intended curriculum (Remillard & Heck, 2014). This operationalized form of curriculum may or may not look like the designated curriculum as it is affected by a myriad of factors, such as teacher beliefs about schooling, perceptions of students' abilities, content knowledge, and pedagogical knowledge (Remillard & Heck, 2014; Shavelson & Stern, 1981). The curriculum is further altered as teachers enact the curriculum due to an additional set of factors that impact instruction in the moment and thereby shape student outcomes. The operational curriculum is also a cyclical process, with each component affecting the other (Remillard & Heck, 2014).

Figure 1

Copy of Model of Curriculum Enactment Process (Remillard & Heck, 2014)

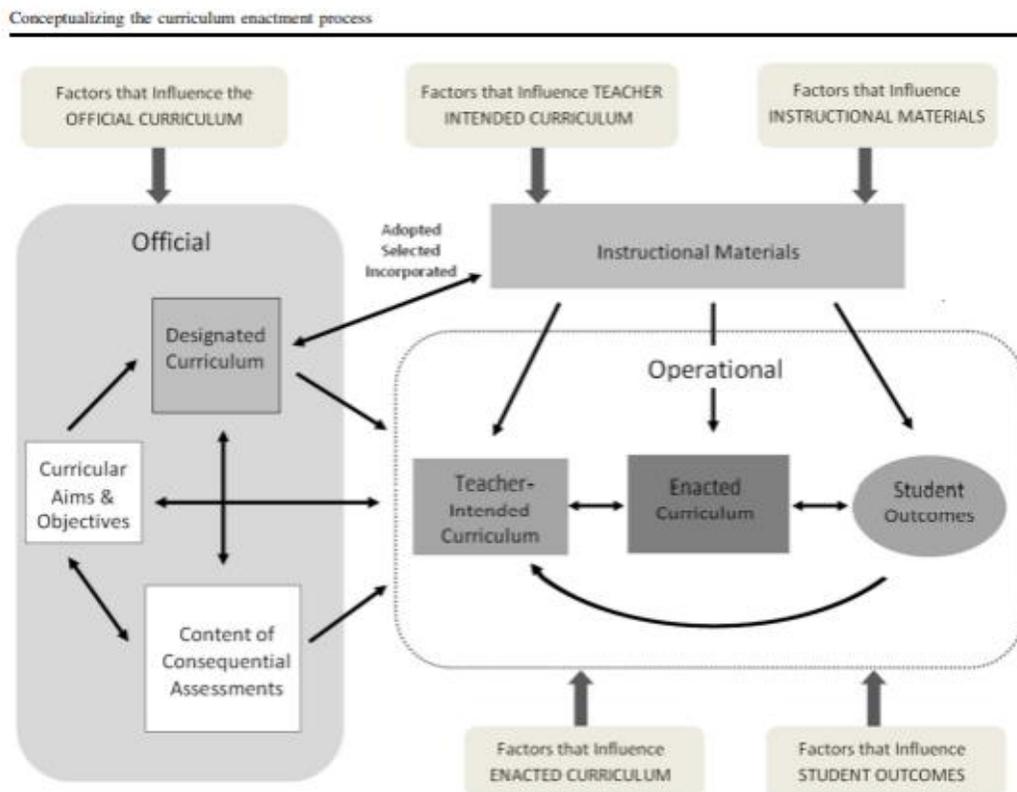


Fig. 1 Visual model of the curriculum policy, design, and enactment system

Electronic curriculum

Historically, teachers based in the United States have relied on textbooks to serve as the main curriculum for their instruction. The process of textbook selection generally started with commercial publishers, such as Pearson and McGraw Hill. These decentralized textbook publishers created textbooks for educator and student use, which were then presented to state-level education board representatives. These representatives would approve a set of textbooks and then districts were able to select a textbook for each course through a committee or some other approval metric (Gewertz, 2015). However, the curriculum landscape has significantly shifted in the past decade, as teachers increasingly use online spaces to plan for instruction. Teachers' rationales and needs for frequenting these online spaces are varied and often connect back to what is and is not provided through their school or district curriculum. A 2019 RAND Corporation survey of a nationally-representative sample of approximately 6000 teachers called the American Instructional Resources Survey (AIRS) showed that 88% of teachers consult online sources as they are planning for instruction, including Google and websites like Pinterest, Facebook, and Teachers Pay Teachers (Tosh et al., 2020). Some of these digital resources are standalone lesson plans offered by individual teachers, whereas others are technological tools, project ideas, or cohesive curricula. Some of the digital curricular resources that teachers locate reside behind a paywall (e.g., Teachers Pay Teachers), while others are part of the public domain (e.g., open education resources).

Electronic curricula are a subset of digital curricular resources and are available to educators through numerous outlets. These sources consist of paid professional platforms (e.g., Illustrative Mathematics and Eureka Math), teacher-created curricula (e.g., Teachers Pay Teachers); e-textbooks (e.g., CPM ebook), and free curricula (e.g., district websites and Skew the Script). It is important not to confuse electronic curricula with the larger set of digital curricular resources, which may include content associated with a curriculum, but do not necessarily need to cover the entire scope of a course (Pepin et al., 2017). Electronic curricula have been studied to understand how widespread their use is amongst mathematics educators (Kaufman et al., 2017), and researchers have done work around the quality and use of these cohesive electronic mathematics curricula (Choppin, 2016; Leung et al., 2023).

Statistics and Probability Textbooks

Electronic statistics textbooks have been around for decades (Symanzik & Vukasinovic, 2002). For example, ACTIVSTATS, created by a statistician at Cornell University Paul Velleman, was widely available on CD in the late 90s and early 2000s. However, there has not been educational research done on the use of these curricula in teaching statistics that we have been able to find. Unsurprisingly, there has also been little study of statistics and probability textbooks in general at the K-12 level. Also, until recently there have been few electronic statistics curricula specifically for K-12 audiences. The proliferation of data science has started to change that with curriculum like Introduction to Data Science (Gould et al., n.d.), youcubed's Data Science Curriculum (youcubed, n.d.), or Bootstrap: Data Science (Bootstrap Community, n.d.), all of which contain lessons on statistics.

Traditional print textbooks have received more consideration in educational research but only minimally. At the secondary level Tran and Tarr (Tran, 2013; Tran & Tarr, 2017) looked at the learning trajectories related to bivariate data in a single high school mathematics textbook and found that texts typically did not align with hypothetical learning trajectories. Additionally, Weiland (2019) investigated the contexts presented in high school textbooks finding most were trivial and fictitious. He also found that most datasets were small and included no more than two variables. In a more recent study, Weiland (2023) found that students were predominantly positioned to carry out algorithmic tasks or proceed by statistics lessons in high school textbooks with no opportunities to collect data or ask their own questions of data. He concluded the texts do not present a view of statistics consistent with the discipline. These findings show that from what little work has been done studying the statistics content of secondary school mathematics texts in the U.S. we are finding that the texts are not well aligned with research from statistics education.

Skew the Script

This study focuses on Skew the Script, a non-profit company that creates AP statistics lessons that are relevant to students, usable for high school teachers teaching AP statistics, and nonpartisan in nature. These lessons are meant to expand the AP curriculum to include real world scenarios and topics that students can relate to, such as gerrymandering, sports, and medicine, among others. The

lessons from Skew the Script cover most of the material in the AP statistics curriculum and typically include introductory videos, datasets, slide decks, and student worksheets, so teachers do not need to supplement from outside sources for the lessons. The underlying goals Skew the Script states on their website is that their lessons will (1) boost math engagement and achievement among students from underserved backgrounds and (2) prepare all students to think critically as citizens.

METHODS

This study is a part of an exploratory observational study to begin to understand how teachers are using a recently created statistics curriculum that is freely available online. In the sections that follow we describe the methods we employed to carry out the study and our participants.

Participants

To recruit participants, the creator of Skew the Script sent a recruitment email through his email listserv of users of the curriculum in June of 2022. Participants were offered a \$200 Amazon gift card for their time. We had 14 people consent to participate. One participant dropped out after only completing an initial survey and another dropped out after an initial interview. We include data from the 13 participants who completed all of the primary data collection components we analyzed for this study. Of our 13 participants 10 identified as female and three as male. Additionally, nine identified as white, two as white non-Hispanic, one as white Latinx, and one as Caucasian Hispanic. 11 of the participants reported teaching at public schools and two at private schools. Eight participants taught in urban schools, four in suburban, and one in a rural school. The participants had a mean of 16.8 years of teaching experience and had typically used the Skew the script curriculum for teaching AP statistics for about 3 years (which is approximately how long it has existed at the time of this study).

Data Collection/Sources

We had one primary data source for this study and two secondary. Our primary data source was a 60-minute semi-structured interview conducted at the beginning of the 2022-2023 academic year. The goal of the interview was to gain insights into the context for the teachers' community and school environments; any state, district, and/or school-level curricular policies; their lesson planning process; how they found the Skew the Script website; and some of the ways the teachers

use Skew the Script when planning. The interviews took place virtually through a secure Microsoft Teams account through the University of Houston, were audio recorded, and auto transcribed. One secondary source of data was a demographics survey used to collect basic background information on teachers and their use of the Skew the Script curriculum. Our other secondary data source was a second semi-structured interview conducted at the end of the 2022-2023 academic year that while focused on student engagement and the relevance of the contexts, did provide some insights into the research questions of this study in responses.

Data Analysis

To analyze our primary data source, we began by reviewing transcripts from participant interviews done at the beginning of the 2022-2023 school year to identify sections that pertained to our specific research questions in this study. We then qualitatively coded the quotes pertinent to each research question across each participant to look for themes in their responses (Braun & Clarke, 2006). The post interview transcripts were analyzed in a similar way but yielded few quotes due to the questions asked. In the findings below we report on the themes that emerged from the qualitative analysis of the data related to our research questions.

To analyze the demographic survey we used basic descriptive statistics to summarize information from questions that provided insights into how the participants used the curriculum with questions focused on what aspects of the curricular resources they used and what lessons they engaged with.

Why do AP Statistics Teachers Use Skew the Script?

In this section we present findings in relation to answer RQ1: Why do AP Statistics teachers use Skew the Script in their teaching? The most common rationale we heard from teachers was that they used Skew the Script because it was relevant, current, and/or interesting for students. All but two teachers made some statement related to relevance of the curriculum. For example, one teacher said,

I'm not creative, so I need like somewhere to look where I can find ideas that the students are gonna click with, and they're gonna feel that either they're super interesting or super important to their community. So when I discovered Skew the Script I was like, this is it. This is exactly what I was looking for. These ideas are fantastic. These are engaging, and that's when I started to use that as a primary resource.

Another teacher said “The kids really love that real life things they could see in the news. They really really like that. And I like it, too, like like this is how I can use stats.” This rationale emerging as a pattern is not surprising given that the number one mission of the curriculum states in large bold letters on their website is “Make Math What it Already is: Relevant.” Teachers often pointed out that the textbook curricula they were provided by their districts contained either fake, old, or as one teacher described it, vanilla (ordinary, unexciting, boring) data.

Another theme was that it was useful. For example, a teacher said,

Everything was done for me already. Seriously, You know, it was, it was high quality. He had all the worksheets available ... you know, the the answer keys were there. It was so flipping organized. I really felt like I had just discovered gold.

Related to the usefulness was that this became available during the pandemic when a lot of teachers had to shift to teaching online; Skew the Script includes videos related to the topics and all the content is available online. For example, one teacher said,

And during COVID, I had one class my my, my stats class was actually completely online. So I used a lot of Dash’s stuff for because two of my kids were in China and we were asking them to come to school at, you know, 1:00 in the morning. And so I didn't think that was appropriate. So I it took my school a little longer to figure that out. So I whenever we had afternoon classes for my Chinese kids, I did asynchronous and I used all of Dash's material for those classes. And that's where I really got introduced to his stuff. And the kids just loved it and I loved it, and so I started incorporating it into my regular class.

Another teacher said,

And we were remote, and so being able to use Desmos and things, and for things that I would have done in class like a card sort like today in class, we did a card sort mapping up distributions and for 2 or 3 years. I did that digitally.

The usefulness of the Desmos activities was specifically mentioned by four teachers. Another theme related to useful was that the teachers found it to be high-quality. “They're just great. It it's just all very high-quality work”. Another teacher said, “I feel like he does a really good job of the formulas and then using them, but then taking what he's done with the formulas and the context, then they just keep moving that way into into more problems, more applications”.

How does the Official Curriculum Influence the Enacted Curriculum?

In this section we present findings in relation to answer RQ2: How does the official curriculum influence AP statistics teacher's use of Skew the Script instructional materials in their operational

curriculum? Overall, the main theme that emerged from the teachers is that the AP curriculum is the main driver of what they teach, as it is the main official curriculum for all AP courses. This curriculum comes from the College Board, not from any state or federal policy or standards. Seven of the teachers explicitly mentioned that the AP curriculum is one of the reasons they chose Skew the Script materials because they are aligned, which relates back to the first research question. Additionally, most teachers said that their school or district administrators were ambivalent towards how teachers taught AP statistics. These findings are important in the current context of education in the U.S. Policy makers in certain states have restricted the issues that can be taught in the classroom, in particular ones that might be considered left-leaning in political orientation, especially topics around race, racism, sex, gender, sexuality, climate change, among others. Several states have eliminated such topics from approved textbooks or in extreme cases outlawed their teaching in public school classrooms. For example, the state of Florida enacted a law nicknamed “Don’t say gay” that imposes restrictions on classroom instruction about gender identity and sexual orientation.

How do Teachers Enact their Curriculum with Skew the Script?

In this section we present findings in relation to answer RQ3: How do AP statistics teachers use the Skew the Script instructional materials for their operational curriculum? We break this section into multiple subsections to help organize the findings as there are many details that teachers provided on how they enacted the curriculum in their classrooms.

Resources Used

Skew the Script provides a wide range of resources and the teachers we interviewed reported varied use of those resources. The handouts in particular were a resource that almost all of the teachers reported using, see Table 1. The Desmos activities were the next most commonly used. This may be partially attributed to teaching conditions due to the pandemic as discussed in our findings for our first research question. All the resources were used by at least some of the teachers pointing to the overall usefulness of the resources provided. This is important as these resources go well beyond what is typically provided in a standard commercial textbook today. However, more and more commercial publishers in the U.S. are building online class management platforms where they have included such features, but have restricted access through paywalls.

Table 1

Resources teachers reported using

Slides	Handouts	Handout Keys	Desmos Activities	Videos	Video Reflection Questions
4 (31%)	11 (85%)	7 (54%)	9 (69%)	7 (54%)	4 (31%)

Skew the Script in Planning

The participants in this study pointed to a number of ways they use Skew the Script in their lesson planning process, though this differed by teachers who used Skew the Script as their main curriculum versus as a supplement. 10 of the 13 teachers reported using Skew the Script as a curriculum supplement with those teachers reporting using either Stats Medic or a commercial textbook or both as their primary curriculums. Teachers provided a wide range of rationales for supplementing with Skew the Script from wanting a textbook because it is a college level course and that is what they use there to other curriculum are more open-ended or problem based to filling in gaps or for review. The main common theme was that they saw Skew the Script as not quite sufficient to do everything they needed. This is not an unusual result as many teachers report using supplementary materials as they search for the best resources to support their students under the particular constraints of their teaching context (Banilower et al., 2018).

In contrast, three teachers expressed in their interviews that they used Skew the Script as their main curriculum. Through their responses, it became clear that this was not necessarily the only resource they used to plan instruction, but often the first resource they consulted. The use of Skew the Script curriculum was supplemented either by other sources like Stats Medic and AP Classroom or by lesson plans and activities these teachers had already created over the course of their teaching careers. These teachers began their planning process with an alignment guide, whether through Skew the Script or an AP resource to plan out the full year. However, from here, the three teachers spoke to different strategies to plan out their day-to-day lessons. Chloe places the most emphasis on using the guided notes available on Skew the Script to create a notes packet for students to use for each unit of instruction. She elaborated by saying that she views all of the lessons on Skew the Script and then supplements using her school's textbook. She added that she only removes lessons from her instructional plan if she feels her students will not react well to the topic of focus in the lesson. Similarly, Kathryn chooses lessons from Skew the Script based on her students' interests, which she indicates that Skew the Script is well-aligned with. Because she has been teaching for a number of years, Kathryn has amassed many resources for AP Statistics, but

opts to use Skew the Script as her main curriculum, where she assigns Skew the Script videos for homework, so that her students are ready to discuss in class the next day. Lastly, Mark's use of Skew the Script as a main driver for his instruction falls somewhere in between Chloe and Kathryn's approaches. He referenced the alignment between College Board's course exam description and Skew the Script. He then pointed to the PowerPoints as a key resource in his day-to-day planning, opting to discuss the topics in class with students and keeping the videos in reserve for students who are absent from class.

Of the 10 teachers who referenced Skew the Script as a supplemental material in their instruction, nine of the teachers indicated that they utilized Skew the Script lessons as real-world examples or applications of the topic at hand. A similarity amongst the responses was the desire to find a place for Skew the Script lessons if the topic was relevant or interesting. Diana gave additional insight into her process,

How can we make this relatable, and how can we make this something that is super important to students? . . . How do we get them primed? How do we debrief? and then how do we engage in the material afterward?

While two teachers specifically referenced using Skew the Script lessons as introductions to statistics units, others said they made the decision of lesson placement on a case-by-case basis, such as needing more practice with students, using lessons as applications after teaching certain concepts, and making connections with certain topics within units of instruction.

Typical Day of Instruction

To better understand the participants' use of Skew the Script within the confines of an AP Statistics classroom, we asked the teachers how they would describe a typical day of instruction. All but one of the teachers spoke to emphasizing discussion in their AP Statistics classroom. Kathryn explained,

That way they can talk about it to one another. They can talk about it with me. We're finding more and more, you know, math class - when I went through it, and probably when you went through, it was very quiet. You listened to the teacher, we did our work, and we were done. Now it's more collaborative. We want them to talk to one another. I love it when I hear an argument that is the best thing in the world because they're standing up for what they think is right or the way they think it should be done, so it's always fun. It's not a real argument, but they're discussing which is correct.

All but one participant all expressed a desire for their students to talk with one another to better understand the content and to ask questions when they need additional instruction. This pattern seems to support Lee & Harrison's (2021) findings that AP statistics teachers require students to work together (91% of respondents) and encourage students to discover ideas on their own (67%). Many of the teachers (69%) in this study also spoke to the importance of taking notes, though they varied in their approach to notetaking. The most common response (46%) was that notetaking is a common occurrence during instruction, either as a guided activity with fill-in-the-blank notes pages or as an individual responsibility while the teacher lectures. Those who deviated from this approach (23%) expected students to take notes, but to do so on their own. Similarly, there were differences in the participants' responses about homework. Just over half of the teachers spoke about homework as either part of a flipped classroom or a launchpad to discuss a statistics concept further in class before moving onto the next topic. Additionally, six of the 13 teachers explicitly named Stats Medic as an instructional resource they often include in their day-to-day instruction because of its inquiry-based lessons and activities.

Three of the 13 participants explained that Skew the Script was their main curriculum. Of those three, two participants situated their answers to this question around their use of Skew the Script. Chloe and Kathryn both stated that they assigned Skew the Script videos as homework and then discussed the topic with the whole class the next day. From there, the teachers would transition to an activity or practice problems. The third teacher, Mark, instead uses Skew the Script as a launch for the beginning of each unit to spur discussion in class. However, his main focus is on the AP Statistics exam, so after going over the Skew the Script slides on a topic, he transitions to assignments and instruction that centers on AP preparation. Aside from Mark, no other teachers who rely on Skew the Script as their main curriculum mentioned the AP exam as part of their day-to-day instruction.

In contrast, the majority of the teachers who referenced using Skew the Script as a supplementary tool (80%) mentioned AP exam preparation as part of their daily instruction. Four of these teachers made connections to the AP exam through their warm ups at the beginning of class, indicating that these warm ups were multiple choice questions drawn from previous AP exams. The other three teachers stated that they introduced big ideas and learning objectives set forth by the College Board to their students and came back to these at the end of each class to ensure students made connections back to AP Statistics goals. This supports Lee & Harrison's

(2021) finding that teachers spend a substantial amount of time ensuring that students are able to answer questions similar to those on the AP statistics exam (97%). Another similarity across this set of teachers was the overall setup of daily instruction, beginning with a warm up, followed by notetaking and discussion, ending with a transition to independent or group worktime. Lastly, three teachers placed an emphasis on reading graphs and other data visualizations.

CONCLUSION

The findings of this study indicate there is promise in creating open educational resources that contain materials investigating issue relevant to students for statistics education. The teachers in our sample almost all reported choosing to use the Skew the Script curriculum because of its relevance for students. This curriculum also helps address the long-standing calls in statistics education to teach statistics using real data situated in real contexts. As the pandemic forced many teachers to teach online more and more teachers seem to be both comfortable teaching online and see some value in it such that OER could potentially grow in usefulness for teachers. This is a space that we would encourage statistics educators to continue to explore as many questions are left unanswered by this preliminary work. For example, how does access to technology impact teachers use of such materials? How can we create and market high quality OER that are research based and timely for teachers to use? How can we support teachers in creating such resources and sharing them? What do teachers learn from using such resources? Do teachers interact with OER differently then they do with traditional paper based texts? Do students learn differently with OER differently then they do with traditional paper based texts?

Another advantage to creating curriculum that are electronic is the ability to have other electronic resources embedded into the texts such as Desmos activities. This is by no means unique to Skew the Script as other statistics texts have been linking to online applets for decades with the Rossman and Chance applets being the most popular in statistics education in the U.S. However, much of this has occurred in post-secondary texts. As we move more and more to creating experiences for students to engage in real datasets, though datasets will need to be digitally available for analysis using digital tools. Again this is not new in statistics education but we have not seen it much in the secondary school environment where it is desperately need. This of course raises the issue of equitable access to technology for engaging in such learning experiences that require students to use a computer. Even in the U.S. many schools do not have computers for every

students or even classroom sets to check out and typically these schools are in less affluent communities that have been historically marginalized. As OERs become more common it will become important for us to consider how such resources can be used in under resourced setting.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCES

- Ancker, J. (2020). The COVID-19 pandemic and the power of numbers. *Numeracy*, 13(2), 2. <https://doi.org/10.5038/1936-4660.13.2.1358>
- Banilower, E.R., Smith, P.S., Malzahn, K.A., Plumley, C.L., Gordon, E.M., & Hayes, M.L. (2018). *Report of the 2018 NSSME+*. Horizon Research, Inc.
- Bootstrap Community. (n.d.). *Bootstrap: Data Science*. Retrieved May 30, 2024, from <https://www.bootstrapworld.org/materials/data-science/>
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Choppin, J. (2016). Analysis of eight digital curriculum programmes. In M. Bates & Z. Usiskin (Eds.), *Digital Curricula in School Mathematics* (pp. 161-176). Information Age Publishing.
- da Silva, A.S., Barbosa, M.T.S., de Souza Velasque, L., da Silveira Barroso Alves, D., & Magalhães, M.N. (2021). The COVID-19 epidemic in Brazil: How statistics education may contribute to unravel the reality behind the charts. *Educational Studies in Mathematics*, 108(1-2), 269-289. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10112-6>
- Engledowl, C., & Weiland, T. (2021). Data (mis)representation and COVID-19: Leveraging misleading data visualizations for developing statistical literacy across grades 6-16. *Journal of Statistics and Data Science Education*, 29(2), 160-164. <https://doi.org/10.1080/26939169.2021.1915215>
- Franklin, C., Hartlaub, B., Peck, R., Scheaffer, R., Thiel, D., & Tranbarger Freier, K. (2011). AP Statistics: Building bridges between high school and college statistics education. *The American Statistician*, 65(3), 177-182. <https://doi.org/10.1198/tast.2011.09111>
- GAISE College Report ASA Revision Committee (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) College Report 2016*. American Statistical Association.
- Gewertz, C. (2015, February 17). States ceding power over classroom materials. *Education Week*. <https://www.edweek.org/teaching-learning/states-ceding-power-over-classroom-materials/2015/02>
- Gould, R., Machado, S., Johnson, T.A., & Molyneux, J. (n.d.). *Introduction to Data Science Curriculum*. <https://curriculum.idsucla.org/>
- Kaufman, J., Davis, J., Wang, E., Thompson, L., Pane, J., Pfrommer, K., & Harris, M. (2017). *Use of open educational resources in an era of Common Standards: A case study on the use of EngageNY*. RAND Corporation. <https://doi.org/10.7249/rr1773>

- Lee, H.S., & Harrison, T. (2021). Trends in teaching Advanced Placement Statistics: Results from a national survey. *Journal of Statistics and Data Science Education*, 29(3), 317-327. <https://doi.org/10.1080/26939169.2021.1965509>
- Leung, A., Baccaglioni-Frank, A., Bokhove, C., Nagari-Haddif, G., & Yerushalmy, M. (2023). Digital curriculum resources in digital mathematics curriculum: Design features and implementation. In B. Pepin, G. Gueudet & J. Choppin (Eds.), *Handbook of digital resources in mathematics education* (pp. 1-31). Springer.
- Lewis, M.A. (2021). COVID-19 and quantitative literacy: Focusing on probability. *Numeracy*, 14(1), 5. <https://doi.org/10.5038/1936-4660.14.1.1362>
- Louie, J. (2022). *Critical data literacy: Creating a more just world with data* (Workshop on Foundations of Data Science for Students in Grades K-12). National Academy of Sciences Engineering, and Medicine, Board on Science Education, Committee on Science Investigations and Engineering Design for Grades 6-12.
- Lovett, J.N., & Lee, H.S. (2017). New standards require teaching more statistics: Are preservice secondary mathematics teachers ready? *Journal of Teacher Education*, 68(3), 299-311. <https://doi.org/10.1177/0022487117697918>
- Lovett, J.N., & Lee, H.S. (2019). Preservice secondary mathematics teachers' statistical knowledge: A snapshot of strengths and weaknesses. *Journal of Statistics Education*, 26(3), 214-222. <https://doi.org/10.1080/10691898.2018.1496806>
- Nicholson, J., Ridgway, J., & Gal, I. (2018). *Understanding civic statistics: A conceptual framework and its educational applications. A Product of the ProCivicStat Project*. IASE
- Pepin, B., Choppin, J., Ruthven, K., & Sinclair, N. (2017). Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change. *ZDM - Mathematics Education*, 49(5), 645-661. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0879-z>
- Radinsky, J., & Tabak, I. (2022). Data practices during COVID Everyday sensemaking in a high-stakes information. *British Journal of Educational Technology*, 53(5), 1221-1243. <https://doi.org/10.1111/bjet.13252>
- Remillard, J., & Heck, D.J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 46(5), 705-718. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4>
- Scheaffer, R.L., & Jacobbe, T. (2014). Statistics Education in the K-12 Schools of the United States: A Brief History. *Journal of Statistics Education*, 22(2), 1-14.
- Shavelson, R.J., & Stern, P. (1981). Research on teachers' pedagogical thoughts, judgments, decisions, and behavior. *Review of Educational Research*, 51(4), 455-498. <https://doi.org/10.3102/00346543051004455>
- Skew the Script. (2024). *Skew the Script*. <https://skewthescript.org/>
- Symanzik, J., & Vukasinovic, N. (2002). Teaching Statistics with Electronic Textbooks. In W. Härdle & B. Rönz (Eds.), *Compstat. Proceedings in Computational Statistics* (pp. 79-90). Physica. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57489-4_8

- The Albert Team. (2024). *AP® Statistics FAQ: Everything You Need to Know for 2024*. <https://www.albert.io/blog/ap-statistics-faq/>
- The College Board. (2024, May 30). *AP Statistics*. <https://apstudents.collegeboard.org/courses/ap-statistics>
- Tosh, K., Doan, S., Woo, A., & Henry, D. (2020). *Digital instructional materials: What are teachers using and what barriers exist?* RAND Corporation. <https://doi.org/10.7249/rr2575.17>
- Tran, D. (2013). *Learning trajectories related to bivariate data in contemporary high school mathematics textbook series in the United States* [Doctoral Dissertation, University of Missouri, Columbia]. <https://mospace.umsystem.edu/xmlui/handle/10355/44043>
- Tran, D., & Tarr, J.E. (2017). Examination of bivariate data tasks in US high school textbooks through the statistical investigation and cognitive demands frameworks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(1581-1603). <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9851-1>
- UNESCO. (n.d.). *Open Educational Resources (OER)*. Retrieved May 30, 2024, from <https://www.unesco.org/en/open-educational-resources>
- United States Census Bureau. (2023). *2022 CPS October Enrollment Tables*. <https://www.census.gov/data/tables/2022/demo/school-enrollment/2022-cps.html>
- Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 33-47. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9764-5>
- Weiland, T. (2019). The contextualized situations constructed as appropriate for the use of statistics by school mathematics texts. *Statistics Education Research Journal*, 18(2), 18-38.
- Weiland, T. (2023). High school mathematics texts construction of statistics practices. *Frontiers in Education*, 8, 1186522. <https://doi.org/10.3389/educ.2023.1186522>
- youcubed. (n.d.). *Youcubed Data Science HS Curriculum*. Retrieved May 30, 2024, from <https://hsdatascience.youcubed.org/curriculum/>

SESGAR EL GUIÓN: UN ESTUDIO DE CÓMO LOS PROFESORES UTILIZAN UN CURRÍCULO DE ESTADÍSTICA ELECTRÓNICA Y RELEVANTE EN U.S.

Resumen

En este capítulo presentamos un análisis curricular de un plan de estudios de estadística, Skew the Script, que proporciona “lecciones de matemáticas gratuitas, no partidistas y relevantes que...1. Impulsar la participación y el rendimiento en matemáticas entre los estudiantes de entornos desatendidos. 2. Preparar a todos los estudiantes para pensar críticamente como ciudadanos”. Para comenzar a tener una idea de cómo los profesores de estadística AP utilizan este novedoso plan de estudios, encuestamos y entrevistamos a 16 profesores que utilizan el plan de estudios para investigar las siguientes preguntas de investigación: 1) ¿Por qué los profesores de Estadística AP utilizan Skew the Script en su enseñanza?; 2) ¿Cómo influye el plan de estudios oficial en el uso que los profesores de estadística AP hacen de los materiales instructivos de Skew the Script en su plan de estudios operativo?; 3) ¿Cómo utilizan los profesores de estadística AP los materiales instructivos de Skew the Script para su plan de estudios operativo? Descubrimos que los profesores eligieron utilizar el plan de estudios Skew the Script porque presentaba ejemplos relevantes de estadística en la práctica. Los docentes utilizaron principalmente el plan de estudios como complemento junto con otros recursos curriculares, en lugar de como plan de estudios principal. Además, existe cierta evidencia de que la pandemia aceleró el uso por parte de los docentes de currículos electrónicos como Skew the Script porque los docentes tenían que enseñar virtualmente y necesitaban acceso rápido a recursos curriculares electrónicos de alta calidad. Aunque nuestra muestra fue pequeña y conveniente, parece que un plan de estudios que apunta a ser relevante para los estudiantes y está disponible gratuitamente en formato electrónico promete mejorar la educación estadística en el entorno de la escuela secundaria.

Palabras clave: Estadísticas relevantes, libros de texto, textos electrónicos, recursos educativos abiertos.

DESVIRTUAR O GUIÃO: UM ESTUDO SOBRE A FORMA COMO OS PROFESSORES UTILIZAM UM CURRÍCULO DE ESTATÍSTICA ELECTRÓNICO E RELEVANTE NOS EUA

Resumo

Neste capítulo, apresentamos uma análise curricular de um currículo de estatística, Skew the Script, que fornece “lições de matemática gratuitas, apartidárias e relevantes que... 1. impulsionam a participação e os resultados em matemática entre os alunos de meios carenciados. 2. preparam todos os alunos para pensar criticamente como cidadãos”. Para começar a ter uma ideia de como os professores de Estatística da AP utilizam este novo currículo, inquirimos e entrevistámos 16 professores que utilizam o currículo para investigar as seguintes questões de investigação: 1) Porque é que os professores de Estatística da AP utilizam o Skew the Script no seu ensino; 2) Como é que o currículo influencia a utilização do Skew the Script pelos professores de Estatística da AP no seu ensino; 3) Como é que o currículo influencia a utilização do Skew the Script pelos professores de Estatística da AP no seu ensino; e 4) Como é que o currículo influencia a utilização do Skew the Script pelos professores de Estatística da AP no seu ensino? 2) Como é que o currículo oficial influencia a utilização, pelos professores de Estatística da AP, dos materiais de instrução

Skew the Script no seu currículo operacional; 3) Como é que os professores de Estatística da AP utilizam os materiais de instrução Skew the Script no seu currículo operacional? Verificámos que os professores optaram por utilizar o currículo Skew the Script porque este apresentava exemplos relevantes de estatística na prática. Os professores utilizaram o currículo principalmente como um complemento de outros recursos curriculares, e não como o currículo principal. Além disso, há algumas provas de que a pandemia acelerou a utilização pelos professores de currículos electrónicos como o Skew the Script, porque os professores tiveram de ensinar virtualmente e precisavam de acesso rápido a recursos curriculares electrónicos de alta qualidade. Embora a nossa amostra fosse pequena e conveniente, parece que um currículo que pretende ser relevante para os alunos e que está disponível gratuitamente em formato eletrónico promete melhorar o ensino da estatística no ensino secundário.

Palavras-chave: Estatística relevante, manuais escolares, manuais electrónicos, recursos educativos abertos.

Travis Weiland

University of North Carolina Charlotte, Charlotte, U.S.

tweilan1@charlotte.edu

<https://orcid.org/0000-0002-5901-5683>

My career in education began with teaching high school mathematics. While working on a master's degree I took my first courses in statistics, which made me realize not only how little I understood statistics, but that I had been doing a terrible job of teaching those concepts to students for years. It was this realization that motivated me to pursue a PhD in Mathematics Education to investigate the question: How can we improve the statistical education of students in schools? Towards that question, all my work stems from two main principles: that education is transformative and that the goal of public education is democratic equality. More specifically, my research is focused on issues of equity, including the consideration of issues of access, achievement, identity, and power, at their intersection with statistics and data science education.

Anita Sundrani

Northwestern University, Chicago, U.S.

anita.sundrani1@northwestern.edu

<https://orcid.org/0000-0002-1112-9710>

Dr. Anita Sundrani is a Research Associate at the Center for Education Efficacy, Excellence, and Equity situated within the School of Education and Social Policy at Northwestern University, where her current work is focused on the use of digital learning platforms to support mathematics instruction in K-8 classrooms. She earned her doctorate in Curriculum and Instruction from University of Houston. Her dissertation research explored mathematics educators' noticing in online spaces when planning and enacting equity-focused mathematics lessons. Prior to beginning her doctoral studies, Anita was a high school mathematics teacher and a project-based learning coach.

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN MEDIA DE CHILE

Jaime I. García-García
Jaime A. Camaño Meza
Javier Hernández Pino
Elizabeth H. Arredondo

RESUMEN

En este estudio se analizan las tareas propuestas en dos libros de texto de Educación Media de Chile. Para ello, bajo una metodología cualitativa, se realiza un análisis de contenido de las tareas del texto del estudiante y del cuaderno de actividades de cuarto medio. En concreto, se analiza el campo de problema al que pertenece cada tarea, el tipo de contexto utilizado, el soporte de los datos, el uso de tecnología y la forma de trabajo propuesta en la tarea. Los resultados muestran que en los libros de texto chilenos predominan tareas donde se enfatiza la distribución normal como modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real. Además, se observa un predominio de tareas que carecen de un contexto que dé sentido a los datos, el soporte en el que mayormente se presentan los datos es texto escrito, se promueve poco el uso de tecnología y se favorece la forma de trabajo individual. Este estudio muestra el tipo de tareas sobre la distribución normal que se trabajan en las aulas chilenas y servirá como base para ampliar el análisis de libros de texto de Educación Secundaria de otros países. También, se concluye en la necesidad de repensar el tipo de tareas sobre esta distribución propuestas en los libros de texto analizados, con el propósito de enriquecer su enseñanza en cuarto medio en Chile.

Palabras clave: distribución normal, libro de texto, cuaderno de actividades, educación media.

INTRODUCCIÓN

La distribución normal es considerada como la distribución de probabilidad de variable continua más importante en estadística y teoría de probabilidades, debido a sus amplias aplicaciones en inferencia estadística y su rol como modelo probabilístico para fenómenos en diversas disciplinas científicas y sociales. Esta distribución, también conocida como distribución acampanada, de Gauss o gaussiana (Másmela y Serrato, 2009; Stahl, 2006), es esencial para la representación y el análisis de datos empíricos, así como en la aplicación del análisis de varianza y diversos contrastes estadísticos, ya que estos requieren la normalidad de los datos (Batanero et al., 2001).

Según diversos estudios (Stahl, 2006; Tauber, 2001; Caire y Cardoso, 2023; Montgomery y Runger, 2010), la distribución normal proporciona una base sólida para modelar y examinar el comportamiento de fenómenos en campos tan variados como la sociología, la psicología, la biología y la física. El estudio de estos fenómenos revela la importancia de la distribución normal como modelo probabilístico, cuya relevancia merece ser profundizada en el ámbito escolar (Lemus-Cortez y Huincahue, 2019).

En el contexto educativo, la distribución normal suele ser abordada en cursos universitarios de probabilidad e inferencia estadística (Valverde, 2017). No obstante, en algunos países, como Chile, México y España, su estudio también se incluye en el currículo de educación media (MINEDUC, 2019; UNAM, 2016; MEC, 2015).

Por otro lado, el libro de texto se destaca como un recurso pedagógico fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Alkhateeb, 2019; Gea et al., 2013). Serradó y Azcárate (2003) argumentan que el libro de texto refleja, en cierto grado, la formación matemática que se implementa en las aulas.

Los libros de texto también proporcionan a los profesores información sobre los objetivos y las estrategias metodológicas que pueden emplear en sus clases, por lo que son considerados como un apoyo esencial en la preparación de las clases (Cordero y Flores, 2007) y como un recurso básico en la construcción de conocimiento de contenidos matemáticos (Fernández y Mejía, 2010). En ese sentido, analizar el libro de texto permite comprender cómo se planifican y resuelven los problemas matemáticos en el aula (Zhu y Fan, 2006). Bajo estas perspectivas, consideramos que el análisis de libros de texto es una práctica indispensable en el ámbito educativo, ya que estos organizan los contenidos disciplinares a trabajar en el aula, y presentan tanto actividades como sugerencias pedagógicas que pueden ser útiles para la comprensión de cada tema.

Dada la importancia de la distribución normal como modelo probabilístico, así como del uso del libro de texto, nos planteamos, como objetivo de este estudio, analizar las tareas propuestas sobre esta distribución en una muestra de dos libros de texto de Educación Media de Chile. En concreto, se analiza el campo de problemas en el que se inserta cada tarea, el tipo de contexto utilizado, el uso o no de tecnología, el soporte de los datos y la forma en que los estudiantes deben trabajar la tarea. Se espera que los resultados del análisis permitan plantear sugerencias para la mejora de la enseñanza de la distribución normal en el aula de clases.

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN EL CURRÍCULO CHILENO DE EDUCACIÓN MEDIA

La enseñanza de la Estadística ha tomado un lugar importante dentro del currículo escolar de diferentes países (García-García, 2021). En Chile, el Ministerio de Educación (MINEDUC), en las Bases Curriculares de Educación Media (MINEDUC, 2015; MINEDUC, 2019), establece los Objetivos de Aprendizaje (OA) que se espera que logren los estudiantes en cada asignatura por grado escolar. En el caso de las asignaturas de matemáticas, los OA integran conocimientos, habilidades y actitudes para que los estudiantes logren un desarrollo integral, en concordancia con las habilidades para el siglo XXI, es decir, que les permitan enfrentarse a la sociedad del conocimiento.

En relación con la distribución normal en currículo chileno de Educación Media, esta se presenta formalmente en el Programa de Estudio de 4° medio (MINEDUC, 2021), dentro de la “Unidad 1: La toma de decisiones en situaciones de incerteza”, asociada con el OA 2: “Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal”, y el OA c: “Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico” (p. 32). Lo anterior resalta la importancia del estudio de la distribución normal para la toma de decisiones frente a situaciones de incerteza que puedan modelarse por medio de este modelo probabilístico.

Además, en dicho programa de estudio se proporcionan diversas herramientas que el profesor puede utilizar en el aula, tales como orientaciones didácticas, actividades de aprendizaje y de evaluación, indicadores de evaluación, recursos didácticos y proyectos interdisciplinarios.

ALGUNAS INVESTIGACIONES SOBRE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y LIBROS DE TEXTO

En esta sección sintetizamos algunas investigaciones que tienen relación con el análisis de la distribución normal en libros de texto, tema central de este estudio.

Tauber (2001) realiza un estudio epistémico de la distribución normal a partir del análisis de once libros de texto universitarios, con el propósito de identificar los elementos del significado más prototípicos que aparecen, tanto intensivos como extensivos, actuativos, validativos y ostensivos, y con ello, definir el significado institucional de referencia, es decir, los campos de problemas, elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos asociados a la normal.

Por su parte, Valverde (2017) considera los elementos del significado institucional de referencia de la normal propuestos por Tauber (2001) y analiza su presencia, además del tipo de contexto, en las actividades dos libros de texto españoles de bachillerato. Entre sus resultados se evidencia que solo un libro de texto presenta actividades de cuatro campos de problema asociados a la normal, a diferencia del otro libro que propone solo dos de ellos. En relación con los conceptos, en general, estos son adecuados con el nivel escolar, pero algunos son confusos. Además, predominan los procedimientos de cálculo de probabilidades y tipificación, y los argumentos basados en la utilización de casos particulares y representaciones gráficas. En cuanto al tipo de contexto, predomina el laboral en ambos libros.

En el contexto chileno se identificaron tres investigaciones. Donoso y Sánchez (2020) analizan las representaciones semióticas que se presentan en las actividades sobre la distribución normal en dos libros de texto chilenos de educación media. Sus resultados revelan que se hace uso de tres registros de representación: algebraico, tabular y gráfico, predominando uno o dos registros por actividad; además, se evidencia el escaso uso de la conversión entre registros, es decir, transformaciones entre representaciones de distintos registros semióticos.

Recientemente, Bizet et al. (2023a; 2023b) analizan el lenguaje, los conceptos, las proposiciones, los procedimientos, los argumentos, las situaciones-problema y los contextos que intervienen en el tratamiento de la distribución normal en dos libros de texto chilenos de Educación Media. Entre sus resultados se evidencia el predominio de actividades (sin contexto) que proponen una situación modelada por medio de la normal (lenguaje verbal o gráfico), con media y desviación estándar conocida, en las que se solicita calcular probabilidades relacionadas con la variable

aleatoria continúa involucrada (situaciones-problema) empleando la tipificación y el uso de la tabla de distribución normal estándar (procedimientos).

En esta revisión bibliográfica se identificó que son escasas las investigaciones relacionadas con el análisis de la distribución normal en libros de texto. En este sentido, con nuestro estudio consideramos ampliar esta línea investigación, con unidades de análisis no consideradas como uso de tecnología, representación para el soporte de los datos y forma de trabajo, entregando una perspectiva acerca de cómo se aborda la distribución normal en las aulas chilenas de Educación Media.

METODOLOGÍA

Para realizar el análisis de las tareas sobre la distribución normal propuestas en libros de texto, seguimos una metodología cualitativa (Salgado, 2007), de tipo exploratorio-descriptivo (Hernández et al., 2014). En concreto, se utilizó como método el análisis de contenido (López-Noguero, 2002), considerado como una técnica que permite examinar de manera sistemática y exhaustiva documentos escritos, notas de campo, transcripciones, entre otros, con el propósito de producir generalizaciones (Zapico, 2006).

La muestra de libros de texto, seleccionada por un muestreo no probabilístico intencional (Hernández et al., 2014), está formada por el texto del estudiante (TE) y el tomo 2 del cuaderno de actividades (CA) de tercero y cuarto año de Educación Media, cuyas referencias se presentan en la Tabla 1. Ambos libros de texto siguen el marco curricular actual (MINEDUC, 2019) y son otorgados gratuitamente por el MINEDUC en todos los centros educativos particulares y públicos con carácter obligatorio; en tal sentido, estos libros fueron seleccionados por su amplio uso en las aulas chilenas. Como se mencionó anteriormente, la distribución normal se presenta formalmente cuarto medio, por lo que nos centramos en este grado escolar.

Tabla 1.
Datos de los libros de texto seleccionados y analizados

Código	Autores (año)	Título	Grado (edad)	Editorial
TE	Osorio et al. (2019)	Texto del estudiante de Matemática 3° y 4° medio	4to. medio (17-18 años)	S. M.
CA	Norambuena et al. (2019)	Cuaderno de Actividades de Matemática 3° y 4° medio. Tomo 2	4to. medio (17-18 años)	S. M.

El procedimiento de análisis se realizó en cuatro etapas: 1) selección de las tareas (ejemplos o ejercicios) sobre la distribución normal propuestas en libros de texto; 2) definición de las unidades de análisis, las cuales se describen más adelante; 3) análisis de contenido de las tareas identificadas, considerando las unidades de análisis definidas, siguiendo un proceso cíclico e inductivo (Bisquerra, 2019), la fiabilidad de este proceso se aseguró mediante la comparación de los resultados del análisis realizado por cada uno de los autores, y en caso de desacuerdo, se realizó una discusión conjunta hasta llegar a un consenso; 4) elaboración de tablas de frecuencias con el registro de los resultados del análisis realizado.

Para el análisis de contenido de cada una de las tareas sobre la distribución normal propuestas en los libros de texto seleccionados, se consideraron las siguientes unidades de análisis:

Campo de problemas. De acuerdo con Godino y Batanero (1994), un campo de problemas se refiere a un conjunto, amplio y diverso, de situaciones problemáticas que comparten ciertas características en común, por ejemplo, técnicas de cálculo para resolver la cuestión planteada, o bien, que están relacionados por algún aspecto matemático subyacente. Para la clasificación de los campos de problema se consideraron cuatro de las seis categorías propuestas por Tauber (2001), las cuales han sido previamente utilizadas, con ligeras modificaciones, por Valverde (2017):

- CP1. *La distribución normal como modelo teórico que describe un fenómeno de la vida real.* En este tipo de problemas se usa la distribución normal como modelo probabilístico para su resolución, a partir de datos recolectados de algún estudio (situaciones del mundo real), datos ficticios (situaciones ficticias) o datos sin contexto.
- CP2. *Aproximación de distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores.* En este tipo de problemas se usa la distribución normal como modelo probabilístico que aproxima el comportamiento de algunas distribuciones de variables aleatorias discretas, cuando se incrementa el número de veces que se observa un fenómeno (valores grandes del parámetro n).
- CP3. *Obtención de distribuciones muestrales de la media y otros estadísticos de poblaciones normales o no necesariamente normales para muestras grandes.* Son problemas donde se plantea la idea del proceso de muestreo para establecer la distribución muestral de un estadístico (por ejemplo, la media muestral); lo anterior puede ocurrir si la población desde la que se realiza el muestreo es normal (se conoce su desviación estándar)

o no es normal (dado que el Teorema Central del Límite asegura su aproximación cuando crece el tamaño de la muestra) (Batanero y Borovcnik, 2016).

- CP4. *Estimación por intervalos de confianza*. Son problemas donde se usa la distribución normal para obtener intervalos de confianza con el propósito de estimar el valor del parámetro de una población.

Contexto utilizado. El contexto de una actividad se refiere a la situación del mundo real que se modeliza (Roth, 1996). En estadística y probabilidad, el contexto es un elemento esencial para darle sentido a los datos (Batanero et al., 2013; Fernández y García-García, 2024). Para la clasificación de los contextos se siguió la descrita en PISA (OCDE, 2017):

- *Personal*. Relacionado con actividades del propio estudiante, su familia o su grupo de amigos; por mencionar: compras, juegos, salud personal, transporte personal, deportes, viajes, preparación de alimentos, entre otras.
- *Profesional*. Relacionado con actividades del mundo laboral, por lo que pueden referirse a aquellas que realizan los trabajadores, desde un nivel no especializado hasta un nivel profesional; por ejemplo: control de calidad, inventarios, planificaciones, cálculo de costos, procesos de ensamble, entre otras.
- *Social*. Relacionado con actividades referentes a la propia comunidad, ya sea local, nacional o global; por mencionar: sistemas electorales, transporte público, políticas públicas, demografía, estadísticas nacionales, entre otras.
- *Científico*. Relacionado con actividades en las que se hace referencia a la aplicación de la matemática, la ciencia y la tecnología al mundo natural, por ejemplo, la meteorología, la ecología, la medicina, las ciencias del espacio, la genética, entre otras.

Además, se incluyó una categoría denominada '*sin contexto*', en la que se categorizan tareas que carecen de un contexto del mundo real.

Soporte de datos. Corresponde a la forma en que se entregan los datos en las tareas analizadas. La inclusión de esta unidad de análisis tiene como propósito destacar el tipo de representación de datos que se le presenta a los estudiantes para trabajar la distribución normal.

Las categorías se han construido y adaptado a partir de la propuesta de Pino y Blanco (2008):

- *Texto escrito*. Los datos se presentan dentro del enunciado de la tarea en un lenguaje natural, numérico y/o lógico.
- *Gráfico $N(\mu; \sigma)$* . Los datos se presentan en el gráfico de una distribución acampanada con valores dados para los parámetros μ y σ .

Además, se incluyó una categoría denominada '*encuesta*', en la que se categorizan tareas en las que se solicita al estudiante recolectar datos, a través de una entrevista o un cuestionario, para trabajar con la distribución normal. Cabe mencionar que esta unidad ha sido considerada en investigaciones previas (e.g. Parra-Fica et al., 2024).

Uso de tecnología. Se refiere al uso o no de algún recurso tecnológico para realizar las tareas sobre la distribución normal propuestas en los libros de texto. La inserción del uso de tecnología como unidad de análisis es por su importancia para la comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en los estudiantes, por ejemplo, a partir de la simulación (Biehler et al., 2013). Cabe señalar que esta unidad ha sido considerada en investigaciones previas (e.g. Gea et al., 2013).

Forma de trabajo. Corresponde a la forma en que los estudiantes deben trabajar la tarea:

- *Individual*. Para el desarrollo de la tarea, los estudiantes deben trabajar solos.
- *Grupal*. En las tareas se les solicita a los estudiantes trabajar en equipo o por parejas. Esta unidad de análisis se identifica en el enunciado de las instrucciones de la tarea y ha sido considerada en estudios previos (e.g. Díaz-Levicoy et al., 2020; García-García et al., 2021).

RESULTADOS

La distribución de las tareas sobre la distribución normal propuestas en los dos libros de texto de cuarto medio se muestra en la Tabla 2. Observamos que, por un lado, existe un número considerable de tareas sobre la distribución normal propuestas en ambos libros de texto; por otro lado, en TE se concentra la mayor cantidad dichas tareas.

Tabla 2.

Frecuencia (y porcentaje) de tareas analizadas por libro de texto

Libro de texto	Tareas
TE	90 (76,9)
CA	27 (23,1)
Total	117 (100)

A continuación, se presentan los resultados del análisis de las tareas, separándolos en función de las unidades de análisis antes señaladas.

Campo de problemas

En primer lugar, se analiza el campo de problemas al que pertenece cada tarea. El primero de ellos es el campo *CP1*, la *distribución normal como modelo teórico que describe un fenómeno de la vida real*, el cual se presenta cuando se solicita resolver una tarea donde la normal se utiliza como modelo probabilístico. En la actividad de la Figura 1 se muestran dos tareas ligadas a este campo: a) en el paso 4, se pide analizar la información a través de probabilidades asociadas a la distribución normal respecto a la desviación estándar, por lo que se hace uso del principio de la regla empírica (propiedad de los intervalos centrales: $\pm 3\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm \sigma$); y b) en el paso 5, se pide construir el gráfico asociado a la distribución de los datos recopilados a través de una encuesta.

Figura 1.

Ejemplos de tareas del campo CP1

Actividad de aplicación Analizando el rendimiento

¿Qué haremos? Analizar las tendencias de una asignatura.

Planifiquemos

Paso 1: Organicen en grupos de 3 o 4 integrantes. Definan qué asignatura y nivel quieren investigar.

Investiguemos

Paso 2: Encuesten a los estudiantes que componen esa población acerca de su promedio general del año pasado.

Paso 3: Registren los datos de sus encuestas en una hoja de cálculo. Determinen el valor de la media y de la desviación estándar de la población utilizando las funciones de la hoja de cálculo.

Paso 4: Analicen la información a través de probabilidades asociadas a la distribución normal respecto de la desviación estándar. Determinen el intervalo centrado en la media en que se encuentran:

- El 68,3 % de los estudiantes.
- El 95,4 % de los estudiantes.
- El 99,7 % de los estudiantes.

Presentemos

Paso 5: Elaboren el gráfico asociado a la distribución de las calificaciones de sus encuestados e inclúyanlo en una presentación que contenga los datos más relevantes de su investigación. Presenten los resultados a su curso.



Recuerda resguardar el anonimato de tus compañeros encuestados.



Fuente: TE (p. 176)

El segundo campo *CP2*, *aproximación de distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores*, se presenta en tareas donde la distribución normal se usa como modelo probabilístico que aproxima el comportamiento de una distribución discreta cuando se incrementa el número de veces que se observa un fenómeno (valores grandes del parámetro n). Por ejemplo, las tres tareas de la actividad de la Figura 2 se categorizan en este campo de problemas, donde se solicita realizar el ajuste a la normal (lo que implica el cálculo de los parámetros asociados a la distribución normal) y calcular probabilidades en el contexto de aproximación de la distribución binomial a la normal.

Figura 2.

Ejemplo de tareas del campo CP2

El 4% de los clavos de 2 pulgadas producidos por una empresa salen defectuosos. Si se produce un lote de 1200 clavos:

- a. Determina el ajuste a la normal.

- b. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 60 clavos de 2 pulgadas sean defectuosos?

- c. De los 1200 clavos producidos, ¿cuál es la probabilidad de obtener entre 25 y 55 clavos defectuosos?

Fuente: CA (p. 43)

El tercer campo de problemas identificado es *CP4*, *estimación por intervalos de confianza*, el cual se presenta en tareas donde se usa la distribución normal para obtener intervalos de confianza con el propósito de estimar el valor de un parámetro de interés. La actividad de la Figura 3 presenta dos tareas asociadas a este campo; por ejemplo, en el inciso a) se usa la distribución normal para determinar un intervalo de confianza del 99% para la media poblacional.

Figura 3.

Ejemplo de tareas del campo CP4

Se hace un experimento exponiendo a un antibiótico una muestra aleatoria de 50 bacterias, las que demoran un tiempo promedio de 30 horas en morir. Si en la población ese tiempo se distribuye $N(\mu, 5)$:

- a. Determina un intervalo de confianza al 99 % para el tiempo promedio de muerte de las bacterias expuestas a dicho antibiótico.
- b. Si las bacterias no son completamente eliminadas durante el tratamiento, las sobrevivientes mutarán para generar resistencia al antibiótico. ¿Cuánto tiempo recomendarías tratar con antibióticos a un paciente?

Fuente: TE (p. 191)

En la Tabla 3 se muestra un resumen de los campos de problemas que se presentan en los libros de texto analizados. Se observa que la mayoría de las tareas (76,1%) son del campo *CP1* en ambos libros de texto, esto podría deberse a los diversos tipos de problemas que comparten ciertas características en común, por ejemplo, calcular la probabilidad en una distribución normal empleando la tipificación, o bien, a través de la propiedad de los intervalos centrales ($\pm 3\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm \sigma$). Con respecto a las tareas de los campos *CP2* y *CP4*, su presencia es mínima (13,7% y 10,2%, respectivamente). Por otro lado, observamos que no se incluyen tareas del campo *CP3*, es decir, problemas donde se plantea la idea del proceso de muestreo para establecer la distribución muestral de un estadístico.

Tabla 3.

Frecuencia (y porcentaje) de las tareas según campo de problemas

Campo de problemas	TE	CA	Total
CP1	72 (80)	17 (63)	89 (76,1)
CP2	9 (10)	7 (25,9)	16 (13,7)
CP3	0 (0)	0 (0)	0 (0)
CP4	9 (10)	3 (11,1)	12 (10,2)
Total	90 (100)	27 (100)	117 (100)

Contexto utilizado

La segunda unidad de análisis corresponde al contexto de las situaciones de las tareas relacionadas con la distribución normal, es decir, el contexto al cual están vinculados los datos y da sentido al resultado obtenido.

El contexto *personal*, vinculado con actividades propias del estudiante, su familia o amistades, lo observamos en la actividad de la Figura 1, donde los datos corresponden a las calificaciones de un grupo de estudiantes encuestados.

El contexto *profesional*, relacionado con actividades del ámbito laboral, se observa en la actividad de la Figura 2, donde los datos se refieren al estado defectuoso o no defectuoso de los clavos producidos por una empresa.

El contexto *social* se centra en actividades propias de una comunidad (local, nacional o internacional). Ejemplo de este contexto se observa en la actividad de la Figura 4, donde los datos corresponden al puntaje obtenido por los estudiantes que rindieron la Prueba de Selección Universitaria (PSU), es decir, a los postulantes en un proceso de admisión a la educación universitaria.

Figura 4.
Ejemplo de tareas con contexto social

1. Lee la siguiente información. Luego, realiza las actividades en pareja.

Reportajes: PSU más fácil no hace mejorar los puntajes.

Cerca del 30% de los estudiantes que rindieron la PSU no superaron los 450 puntos necesarios para postular.

El 50% de los estudiantes que rindieron la PSU obtienen menos de 500 puntos.

Solo el 15% de los estudiantes obtienen 650 o más puntos.

De las 80 preguntas de este año, los postulantes contestaron en promedio solo 40 correctas.

- Todos los años, la PSU distribuye de forma normal con $\mu = 500$ y $\sigma = 110$. ¿Cuántos de estos titulares podrías explicar basándote en esta información?
- ¿Cuál es la cantidad de respuestas correctas esperadas por prueba según los titulares? ¿Cuál es el puntaje promedio?
- ¿Qué relación crees que hay entre ambas variables?
- Según la noticia, ¿cuál es la función binomial asociada al experimento de Bernoulli "Responder correctamente una pregunta de la PSU"? ¿Cuáles son su esperanza y su desviación estandar?
- Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código T20M4MP185A. Ajusten los parámetros para encontrar la mejor distribución normal en la binomial.

Fuente: TE (p. 185)

El contexto *científico*, asociado con actividades en las que se hace referencia a la aplicación de la matemática, la ciencia y la tecnología al mundo natural, se observa en la actividad de la Figura 3, dado que los datos corresponden al tiempo promedio de muerte de ciertas bacterias expuestas a un antibiótico.

La Tabla 4 resume la distribución de los tipos de contexto identificados en el análisis de las tareas de los libros de texto seleccionados. Se observa un predominio de tareas *sin contexto*, es decir, que carecen de un contexto que dé sentido a los datos (42,8%); seguido de aquellas bajo un

contexto social (20,5%). A lo interno de cada libro, se observa que TE ofrece una mayor variedad de tareas inmersas en los cuatro contextos descritos en PISA (OCDE, 2017); mientras que CA se abordan solo dos tipos de contexto, *personal* y *social*.

Tabla 4.

Frecuencia (y porcentaje) de las tareas según tipo de contexto utilizado

Contexto	TE	CA	Total
Personal	12 (13,3)	0 (0)	12 (10,2)
Profesional	11 (12,2)	5 (18,5)	16 (13,7)
Social	18 (20)	6 (22,2)	24 (20,5)
Científico	15 (16,7)	0 (0)	15 (12,8)
Sin contexto	34 (37,8)	16 (58,3)	50 (42,8)
Total	90 (100)	27 (100)	117 (100)

Soporte de datos

La tercera unidad de análisis, soporte de datos, está relacionada con la forma en que se presentan los datos. El primer tipo es *texto escrito*, en este se entregan los datos necesarios dentro del enunciado de la tarea en un lenguaje natural, numérico y/o lógico. Por ejemplo, en la Figura 3 se muestra una actividad, con dos tareas, en la que los datos se presentan a través de un texto en lenguaje natural.

El segundo soporte para presentar datos considerado en este estudio es *gráfico* $N(\mu; \sigma)$. En este, los datos se exhiben en el gráfico de una distribución acampanada con valores dados para los parámetros μ y σ . Por ejemplo, la Figura 5 muestra una actividad, con cuatro tareas, que utiliza como soporte de datos la forma gráfica de la distribución normal.

El tercer tipo de soporte de datos considerado en este estudio es *encuesta*, en donde los datos son recogidos con este instrumento de indagación en algún estudio. Por ejemplo, en la actividad de la Figura 1, se solicita recolectar datos sobre el promedio general de las calificaciones de sus encuestados y hacer uso de la distribución normal como modelo probabilístico.

Figura 5.

Ejemplo de tareas con soporte gráfico $N(\mu; \sigma)$.

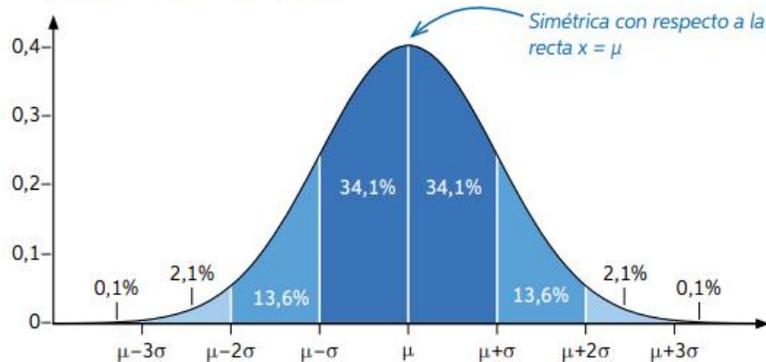
1. Analiza la información. Luego, responde las preguntas:

Una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal con media μ y desviación típica σ si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Cuyo dominio son los números reales.

Denotaremos la función anterior como $N(\mu, \sigma)$ y su gráfica, también llamada "campana de Gauss", es la siguiente:



Como se muestra en la figura, los valores de la función de probabilidad son:

- $P(x \leq \mu) = 0,5$ Hay un 50% de los valores hasta la media de la distribución.
- $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0,683$ Hay un 68,3% de los valores en este intervalo.
- $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0,954$
- $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0,997$ Aproximadamente el 0,3% de los valores quedan fuera de este intervalo.
- Es creciente en el intervalo $]-\infty, \mu]$ y decreciente en el intervalo $[\mu, \infty[$.

- a. ¿Entre qué valores se concentra la mayor cantidad de datos?
- b. ¿Con respecto a qué valor de X es simétrica la curva de densidad?
- c. Según las propiedades de una variable aleatoria continua, ¿cuál es el área bajo la curva de densidad?

Fuente: TE (p. 174)

La Tabla 5 muestra un resumen de la distribución de las tareas analizadas según el tipo de soporte de los datos. Se observa el predominio de *texto escrito*, tanto en TE como en CA, 87,8% y 92,3% respectivamente. Por otro lado, se destaca, aunque con poca presencia, el uso del gráfico de una distribución acampanada [gráfico $N(\mu; \sigma)$] como apoyo visual para trabajar las tareas (en ambos libros de texto), así como la recolección de datos a partir de una encuesta para abordar la distribución normal (solo en TE).

Tabla 5.

Frecuencia (y porcentaje) de las tareas según soporte de los datos

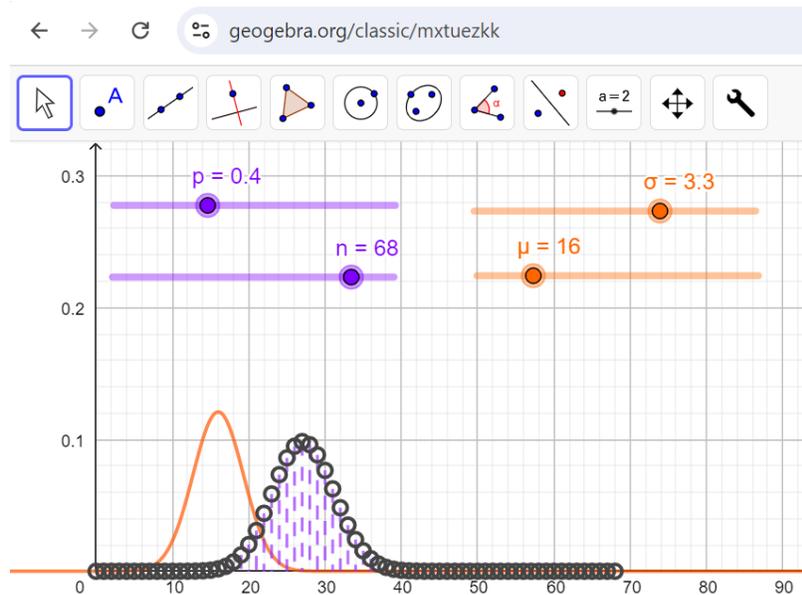
Soporte de datos	TE	CA	Total
Texto escrito	79 (87,8)	26 (92,3)	105 (89,8)
Gráfico $N(\mu; \sigma)$	9 (10)	1 (3,7)	6 (5,1)
Encuesta	2 (2,2)	0 (0)	2 (1,7)
Total	90 (100)	27 (100)	117 (100)

Uso de tecnología

Como cuarta unidad de análisis se consideró el uso de tecnología para trabajar las tareas sobre la distribución normal. En concreto, se proponen dos recursos tecnológicos: *GeoGebra* y *Excel*. Por ejemplo, en la tarea e) de la actividad de la Figura 4 se solicita ingresar a una página web con un código de acceso, el cual lo direcciona a una página web de *GeoGebra* (ver Figura 6); y en el paso 3 de la actividad de la Figura 1 se pide usar las funciones de una hoja de cálculo (*Excel*) para determinar el valor de la media y la desviación estándar de los datos recolectados a través de una encuesta.

Figura 6.

Página web de GeoGebra

Fuente: <https://www.geogebra.org/classic/mxtuezkk>

En la Tabla 6 se presentan los resultados del análisis del uso de tecnología para trabajar las tareas. En general, se observa un bajo uso de algún recurso tecnológico, en particular solo en TE se promueve el uso de *GeoGebra* o *Excel* para el estudio de la distribución normal.

Tabla 6.

Frecuencia (y porcentaje) de las tareas según uso de tecnología

Recurso tecnológico	TE	CA	Total
GeoGebra	6 (6,6)	0 (0)	6 (5,1)
Excel	5 (5,6)	0 (0)	5 (4,3)
No usa	79 (87,8)	27 (100)	106 (90,6)
Total	90 (100)	27 (100)	117 (100)

Forma de trabajo

La última unidad de análisis corresponde a la forma de trabajo, la cual está relacionada con la manera en que los estudiantes deben trabajar las tareas sobre la distribución normal propuestas en los libros de texto. Un ejemplo de forma de trabajo *individual* se observa en el enunciado de la actividad de la Figura 5 (Analiza la información. Luego, responde las preguntas). Mientras que la forma de trabajo *grupal* se identifica en la instrucción de la actividad de la Figura 4 (Lea la siguiente información. Luego, realiza las actividades en pareja).

En la Tabla 7 se muestra la distribución de las tareas según la forma de trabajo en que se indican ser abordadas. En general, en los dos libros de texto de cuarto medio se favorece el trabajo *individual* (88%). Solo TE plantea, aunque con poca presencia, tareas para ser resueltas en forma *grupal* (15,6%).

Tabla 7.

Frecuencia (y porcentaje) de las tareas según forma de trabajo

Forma de trabajo	TE	CA	Total
Individual	76 (84,4)	27 (100)	103 (88)
Grupal	14 (15,6)	0 (0)	14 (12)
Total	90 (100)	27 (100)	117 (100)

CONCLUSIONES

En este estudio se analizan las tareas sobre la distribución normal propuestas en dos libros de texto, cuyos resultados pueden proporcionar una perspectiva acerca de cómo se trabaja esta distribución en cuarto grado de Educación Media en Chile. Para ello, se consideró tanto el texto del estudiante como el cuaderno de actividades, proporcionados por el MINEDUC, por su amplio uso en las aulas chilenas.

Respecto al campo de problemas, los resultados del análisis reflejan que los libros de texto analizados hacen mayor énfasis al campo CP1, es decir, a tareas enfocadas en la distribución

normal como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real (76,1%), tales como: a) calcular la probabilidad en una distribución normal a través de la propiedad de los intervalos centrales ($\pm 3\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm \sigma$) o mediante la tipificación, y b) describir la tendencia de los datos representados gráficamente, empleando la distribución normal o la aproximación de la binomial por la normal. Este resultado no coincide con el de Valverde (2017), puesto que el campo CP4 es el que predomina en los dos libros de texto españoles de bachillerato analizados por la autora. En los libros de texto aquí analizados, el campo CP4 es el de menor presencia y CP3 está ausente, mientras que en el trabajo de Valverde (2017) se presentan los cuatro campos de problema considerados, siendo el campo CP2 el de menor aparición.

En relación con el contexto en que se presentan las tareas analizadas, se observa el predominio de aquellas descontextualizadas (42,8%), es decir, problemas matemáticos abstractos en los que se aplica la distribución normal solo de forma procedimental, por lo que los datos carecen de sentido. Por ello, consideramos necesario equilibrar el número de tareas inmersas en los diversos contextos propuestos en PISA (OECD, 2015), dado que los datos adquieren un sentido estadístico o probabilístico cuando estos están contextualizados (Batanero et al., 2013; Fernández y García-García, 2024). A diferencia de nuestro resultado, los dos libros de texto españoles de bachillerato analizados por Valverde (2017) abordan todos los contextos, destacándose el contexto laboral en ambos libros.

Ahora bien, centrando la atención en la forma en que se entregan los datos en las tareas analizadas, se observa la predilección por texto escrito (89,8%), seguido por el gráfico de una distribución de datos en forma acampanada (5,1%) para hacer referencia al comportamiento de la distribución normal. Este resultado, predominio del texto escrito como soporte de datos, coincide con el reportado en el estudio Parra-Fica et al. (2024), enfocado en el análisis de las tareas asociadas a las medidas de tendencia central propuestas en libros de texto chilenos de Educación Básica.

En cuanto al uso de tecnología para trabajar las tareas sobre la distribución normal propuestas en los libros de texto analizados, se presentó un bajo uso de esta; en concreto, solo se promueve el uso de GeoGebra (5,1%) y Excel (4,3%) como recurso tecnológico. Este resultado no es exclusivo en el contexto chileno, pues en el estudio de Gea et al. (2013) se reporta el escaso uso de tecnología para trabajar la correlación y regresión en ocho libros de texto de primer curso de bachillerato.

Con respecto a la forma de trabajo, se observó que la mayoría de las tareas (88%) deben ser trabajadas de manera individual. Este resultado revela, en lo que concierne a las tareas sobre la distribución normal, la escasa relevancia que se da al trabajo en equipo, aun cuando en las Bases Curriculares de 3° y 4° medio (MINEDUC, 2019) se señala a esta forma de trabajo como una de las habilidades que debe desarrollar el estudiante durante su formación escolar. Cabe señalar que la forma de trabajo individual también predomina en las actividades relacionadas con las medidas de tendencia central propuestas en tres libros de texto chilenos de séptimo básico (García-García et al., 2021).

Este estudio nos permite tener una aproximación a la forma en que se trabaja la distribución normal en las aulas de clase chilenas de Educación Media. Además, aporta información que puede ser considerada por investigadores y profesores en servicio para el diseño de tareas o experiencias de aprendizaje que permitan desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes sobre la distribución normal; o bien, por editoriales de libros de texto para diseñar tareas tomando en cuenta, por ejemplo, los diferentes campos de problema y los cuatro contextos propuestos en PISA (OECD, 2015).

Por otro lado, consideramos que este estudio puede considerarse como base para ampliar el análisis de libros de texto de Educación Secundaria de otros países, considerado la distribución normal como objeto matemático-probabilístico de investigación. Finalmente, externamos la necesidad de repensar el tipo de tareas sobre la distribución normal propuestas en los libros de texto analizados, con el propósito de enriquecer su enseñanza en las aulas chilenas de cuarto medio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alkhateeb, M.A. (2019). The Language Used in the 8th Grade Mathematics Textbook. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(7), em1719. <https://doi.org/10.29333/ejmste/106111>
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, B. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso de análisis de datos. *Cuadrante*, 10(1), 59-92.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.
- Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C. y Shaughnessy, M. (2018). Reasoning about data. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 139-192). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_5

- Bisquerra, R. (2019). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.
- Bizet, V., Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (2023a). Objetos matemáticos ligados a la variable aleatoria y sus distribuciones de probabilidad en libros de texto chilenos. *PNA*, 17(2), 201-238. <https://doi.org/10.30827/pna.v7i2.21820>
- Bizet, V., Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (2023b). Situaciones-problemas sobre variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad según libros de texto chilenos. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 27(2), 351-382. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v27i2.21345>
- Caire, E. y Cardoso, V. (2023). Aspectos da Filosofia de Lakatos para a Matemática: reconstrução racional da história da curva normal. *Revista de Educação Matemática*, 20, e023083. <https://doi.org/10.37001/remat25269062v20id781>
- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.
- Díaz-Levicoy, D., Morales-García, L. y Rodríguez-Alveal, F. (2020). Las medidas de tendencia central en libros de texto de Educación Primaria en México. *Paradigma*, 41, 706-729.
- Donoso, A. y Sánchez, N. (2020). *Análisis de las representaciones semióticas que se presentan en las actividades de los libros de textos de enseñanza media. El caso de la distribución normal*. VI Jornada de Educación Matemática UMCE, Santiago, Chile.
- Fernández, E. y Mejía, M. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. En G. García (Ed.), *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 61-68). Asociación Colombiana de Matemática Educativa.
- Fernández, N. y García-García, J.I. (2024). Sentido probabilístico: un primer acercamiento. En M. Sánchez, M. García-González, y A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 107-116). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-10>
- García-García, J.I. (2021). El contagio de los datos. La importancia de alfabetización estadística. En J.E. Sagula (Ed.), *II Simposio de Educación Matemática Virtual. Educación Matemática enriquecida por Interdisciplinariedad con la Tecnología. Tomo I: conferencias, paneles* (pp. 199-204). EdUnLu.
- García-García, J.I., Imilpán, I., Díaz-Levicoy, D. y Arredondo, E.H. (2021). Las medidas de tendencia central en libros de texto de séptimo básico de Chile. *Revista Conrado*, 17(81), 261-268.
- Gea, M.M., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J.M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). SEIEM.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill Education.
- Lemus-Cortez, N. y Huincahue, J. (2019). Distribución Normal: Análisis histórico-epistemológico e implicaciones didácticas. *UCMaule*, 56, 29-57. <https://doi.org/10.29035/ucmaule.56.29>

- López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación*, 4, 167-180.
- Másmela, L.A. y Serrato, J.C. (2009). Una aproximación histórica a la evolución de la curva normal. En *Memorias del Segundo Congreso Internacional de matemáticas un lenguaje universal* (pp. 1-14). Asociación Latinoamericana de Maestros de Matemáticas Investigadores.
- MEC (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Ministerio de Educación y Ciencia.
- MINEDUC (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2021). *Programa de Estudio 4° Medio. Matemática*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Montgomery, D.C. y Runger, G. C. (2010). *Applied statistics and probability for engineers* (5th Ed.). John Wiley & Sons.
- OCDE (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*. OECD Publishing.
- Parra-Fica, J.H., López-Martín, M.M. y Díaz-Levicoy, D. (2024). Measures of central tendency in primary education textbooks in Chile. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6), em2454. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14592>
- Pino, J. y Blanco, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.
- Roth, W.M. (1996). Teacher questioning in an open-inquiry learning environment: interactions of context, content, and student responses. *Journal of Research in Science Teaching*, 33(7), 709-736.
- Salgado, A. (2007). Investigación cualitativa: Diseños, evaluación del rigor metodológico y retos. *Liberabit*, 13(13), 71-78.
- Serradó, A. y Azcárate, P. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática*, 15(1), 67-98.
- Stahl, S. (2006). The evolution of the normal distribution. *Mathematics Magazine*, 79(2), 96-113.
- Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos* [Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla].
- UNAM (2016). *Programa de Estudio. Área de Matemáticas. Estadística y Probabilidad I-II. Medio. Matemática*. Colegio de Ciencias y Humanidades.
- Valverde, M. (2017). *Un estudio de la presentación de la distribución normal en textos de bachillerato*. [Tesis de Maestría, Universidad de Granada].

- Zapico, M. (2006). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. En MINEDUC (Ed.), *Primer seminario internacional de textos escolares* (pp.149-155). Ministerio de Educación de Chile.
- Zhu, Y. y Fan, L. (2006) Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626. <https://doi.org/10.1007/s10763-006-9036-9>

ANALYSIS OF THE NORMAL DISTRIBUTION IN HIGH SCHOOL TEXTBOOKS IN CHILE

Abstract

This study analyzes the tasks proposed in two Chilean high school textbooks. For this purpose, under a qualitative methodology, a content analysis of the tasks of the student's textbook and in the fourth-grade activity booklet is carried out. Specifically, the problem field to which each task belongs, the type of context used, the data support, the use of technology and the form of work proposed in the task are analyzed. The results show that Chilean textbooks are dominated by tasks that emphasize the normal distribution as a probabilistic model that describes a real-life phenomenon. In addition, there is a predominance of tasks that lack a context that gives meaning to the data, the support in which the data are mostly presented is written text, the use of technology is little promoted and individual work is favored. This study shows the type of tasks on normal distribution that are addressed in Chilean classrooms and will serve as a basis for further analysis of secondary school textbooks from other countries. Also, it concludes on the need to rethink the type of tasks on this distribution proposed in the textbooks analyzed, with the purpose of enriching their teaching in the fourth grade in Chile.

Keywords: normal distribution, textbook, activity notebook, secondary education.

ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO NO CHILE

Resumo

Este estudo analisa as tarefas propostas em dois livros didáticos do ensino médio no Chile. Para isso, com uma metodologia qualitativa, é realizada uma análise de conteúdo das tarefas do livro didático do aluno e do caderno de atividades da quarta série. Especificamente, são analisados o campo de problemas ao qual cada tarefa pertence, o tipo de contexto utilizado, o suporte de dados, o uso de tecnologia e a forma de trabalho proposta na tarefa. Os resultados mostram que os livros didáticos chilenos são dominados por tarefas que enfatizam a distribuição normal como um modelo probabilístico que descreve um fenômeno da vida real. Além disso, há uma predominância de tarefas que carecem de um contexto que dê significado aos dados, o meio em que os dados são apresentados é o texto escrito, o uso da tecnologia é pouco promovido e o trabalho individual é favorecido. Este estudo mostra o tipo de tarefas sobre distribuição normal que são abordadas nas salas de aula chilenas e servirá de base para uma análise mais aprofundada dos livros didáticos do ensino médio de outros países. Também conclui sobre a necessidade de repensar o tipo de tarefas sobre essa distribuição propostas nos livros didáticos analisados, com o objetivo de enriquecer seu ensino no quarto ano do ensino médio no Chile.

Palavras-chave: distribuição normal, livro didático, caderno de atividades, ensino médio.

Jaime I. García-García

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile.

jaime.garcia@umce.cl

<https://orcid.org/0000-0002-8799-5981>

Profesor del Departamento de Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile. Doctor en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa, por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Investigador en el área de Educación Estocástica, siguiendo diversas líneas de investigación, entre ellas, comprensión gráfica, sentido probabilístico, razonamiento estadístico, análisis de libros de texto.

Jaime Andrés Camaño Meza

Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia

jaime.c.meza13@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8410-0679>

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Sucre, Colombia. Magíster en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad del Atlántico, Colombia. Miembro del Semillero de Investigación en Educación Matemática y del Grupo de Investigación PROPED. Coordinador del Seminario “Repensando la Educación Matemática”. Ha participado en diversos congresos de matemática educativa, por mencionar: VI Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática y VI Encuentro de Jóvenes que Investigan de RELME-35.

Javier Enrique Hernández Pino

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile.

javier.hernandez2020@umce.cl

<https://orcid.org/0009-0000-2897-0744>

Estudiante de Pedagogía en Matemática mención Estadística Educativa de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Santiago, Chile. Se desempeña como Tutor Par del Centro del Acompañamiento para el Aprendizaje UMCE y como Ayudante Meritante en diversas actividades curriculares, tales como: Procesos Infinitos, Cálculo Diferencial en una Variable, Cálculo Integral en una Variable y Modelos Diferenciales, Cálculo en Varias Variables.

Elizabeth H. Arredondo

Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile.

elizabeth.hernandez@ulagos.cl

<https://orcid.org/0000-0002-5285-1603>

Profesora del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile. Doctora en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa, por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Las líneas de investigación que desarrolla son Didácticas de los diversos marcos matemáticos, Didáctica de la Geometría, Didáctica de la Estadística y la Probabilidad.

