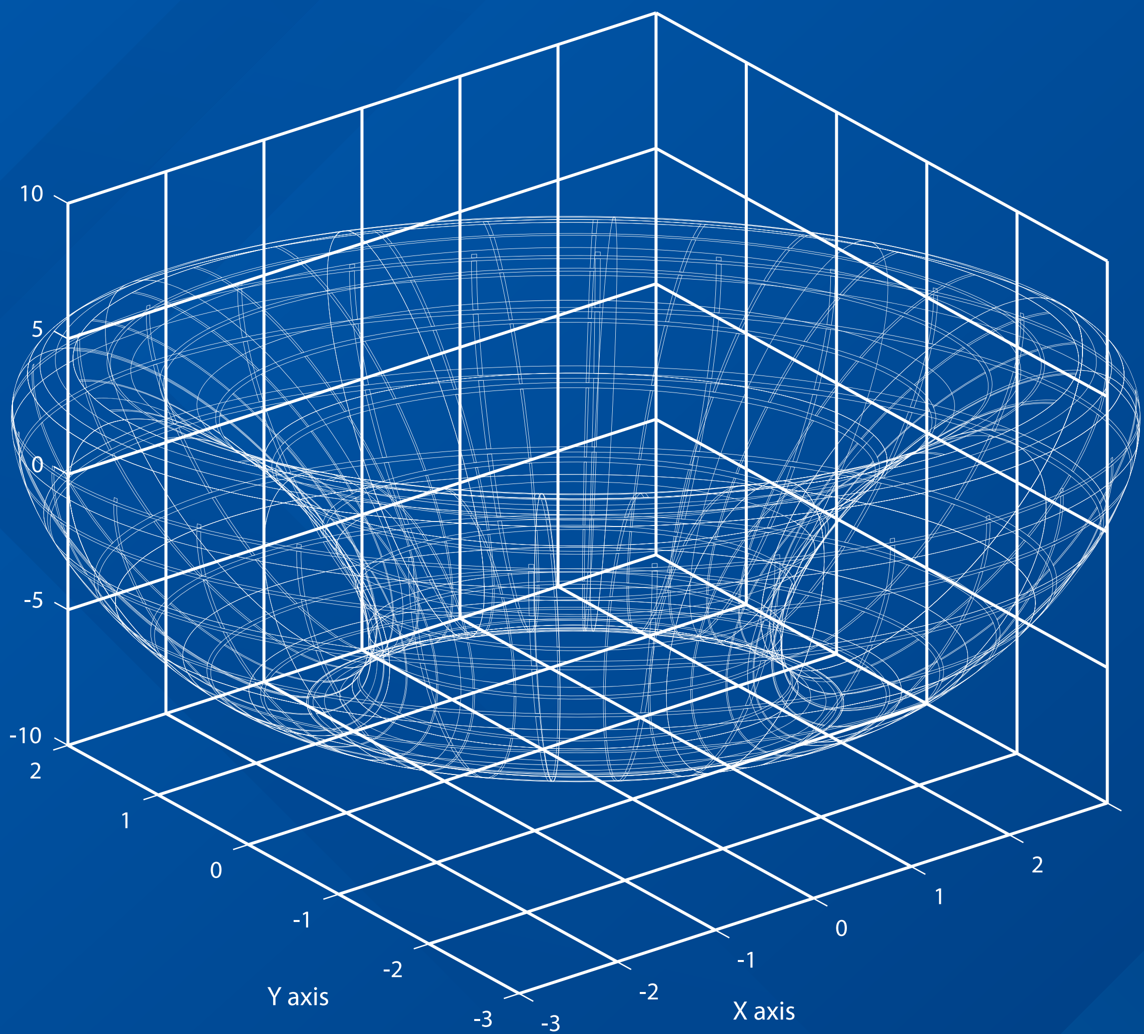
CiemaeUCM
Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística
Universidad Católica del Maule

Modelación matemática y resolución de problemas: retos y oportunidades



Editores:

María D. Aravena-Díaz - Danilo Díaz-Levicoy

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: RETOS Y OPORTUNIDADES

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: RETOS Y OPORTUNIDADES

Editores
María D. Aravena-Díaz • Danilo Díaz-Levicoy

Autores
Natividad Adamuz Povedano, *Universidad de Córdoba, Córdoba, España.*
Victoria Arriagada Jofré, *Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.*
Eleany Barrios Borges, *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.*
Marco Catalán Urbina, *Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.*
Daniel Clark Orey, *Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.*
Francisco Cordero, *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.*
Verónica Díaz Quezada, *Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile.*
Elvira Fernández de Ahumada, *Universidad de Córdoba, Córdoba, España.*
Isabel García Martínez, *Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.*
Falconery Giacoleti Castillo, *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.*
Sindi Marcía Rodríguez, *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.*
Felipe Muñoz Cañas, *Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile*.
Andrés Ortiz Jiménez, *Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile.*
Marcela Parraguez González, *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.*
Irma Pinto Rojas, *Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.*
Elisabeth Ramos Rodríguez, *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.*
Milton Rosa, *Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.*
Horacio Solar Bezmalinovic, *Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.*

Libro editado en el marco del Proyecto FONDECYT regular 1230865: *Modelado matemático y método de caso para integrar STEM. Propuesta para atender a la diversidad en el aula de secundaria*.

CRÉDITOS

Ediciones del Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística
Directora: Dra. María Aravena Díaz.

Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades.
Editores: María Aravena-Díaz • Danilo Díaz-Levicoy.
ISBN: 978-956-6067-75-7

Todos los capítulos que conforman el libro fueron seleccionados por arbitraje externo, mediante el sistema doble ciego.

Diseño y diagramación: Danilo Díaz-Levicoy
Portada: Luis A. Espinoza Sepúlveda (lespinoz@ucm.cl)

Libro de acceso libre. Abril 2024

Publicado por:
Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística
Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Católica del Maule
Campus San Miguel, Avenida San Miguel 3605, Talca, Chile
Teléfono: +56 71 298 6000

ÍNDICE

PRÓLOGO[1]

> *"Aunque nunca se diera un círculo ni un triángulo en la naturaleza, las verdades demostradas por Euclides conservaron para siempre su certeza y su evidencia".*
>
> David Hume

Estudiando hoy la historia de la humanidad, desde la Didáctica de la Matemática, podemos visualizar y verificar que el desarrollo de la Matemática como disciplina científica siempre nos ha entregado significativos aportes y datos empíricos sobre el universo, que están siendo utilizados para descifrar y resolver diversos y grandes problemas del mundo real, como los que se encuentran ahora en este libro: *"Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades"*, editado por el Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística de la Universidad Católica del Maule, que lidera la destacada académica Dra. María Aravena Díaz.

Para mí, que he dedicado la mayor parte de mi vida académica a la formación inicial y continua de profesores de matemática, para los distintos niveles del sistema educativo, es un gran honor prologar esta obra, que presenta de forma excelente una parte importante del trabajo relevante de un selecto grupo de colegas investigadores, tanto nacionales como extranjeros, que poseen un alto nivel de reconocimiento de sus pares.

Este libro, está dirigido fundamentalmente a académicos y académicas que enfrentan el desafío de formar profesores y profesoras de Matemática para el siglo XXI, con su acelerado desarrollo científico y tecnológico que nos asombra. Es sabido que la Matemática, junto a la Didáctica de la Matemática, se constituyen hoy en el ámbito disciplinar considerado como eje central de esta formación. Es decir, felizmente existe consenso entre los distintos especialistas, que no basta que un o una docente de Matemática, de cualquier nivel educativo, domine en plenitud los contenidos matemáticos y estadísticos que deben aprender sus estudiantes, si en su enseñanza no utiliza las diversas estrategias metodológicas específicas, producto del significativo avance de la investigación en Didáctica de la Matemática, que aseguran un mayor y mejor grado de calidad

---

[1] **Como citar:** Caamaño-Espinoza, C. (2024). Prólogo. En M.D. Aravena-Díaz y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades* (pp. 7-9). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

de sus aprendizajes.

El primer capítulo pone énfasis en la resolución de problemas en Cálculo Diferencial, dando cuenta de la forma en que la argumentación le otorga una nueva perspectiva a la modelación matemática en el aula, a partir del análisis de discusiones grupales y conflictos que emergen entre los estudiantes en sus intentos de encontrar la solución más adecuada. En el segundo capítulo, se propone un currículo matemático de tres vías para los cursos de formación, desde la perspectiva de la etnomodelación, que nace del importante legado de Ubiratàn D'Ambrosio, considerando que el conocimiento matemático mecánico e instrumental no es suficiente para desarrollar en los alumnos una actitud crítica y reflexiva con relación a la propia realidad. A continuación, el tercer capítulo se centra en el estudio de las relaciones entre las competencias de modelación y argumentación en el aprendizaje matemático, dando cuenta de la forma en que la argumentación le otorga una nueva perspectiva a la modelación en el aula, a partir de un estudio de caso.

Por otra parte, el importante avance en el desarrollo de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica experimental, que nos entrega diversos modelos y métodos focalizados en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, se refleja también en la parte restante de esta obra. Es así como en el cuarto capítulo se presenta un modelo cognitivo que permite relevar la importancia de actividades que propician la construcción de una conjetura en un contexto geométrico-figural y su prueba, basado en la teoría APOE y que valida la síntesis de elementos geométricos en una expresión de la conjetura como totalidad, como un importante aporte para el diseño y planificación de actividades de aula. El quinto capítulo está focalizado específicamente en el uso de la modelación matemática de la ingeniería, sustentado en la Teoría Socioepistemológica, como marco de referencia alternativo para el docente que se desempeña en la enseñanza de la Matemática en carreras de ingeniería, donde aún es bastante más común de lo deseable que en dicha enseñanza no se utilice la resolución de problemas reales de las distintas especialidades. Y así llegamos al sexto y último capítulo, que se centra en la investigación de programas efectivos de desarrollo profesional docente, da a conocer un estudio de caso dirigido al profesorado, con nuevos elementos que sin duda permitirán optimizar la promoción del desarrollo de la habilidad de modelar de sus estudiantes en contextos reales y cercanos.

Por último, quiero decir que no tengo duda alguna que este libro se constituye en un aporte muy significativo para nuestra importante tarea de fortalecer y mejorar la calidad de la formación de profesores y profesoras de matemática, para que a lo largo de su vida profesional, les permita utilizar en sus prácticas docentes los diversos avances del conocimiento matemático y didáctico específico, que corresponden a las condiciones necesarias para lograr los aprendizajes matemáticos requeridos y enfrentar con éxito las distintas desigualdades presentes en nuestro sistema educativo.

Carlos L. Caamaño-Espinoza
Talca, abril de 2024

Capítulo 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS[2]

Verónica Díaz

Felipe Muñoz

RESUMEN

Esta investigación tuvo como objetivo evaluar el nivel de logro de estudiantes de formación inicial, en la resolución de problemas de aplicaciones de la derivada, según tipos de problemas matemáticos que atienden a la naturaleza y al contexto en que se plantea un problema. Se diseñó un estudio descriptivo con método cuantitativo en dos carreras de pedagogía en matemáticas de dos Universidades en Chile. Los resultados indican la existencia de brechas de conocimiento, que limitan las posibilidades de la resolución adecuada de situaciones problemas cognitivamente no triviales del Cálculo Diferencial, así como de ciertos contextos, con una importante excepción de los problemas rutinarios de contexto puramente matemáticos, que evocan exclusivamente a objetos matemáticos y sus relaciones, y de los problemas rutinarios de contexto fantasista, los cuales capturaron el interés de los estudiantes y lograron una muy efectiva resolución. Aunque estos problemas no se basan en la realidad, se construyen utilizando situaciones que los estudiantes reconocen en su vida diaria.

Palabras clave: Tipos de problemas; Derivadas; Naturaleza y contexto; Problemas no rutinarios; Pedagogía en matemática.

INTRODUCCIÓN

El Cálculo es una de las ramas más importantes de las matemáticas que se ocupa del cambio continuo. Dos conceptos principales en los que se basa el Cálculo, son las derivadas y las integrales. La literatura internacional ha identificado una serie de dificultades que enfrentan los

[2] **Como citar:** Díaz, V. y Muñoz, F. (2024). Resolución de problemas en cálculo diferencial en la formación inicial de docentes de matemáticas. En M.D. Aravena-Díaz y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades* (pp. 10-33). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

estudiantes para comprender la noción de derivada (Hitier y González-Martín, 2022; Montoya-Delgadillo et al., 2018). Teniendo en cuenta diferentes representaciones de la derivada tales como gráfica, verbal, simbólica, física paradigmática y otras, Zandieh (2001) indica en particular que, si un estudiante entiende la derivada en un contexto, esto no significa que pueda resolver tareas en otro contexto (Hitt y González-Martín, 2016; Rasmussen et al. 2014; Roorda et al. 2015; Christensen y Thompson, 2012; Planinic et al., 2019).

Muchos instructores universitarios, estarían de acuerdo en que la razón principal por la que los estudiantes no tienen éxito en el Cálculo en general y en las derivadas en particular, es porque tienen bases débiles en las llamadas habilidades de pre cálculo que deberían haberse dominado de antemano. Orton (1983) proporciona una de las primeras descripciones de las dificultades de los estudiantes con las derivadas. Aun cuando los alumnos que estudió eran generalmente competentes para calcular derivadas, encontró deficiencias significativas como tasa de cambio y la representación gráfica de este objeto matemático. Estos estaban frecuentemente vinculados a una comprensión deficiente o inadecuada de los límites, así como a la relación, función y proporcionalidad (Bressoud et al., 2016).

Por otra parte, varios estudios han confirmado que las carreras de Matemáticas de pregrado registradas en cursos de Cálculo, tienen dificultades epistemológicas, psicológicas y pedagógicas (Juter, 2012; Dickerson y Pitman, 2016). Los profesores se quejan de que los estudiantes no tienen una comprensión relacional o qué deben saber, con respecto a las materias principales de este curso, donde se han estudiado la continuidad, la derivada y las integrales (Rasmussen et al., 2014; Swidan y Yerushalmy, 2014; Sevimli, 2018). En diferentes países, los educadores de matemáticas han invertido en rediseñar la instrucción en el aula de Cálculo, como un reconocimiento de la importancia de la materia, porque existe un consenso generalizado de que el tema es difícil para los estudiantes (Jaafar y Lin, 2017; Tallman et al., 2016) y que se enseña a resolver problemas en algunos casos, en forma mecánica (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

En el programa de matemáticas del curso de formación de pedagogías en matemáticas, el Cálculo es uno de los contenidos importantes, incluido el conocimiento sobre derivadas. (Da, 2022). Las derivadas tienen muchas aplicaciones para resolver problemas, desde matemáticas elementales hasta matemáticas avanzadas, y son una herramienta importante para apoyar la resolución de variados problemas, a los que el conocimiento algebraico no puede acceder. Este concepto, se debe enseñar asumiendo que los estudiantes han obtenido varios requisitos previos, como álgebra, función y límite.

La representación de la aplicación de derivadas es un problema verbal, un problema que se sitúa en el contexto de la vida cotidiana (Verschaffel et al., 2010). Los problemas de palabras se han considerado difíciles, ya que requieren no solo la comprensión del tema derivada, sino también la habilidad para dar sentido al texto del problema y transformarlo en una representación matemática o visual. Las dificultades relacionadas con los problemas verbales de las derivadas, han sido objeto de estudio de variados autores (Fatmanissa et al., 2019; García y Dolores, 2012; García-García y Dolores, 2019). Esto parece ocasionar consecuencias negativas, más aún cuando los que aprenden son futuros profesores de matemáticas que, para el ejercicio de su profesión, necesitan conocimientos y habilidades que les permitan, a futuro, enseñar a resolver y proponer problemas de la cotidianeidad (Vrancken y Engler, 2014).

Existen estudios de resolución de problemas en derivadas que tienen como marco teórico teorías específicas, como es el caso que presentan Fuentealba et al. (2019), pero la investigación sobre tipos de problemas matemáticas en este objeto matemático, casi no ha sido abordada En una década en que el valor de la educación universitaria y de la pedagogía en matemática está bajo un constante escrutinio de aseguramiento de la calidad (Díaz et al., 2019; Díaz y Flores, 2022) y con un marcado énfasis en la evaluación, se formuló esta investigación que aborda el tema del rendimiento académico en la resolución de tipos de problemas sobre aplicaciones de la derivada, de los estudiantes de pedagogía en matemáticas. Lo anteriormente descrito, justifica la presente investigación para la cohorte 2022 de futuros profesores de matemática en dos universidades del sur de Chile.

OBJETIVOS

Los objetivos formulados para este estudio son determinar y analizar el rendimiento académico mediante la resolución de tipos de problemas contextualizados a las derivadas, de los estudiantes de pedagogía en matemática. Se asocian a estos objetivos, la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los problemas que resuelven los futuros profesores de matemática, cuando se enfrentan a problemas de diferentes tipos?

REFERENTES TEÓRICOS

Los problemas de derivadas con contenido práctico e interdisciplinario ocupan una posición particularmente importante en el entrenamiento de una serie de competencias matemáticas, como la capacidad de razonamiento matemático, la competencia de Cálculo, la competencia de comunicación matemática y la competencia de resolución de problemas, para lograr el objetivo de optimizar las actividades humanas prácticas. La resolución de este tipo de problemas, por un lado, fortalece el conocimiento de los estudiantes de aplicar las matemáticas a la práctica, por otro lado, muestra una perspectiva interdisciplinar en la enseñanza integrada, perspectiva didáctica que es de gran interés en la actualidad.

A pesar de la importancia del concepto de derivada, en lo relativo a su comprensión, los resultados de las investigaciones constatan que, para los estudiantes universitarios, resulta muy compleja, lográndose alcanzar sólo una comprensión parcial de este concepto (Fuentealba et al., 2017). También se constata que los estudiantes cuando enfrentan problemas con derivadas, dan prioridad a un uso que no está respaldado por una comprensión conceptual de la derivada, sino más bien en la definición de la derivada como límite.

Aunque ostensiblemente a los estudiantes de matemática, se les ha enseñado el Cálculo Diferencial en la formación inicial, buscamos investigar el rendimiento académico de los futuros profesores de matemática, cuando se ven enfrentados a tipos de problemas contextualizados y no a ejemplos resueltos sobre derivadas. El marco teórico que se utilizó en esta investigación se construyó en base a la clasificación de tipos de problemas de los autores Díaz y Poblete (2001).

Clasificación de los problemas

Se destaca en la literatura la importancia de incorporar en la resolución de problemas, tipos de problemas matemáticos (Martínez et al., 2017). Al respecto, se han investigado y desarrollado en el tiempo, variadas clasificaciones para la praxis escolar que dependen de los criterios de clasificación utilizados (Pino, 2015). Existen clasificaciones basadas en el número de soluciones posibles, en la adaptación de los datos dados, en el procedimiento, etc. (Blum y Niss, 1991; Blanco, 1993; Vila, 1995; Díaz y Poblete, 2001; Vila y Callejo, 2004). Incluso algunas de ellas incluyen ejercicios dentro de la categoría más general de problemas matemáticos.

Resolución de problemas

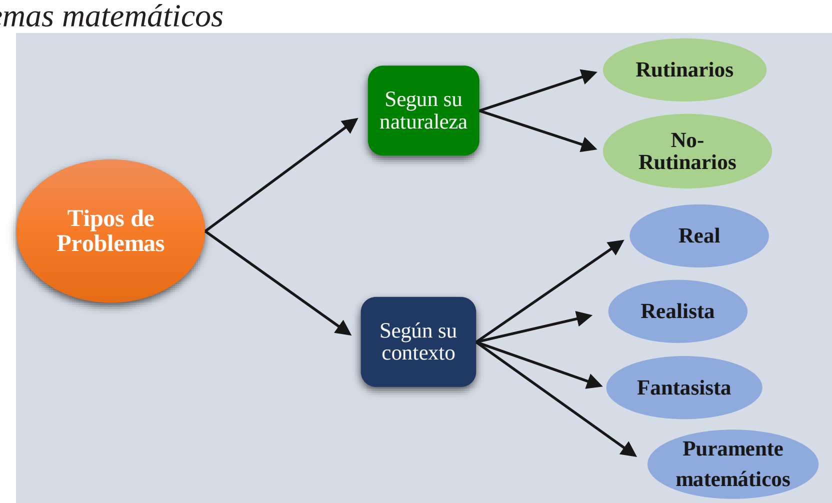
En las últimas décadas, se le ha concedido una gran importancia al desarrollo de esta habilidad. En todo tipo de currículos, está presente la exigencia de resolver problemas enmarcados en contextos matemáticos o de la vida real, sin embargo, de acuerdo a Díaz y Poblete (2019) en la práctica es muy poco probable que los alumnos tengan la oportunidad de abordarlos.

Para los autores Boesen et al. (2014), resolver problemas es participar en una tarea para la cual el método de solución no se conoce de antemano. Esta definición implica que, en esta perspectiva, existen solo dos tipos de tareas matemáticas: problemas y no problemas. Estos últimos a menudo se denominan tareas rutinarias o ejercicios (Schoenfeld, 1985)

Los problemas matemáticos proporcionan los medios a través de los cuales un alumno puede adquirir nuevas habilidades, y luego comenzar a aplicar estas habilidades a problemas cognitivamente no triviales y que no hayan encontrado previamente (Renkl, 2014; Bentley y Yates, 2017) como los no rutinarios (Díaz, 2020).

A continuación, se presenta la clasificación de tipos de problemas matemáticos de los autores Díaz y Poblete (2001) que forma parte del marco teórico. Como lo señalan Martínez et al. (2017), los autores realizan una doble clasificación, además de atender a la naturaleza de los problemas matemáticos, se preocupan por el contexto en que se plantea el problema.

Figura 1.
Tipos de problemas matemáticos



Fuente: Díaz y Poblete (2001)

Problemas rutinarios

Estos problemas denominados rutinarios, incluyen plantear, formular y resolver tipos de problemas de contexto real, realista, fantasista y puramente matemáticos, que requieren el establecimiento de conexiones para su resolución. Los problemas rutinarios son similares a los resueltos durante los cursos de instrucción; el estudiante sigue una secuencia que implica entender los conceptos y algoritmos para alcanzar soluciones válidas.

- *Problema de contexto real*: Un contexto es real si se produce efectivamente en la realidad y compromete el accionar del alumno en la misma. Ejemplo: *"Determine la derivada de dos funciones trigonométricas inversas en un punto dado, usando las propiedades de la derivada de la función inversa"*
- *Problema de contexto realista*: Un contexto es realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad. Ejemplo: *"Se trata de encerrar un prado rectangular usando cerca de alambre en tres lados y flores en el cuarto. Con 800 m. de alambre, ¿cuál es el área máxima que se puede cercar?"*
- *Problema de contexto fantasista*: Un contexto es fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad. Ejemplo: *"Se calcula que entre las 2000 y 5000 revoluciones por minuto el consumo de combustible de una escalera mecánica de la tierra al planeta marte, viene dado por la función* $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$*, donde f indica los litros consumidos en una hora y x viene expresada en miles de revoluciones por minuto. Hallar las revoluciones con las que el consumo del motor es mínimo y máximo."*
- *Problema de contexto puramente matemático*: Un contexto es puramente matemático si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc. Ejemplo: "*Obtener la derivada de la función* $f(x)=2/(x-3)$ *en el punto de abscisa* $x = 4$ *y calcular la tasa de variación instantánea en el punto de abscisa* $x = 5$*."*

Problemas no rutinarios

Un problema será no rutinario cuando un estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, para encontrarla. Ejemplo: *"Establezca un problema de mínimo donde se puede aplicar la derivada".*

Cabe hacer notar que los problemas no rutinarios, también pueden ser clasificados según su contexto en real, realista, fantasista y puramente matemático.

METODOLOGÍA

La investigación corresponde a un estudio descriptivo con enfoque cuantitativo. El universo de estudio lo constituyen los futuros profesores de matemática de secundaria. La muestra se conforma con dos carreras de pedagogía en matemáticas, de dos universidades en Chile. Participan de ella, un total de 70 estudiantes de quinto semestre pertenecientes a dos cursos de la cohorte 2022, de los cuales, 32 pertenecen a la Universidad 1 y 38 a la Universidad 2. Ambos grupos de estudio, habían cursado Cálculo I (Cálculo Diferencial e Integral en una variable).

Los participantes corresponden a grupos intactos, es decir, grupos ya constituidos (Sampieri, 2014). Siguiendo el programa de la asignatura similar en el curso de Cálculo Diferencial para las dos pedagogías, los estudiantes de ambos grupos, ya habían abordado los contenidos referidos a números y la recta real, estudiado los temas límite, continuidad, derivadas e integrales. De acuerdo a la estadística de la prueba de Levene para determinar varianzas homocedásticas entre los cursos de pedagogía, este concluye que existen varianzas iguales entre ellos (sig < 0,005).

Instrumento evaluativo: prueba de matemáticas

Con la finalidad de evaluar el nivel de logro de los estudiantes de pedagogía en la resolución de problemas concernientes a tipos de problemas matemáticos, se aplicó una prueba validada previamente, en investigaciones de cálculo diferencial en carreras de ingeniería (Díaz, 2020).

La prueba compuesta por 10 problemas de respuesta abierta y elaborada según la clasificación Díaz y Poblete (2001), fue aplicada en una sesión de 90 minutos con el previo consentimiento de los estudiantes y protocolos de investigación que cada universidad exige. Al momento de aplicar la prueba de matemáticas, estaban con sus correspondientes profesores en cada curso, diferentes al investigador.

A continuación, en la Tabla 1, se presenta la distribución de los tipos de problemas.

Tabla 1.
Distribución según naturaleza y contexto del problema

Problema	Naturaleza y contexto
Problema 1	Realista
Problema 2	Fantasista
Problema 3	No rutinario
Problema 4	Fantasista
Problema 5	Puramente matemático
Problema 6	No rutinario

Problema	Naturaleza y contexto
Problema 7	Real
Problema 8	Puramente matemático
Problema 9	Realista
Problema 10	No rutinario

Fuente: Datos de la investigación

Los niveles de rendimiento se consideraron en relación al grado de avance de los estudiantes en la resolución de los tipos de problemas matemáticos, y se estimó de acuerdo al modelo adoptado de Rasch (1980) por Díaz y Poblete (2004). Se asocia a este modelo una escala, que indica los cinco niveles de progreso de los estudiantes hacia la solución correcta del problema. Esta escala de cinco puntos registra cada detalle en el intento de los alumnos en encontrar la solución, como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2.
Escala de puntajes

Puntaje	Etapas de la solución
0	*No comienzo*: El estudiante es incapaz de comenzar el problema o entrega un trabajo que no tiene significado alguno.
1	*Enfoque*: El estudiante enfoca el problema con un trabajo significativo, indicando una comprensión del problema, pero encuentra rápidamente una dificultad.
2	*Substancia*: Suficientes detalles demuestran que el estudiante se ha orientado hacia una solución racional, pero errores importantes o interpretaciones erróneas impiden el proceso de resolución correcta.
3	*Resultado*: El problema está casi resuelto, algunos pequeños errores conducen a una solución final errada.
4	*Completación*: Un método apropiado ha sido utilizado y ha producido una solución correcta.

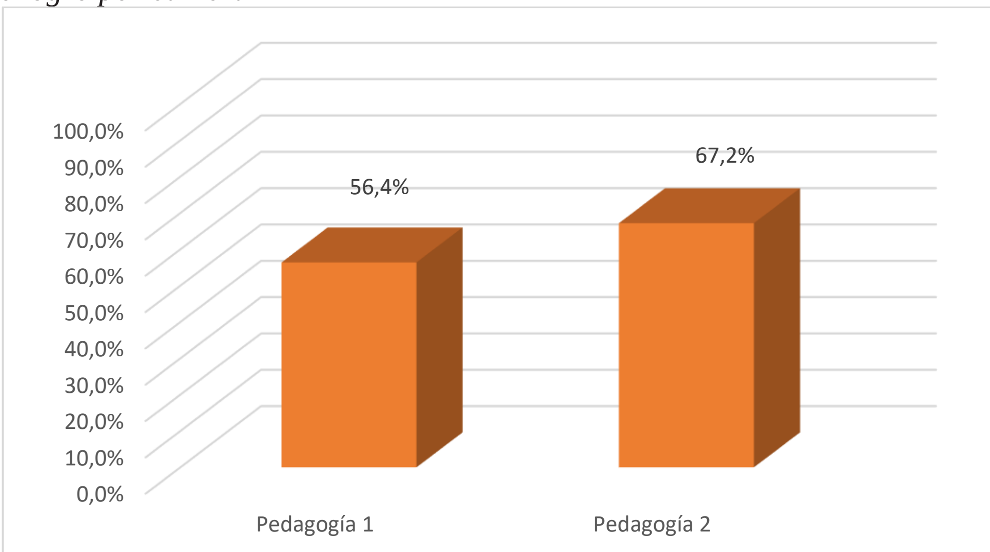
Fuente: Díaz y Poblete (2001), adaptado de Rasch (1980)

La confiabilidad de la prueba fue medida con el Alfa de Cronbach, y fue de 0.85, el cual se consideró apropiada dada la naturaleza del instrumento evaluativo y su extensión. Se establecieron los grados de discriminación interna a través de la correlación biserial (rpbis) que fue en promedio igual a 0.42 y los de dificultad para cada problema y para la prueba en su totalidad, cuyo parámetro de dificultad fue de 37,2%.

RESULTADOS

En primer término, se presentan en la Figura 2, los resultados totales en porcentaje del rendimiento académico de los estudiantes de las carreras de Pedagogía en Matemáticas 1 y 2 en la prueba de resolución de tipos de problemas de aplicaciones del objeto matemático derivada.

Figura 2.
Niveles de logro por carrera



Fuente: Datos de la investigación

De acuerdo a la Figura 2, el mayor rendimiento académico o mayor nivel de logro de los estudiantes en la resolución de problemas de aplicaciones de la derivada se registra en la Pedagogía 2. El rendimiento promedio de ambas pedagogías es 61,8%.

A continuación, la Figura 3 registra los resultados en porcentajes según las etapas de solución, obtenidos en el análisis de cada una de las respuestas de los estudiantes con el Modelo de Rasch en la prueba de resolución de tipos de problemas sobre derivada.

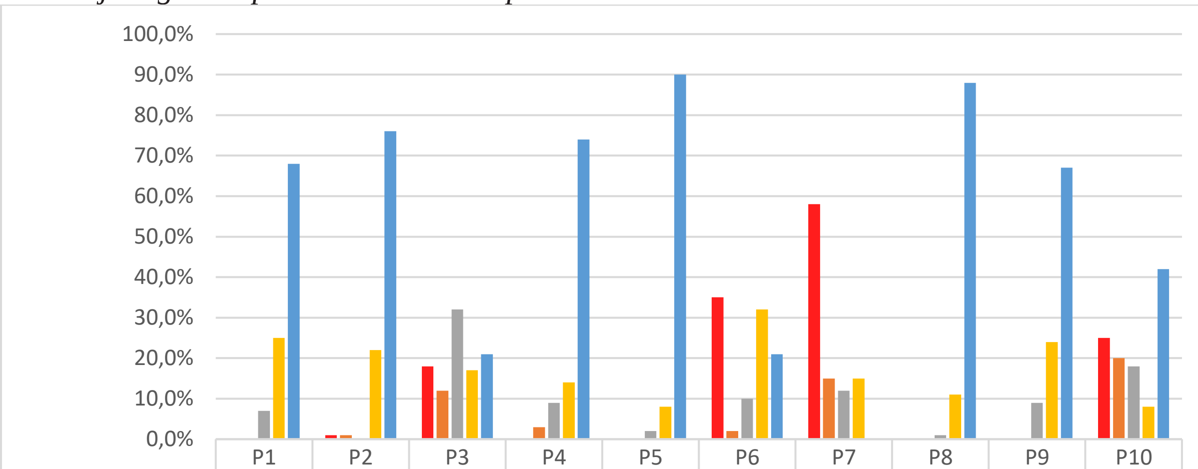
Los porcentajes de rendimiento académico de los estudiantes de ambas pedagogías, según los tipos de problemas rutinarios de contexto real, realista, fantasista y puramente matemático, y en los problemas no rutinarios, en función de la etapa completación según la escala de puntajes del modelo de Rash, se presentan a continuación en la Figura 4.

Como se puede apreciar en la figura 4, el rendimiento que se exhibe en general, supera levemente el 60% de logro en este importante tópico de las matemáticas (el promedio es 61,8% en los 10 problemas).

Sin embargo, se registraron altos niveles de logro en los problemas rutinarios de contexto puramente matemáticos P5 y P8 con 90% y 88% respectivamente, y en los problemas rutinarios de contexto fantasista P2 y P4 con 76% y 74% de logro respectivamente. Los problemas puramente matemáticos evocan exclusivamente a objetos matemáticos y sus relaciones, y forman parte mayoritaria en la literatura del Cálculo Diferencial. En tanto que, los problemas fantasistas, son aquellos que son fruto de la imaginación y no tienen fundamento en la realidad.

Figura 3.

Porcentaje según etapas de solución del problema

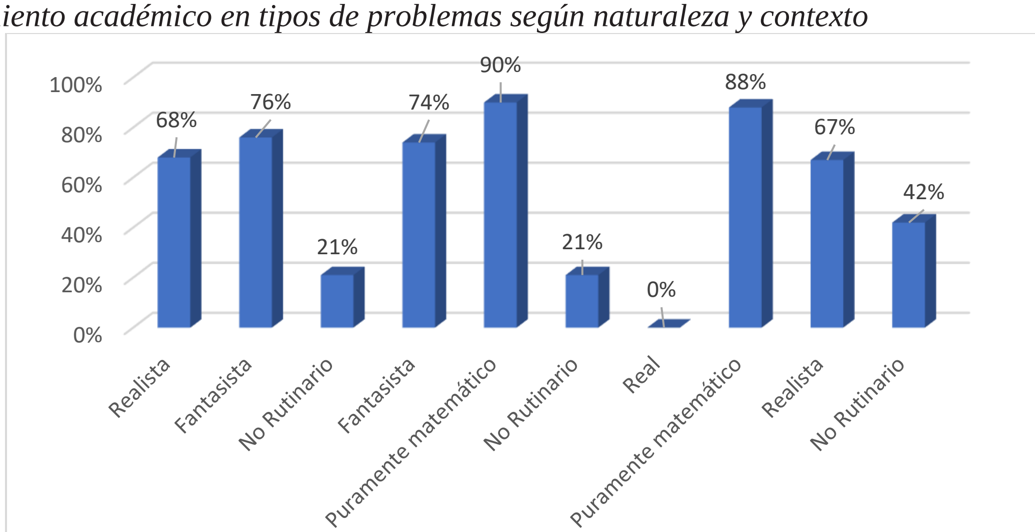


	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
No comienzo	0,0%	1,0%	18,0%	0,0%	0,0%	35,0%	58,0%	0,0%	0,0%	25,0%
Enfoque	0,0%	1,0%	12,0%	3,0%	0,0%	2,0%	15,0%	0,0%	0,0%	20,0%
Substancia	7,0%	0,0%	32,0%	9,0%	2,0%	10,0%	12,0%	1,0%	9,0%	18,0%
Resultado	25,0%	22,0%	17,0%	14,0%	8,0%	32,0%	15,0%	11,0%	24,0%	8,0%
Completación	68,0%	76,0%	21,0%	74,0%	90,0%	21,0%	0,0%	88,0%	67,0%	42,0%

Fuente: Datos de la investigación

Figura 4.

Rendimiento académico en tipos de problemas según naturaleza y contexto

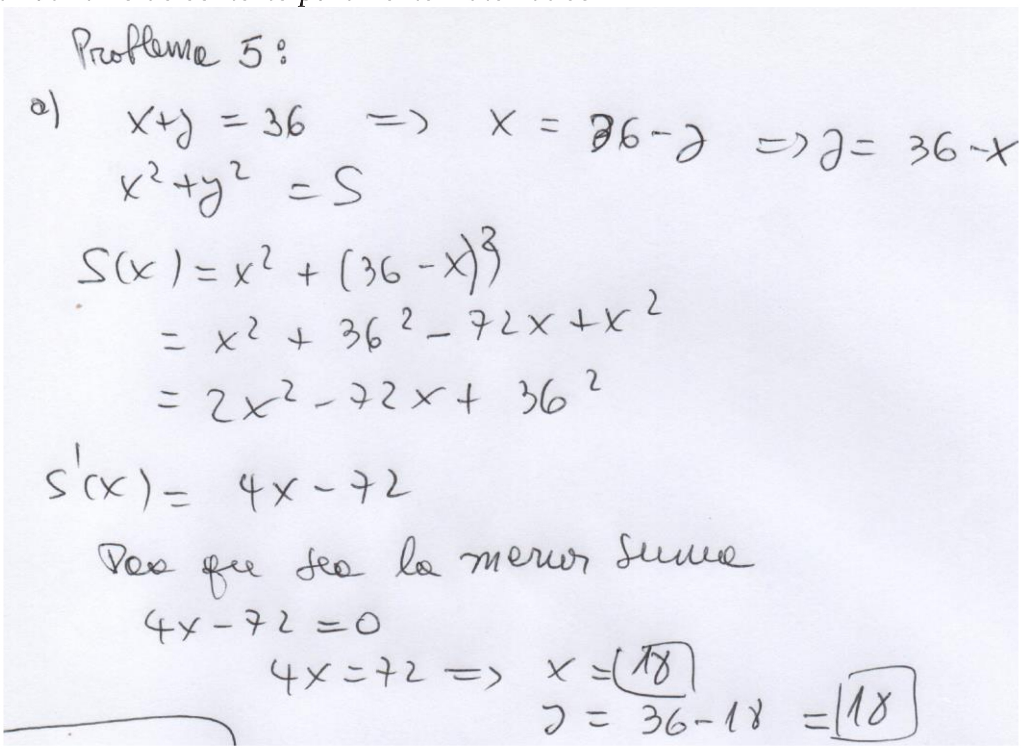


Fuente: Datos de la investigación

A continuación, se presenta el problema 5 y una solución correcta por parte de un estudiante.

Problema 5: "*La suma de dos números no negativos es 36. Hallar dichos números para que* *la suma de sus cuadrados sea lo más pequeña posible"*

Figura 5.
Problema rutinario de contexto puramente matemático



Fuente: Solución de un estudiante al problema 5

A continuación, se presentan los problemas de contexto fantasista P2 y P4 de la prueba con un ejemplo de respuesta de parte de un estudiante en el P4.

Problema 2: "*La función f(t) = t-2 es la derivada de la inflación en función del tiempo en uno de los siete reinos de Game of Thrones, cuando* $0 \leq t \leq 5$

Determinar el valor de t para que la inflación alcance el valor mínimo."

Problema 4: "*La velocidad (en m/s) que alcanza un Segnosaurus en una carrera de 200 metros, viene dado en función del espacio recorrido, x, por la siguiente expresión:* $f(x) = -0{,}00055x(x-300)$

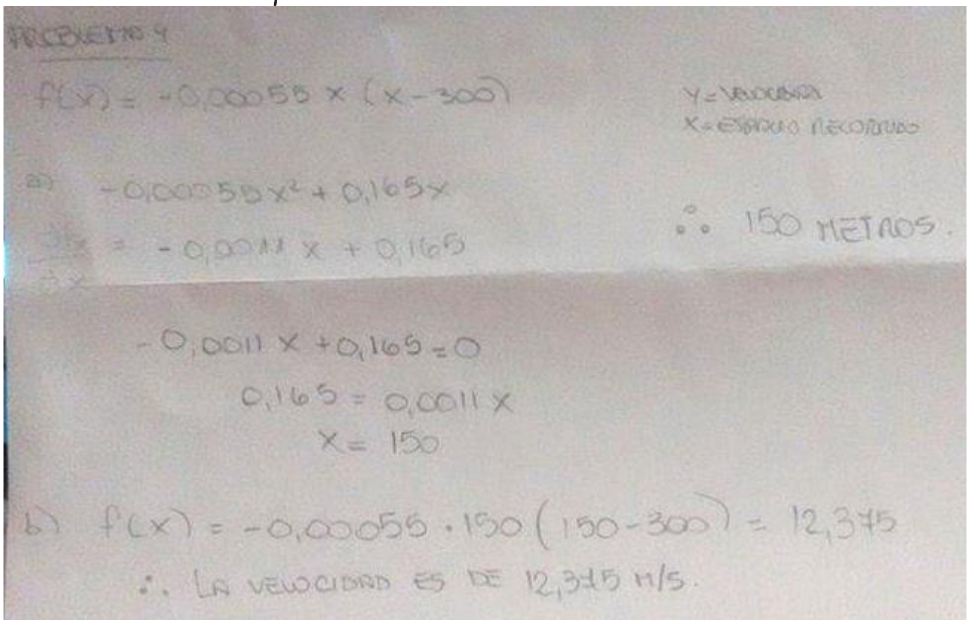
Deducir de forma razonada:

a) ¿Qué distancia ha recorrido el Segnosaurus cuando alcanza su velocidad máxima?

b) ¿Cuál es ésta velocidad?"

Figura 6.

Problema rutinario de contexto fantasista



Fuente: Solución de un estudiante al problema 4

Los menores rendimientos académicos en la resolución de tipos de problemas, se registraron en el problema rutinario de contexto real y en los no rutinarios. En el problema 7 (P7) rutinario y de contexto real, no se logró un método apropiado de resolución, por lo tanto, no se produjo ninguna solución correcta. Los problemas reales son aquellos que se producen efectivamente en la realidad y comprometen al alumno a actuar.

Ejemplo del problema real P7: "*En una hoja de cuaderno mida sus lados y construya una caja sin tapa cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determine el lado de los cuadrados que deben ser cortados, a fin de que el volumen sea el mayor posible*".

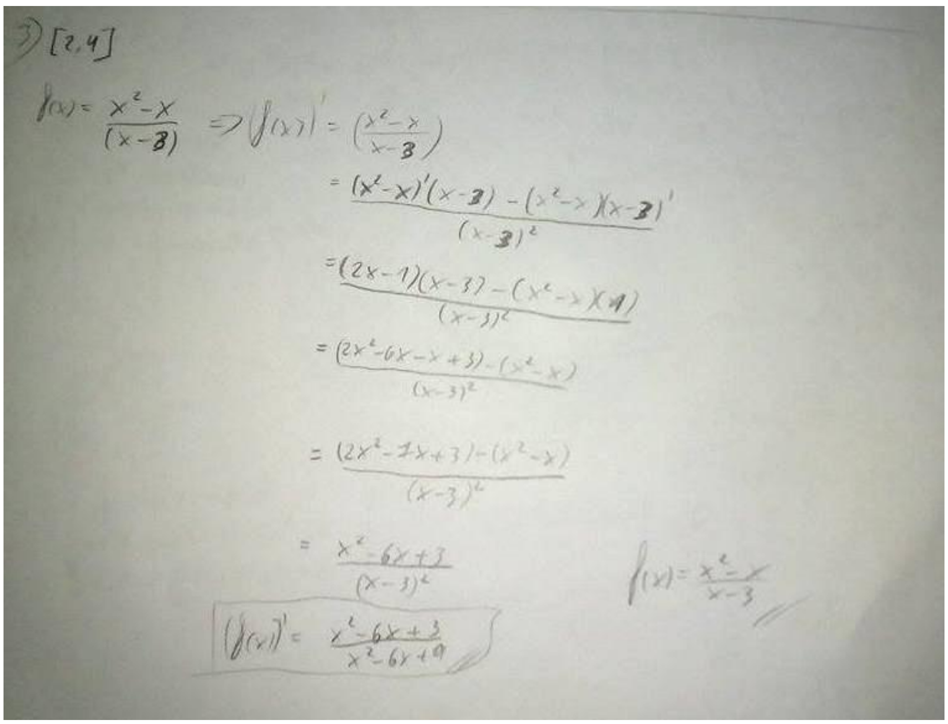
El enunciado propone una situación en contexto expresada en el lenguaje cotidiano, que corresponde a un ejercicio clásico en todos los textos de cálculo, cuando se aborda el tema de la optimización, pero que, para este contexto, requiere que el estudiante proponga las dimensiones para su resolución. De los resultados obtenidos, hay estudiantes que hacen un dibujo de la situación propuesta asignando datos, pero no logran avanzar; hay estudiantes que propusieron las expresiones algebraicas del área del rectángulo y el volumen para una caja sin tapa, pero no realizan ningún proceso o sustitución de valores conocidos; y estudiantes que argumentan que no saben cómo resolver este tipo de situaciones ya que no formaba parte de los problemas tratados en la asignatura Cálculo I.

Respecto a los problemas no rutinarios P3, P6 y P10, se constató en promedio, un 28% de logro. Un problema será no rutinario cuando un estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, para encontrarla. A continuación, se presenta la resolución de uno de ellos.

Problema 3: "*Encuentre una función derivable que tenga un punto crítico en el intervalo [2,4]*"

Figura 7.

Problema no rutinario



Fuente: Solución de un estudiante al problema 3

El estudiante propone una función racional infundada en relación a su derivada y además comete errores algebraicos, sin lograr avanzar en una solución correcta. En general en los intentos de resolución, se reflejan dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos involucrados, cuya comunicación se requiere que se realice en forma escrita a través de los signos matemáticos, con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos, para lograr la etapa de solución correcta.

DISCUSIÓN

En el contexto de la Educación Matemática, la resolución de problemas se ha convertido en una parte inseparable del aprendizaje matemático. La habilidad de resolución de problemas se considera fuertemente relacionada con el éxito de la matemática educativa, por lo que la integración de la resolución de problemas durante el proceso de aprendizaje debería ser necesaria (Sanjaya et al., 2018). Además, la resolución de problemas generalmente se considera como la actividad cognitiva más crítica en el aprendizaje diario. Se encuentra en el centro de la formación inicial de profesores de matemáticas y sigue siendo central en las matemáticas escolares. La resolución de problemas son un mecanismo de instrucción tradicional para aprender cómo aplicar las matemáticas. Los problemas se formulan para que un estudiante pueda identificar datos relevantes para la pregunta formulada y elegir un conjunto de operaciones matemáticas que conduzcan a la respuesta. Sin embargo, la complejidad y la interconexión de los problemas contemporáneos, exigen que los métodos de resolución de problemas sean moldeados por el pensamiento sistémico y asociados a su vida diaria.

La matemática es una asignatura muy abstracta. Para los estudiantes, el aprendizaje suele ser mejor cuando pueden relacionarlo con la vida real. A medida que las matemáticas se vuelven más avanzadas y desafiantes, eso puede ser difícil de hacer. Como resultado, muchos estudiantes necesitan trabajar y practicar más, para entender conceptos matemáticos más abstractos (Leiss et al., 2019).

Los textos de Cálculo, incluyen generalmente como aplicaciones de la derivada, los problemas de optimización para determinar el mínimo absoluto y / o el máximo de una función que depende de dos variables dada una restricción o relación que las dos variables siempre deben satisfacer. Los ejemplos tienden a centrarse alrededor de objetos geométricos tales como cuadrados, cajas, cilindros, etc. También tienen aplicaciones básicas de derivadas en el campo de los negocios, donde se vuelve a encontrar el valor máximo y / o mínimo de la función y se define la función de costo marginal, el costo promedio, la función de ingreso, la función de ingreso marginal y la función de ganancia marginal.

Un ejemplo de confusión entre conceptos en estas aplicaciones, es la velocidad media con la instantánea en un punto. En este sentido, se aboga por la idea de que se alcanzará una comprensión completa de la derivada cuando se reconozcan y reconstruyan los significados de razón, límite y función en diferentes contextos (Zandieh 2001; Zandieh y Knapp, 2006). A excepción de la alusión al lenguaje, lo anterior indica la tendencia natural expuesta por la casi mayoría de los textos de Cálculo, revelando claramente que el enfoque previo a la presentación de la derivada es la canónica y, por tanto, la que se sigue en la mayoría de los casos.

De acuerdo a Sadler y Sonnert (2018) tomar el Cálculo en la escuela secundaria, no garantiza tener éxito más adelante en el Cálculo de la universidad, lo que es más importante es dominar los requisitos previos, el álgebra, la geometría y la trigonometría que conducen al Cálculo. Siti (2019) al analizar el bajo resultado del aprendizaje de los estudiantes para los contenidos de Cálculo, indica que en general, los estudiantes experimentan dificultades en el nivel de la escuela secundaria con respecto a las funciones, sus gráficos y a la manipulación algebraica. Estos temas generalmente surgen inicialmente en las clases de álgebra, y obstaculizan la resolución de problemas asociados y contextualizados específicamente al comportamiento de las funciones en intervalos, determinación de máximos y mínimos de una función en su dominio más amplio, optimización, estimaciones de la velocidad y aceleración.

Con los resultados obtenidos en nuestra investigación, aplicando tipos de problemas de contexto real, realista, fantasista y puramente matemático, se ha mostrado la influencia que tienen los contextos, concordando con Sánchez-Matamoros et al. (2008), ya que los estudiantes no conectan automáticamente un proceso vinculado con la idea de derivada (razón, límite, función, etc.) dado en un contexto con el mismo proceso que aparece en otro contexto.

Sin embargo, los datos de nuestro estudio, mostraron que cuando se les presentan problemas de derivadas en un contexto muy poco utilizado en los libros de Cálculo Diferencial e Integral, como son los problemas de contexto fantasista, que son fruto de la imaginación y no tienen fundamento en la realidad, con uso de situaciones de personajes de películas de la actualidad, y de su propia cotidianidad, los estudiantes de las dos pedagogías, demostraron su interés por abordarlos y un muy alto nivel de logro en su resolución, coincidiendo con investigaciones anteriores (Díaz, 2019, 2020; Díaz y Aravena, 2021; Díaz y Flores, 2022).

En matemáticas, los estudiantes resuelven problemas manipulando números e interpretando símbolos, pero una comprensión de las matemáticas requiere más que el conocimiento de números y símbolos. Las matemáticas también requieren un componente de habilidad en la resolución de ciertos problemas, que involucren al estudiante en su propio actuar y que se produzcan efectivamente en la realidad, como son los problemas de contexto real, así como de problemas cognitivamente no triviales, como son los no rutinarios.

A través de este estudio, se hizo evidente que los futuros docentes de matemática de secundaria investigados, tienen habilidades para resolver problemas rutinarios de contexto, pero no las suficientes para resolver problemas de aplicaciones de la derivada, lo cual se evidencia en el contexto real y en los problemas no rutinarios.

La capacidad de abordar problemas no rutinarios, aquellos que no pueden resolverse con un método o fórmula conocidos y requieren análisis y síntesis, así como creatividad, es cada vez más importante en el siglo XXI (Neubert, 2015). Sin embargo, cuando se enfrentan a un problema no rutinario, los estudiantes tienden a aplicar incorrectamente los procedimientos memorizados en lugar de modificarlos o desarrollar nuevas soluciones, coincidiendo en nuestros hallazgos con Nguyen (2020), Crooks y Alibali (2014), Richland (2012). Una posible fuente de esta dificultad, es el enfoque típico de instrucción en la formación inicial en matemática sobre la memorización y la aplicación de procedimientos de rutina. Tal enfoque, hace que los estudiantes sean competentes en la ejecución de procedimientos de memoria, pero hace poco para ayudarlos a comprender la base conceptual de los procedimientos o pensar creativamente sobre problemas nuevos, los cuales son esenciales para desarrollar flexibilidad en la resolución de problemas contextualizados en Cálculo en general y en tipos de problemas de derivadas en particular. Un primer paso importante para abordar este problema, es evaluar cómo los estudiantes actualmente abordan la resolución de problemas no rutinarios, para que se puedan diseñar las intervenciones de aprendizaje adecuadas.

CONCLUSIÓN

Esta investigación proporciona evidencia concreta y generalizable sobre la utilidad y la necesidad de implementación de problemas contextualizados. De los resultados basados en el rendimiento académico de los estudiantes de formación inicial en matemática, se puede inferir que, es necesario incluir tipos de problemas que permitan contextualizar contenidos matemáticos específicos, como es el caso de las derivadas.

En esta investigación con dos carreras distintas, pero de formación curricular similar, se develan dificultades en el aprendizaje de las derivadas, producto de múltiples situaciones, que se entrelazan entre sí, y que van desde la orientación y planificación curricular de la asignatura común para las dos pedagogías, hasta la naturaleza propia de la matemática que se manifiestan en sus simbolismos y en sus procesos de pensamiento, hasta el desarrollo cognitivo de los propios estudiantes.

Dado que en promedio se constató un porcentaje cercano al 62% de logro entre ambos grupos, es evidente que los estudiantes que investigamos en estas dos carreras de pedagogía, requieren aumentar las competencias matemáticas necesarias para resolver problemas de aplicaciones de la derivada. Sin embargo, luego de revisar la evidencia presentada, no consideramos que la explicación del por qué ciertos estudiantes dan respuesta a un problema y otros no, se debe a que los primeros se encuentran en una etapa más avanzada de pensamiento o desarrollo cognitivo que estos últimos. Tampoco se debe únicamente a que los estudiantes que resolvieron un problema saben más operaciones o conceptos matemáticos que los otros. En cambio, la evidencia nos muestra que en la solución de un problema intervienen varias competencias y recursos cognitivos de granularidad más pequeña que una etapa de pensamiento, y que incluso van más allá de únicamente el razonamiento lógico-matemático. Nuestra alternativa teórica hace referencia a que, entre la comprensión del problema verbal y la solución correcta, un sujeto debe relacionar, en lo posible, los contenidos matemáticos con situaciones contextualizadas y significativas para él, que le van a permitir incrementar progresivamente el nivel de abstracción del contenido matemático, según su ritmo de aprendizaje que debe ser guiado y supervisado en la traducción entre lenguaje verbal y códigos matemáticos, hasta que ellos puedan realizarlos con propiedad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro-Carvajal, C. y Fonseca-Castro, J. (2018). Resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable: Perspectiva de los docentes de matemática. *Uniciencia*, *32*(2), 42-56. https://doi.org/ 10.15359/ru.32-2.3

Bentley, B. y Yates, G. (2017). Facilitating proportional reasoning through worked examples: Two classroom-based experiments. *Cogent Education*, *4*(1), 1297213. https://doi.org/10.1080/2331186X.2017.1297213

Blanco, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon*, *25*, 49-60.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problema solving, modeling, applications and links to others subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Torulf, J. y Palmgerg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 72-87. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.10.001

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martínez-Luaces, V. y Törner, G. (2016). *Teaching and learning of*

Calculus. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8_1

Christensen, W.M. y Thompson, J.R. (2012). Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 8*(2), 1-5. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.023101

Crooks, N.M. y Alibali, M.W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, *3*(4), 344-377. https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001

Da, N.T. (2022). Approach to realistic mathematics education in teaching calculus for high school students. A case of the application of derivatives. *International Journal of Professional Development, Learners and Learning*, *4*(1), ep2203. https://doi.org/10.30935/ijpdll/11832

Díaz, V. (2019). Limits problem solving in engineering careers: competences and errors. International *Journal of Education and Pedagogical Sciences*, *13*(7), 933-939. http://doi.org/10.5281/zenodo.3299965

Díaz, V. (2020). Difficulties and performance in mathematics competences: solving problems with derivatives. *International Journal of Engineering Pedagogy*, *10*(4), 35-53. https://doi.org/10.3991/ijep.v10i4.12473

Díaz, V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *45*, 33-41.

Díaz, V. y Poblete, A. (2004). *Evaluación Longitudinal de Aprendizajes Matemáticos, Objetivos Transversales e Indicadores de Contexto*. *Proyecto Fondecyt N°1040035.* Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica

Díaz, V., Poblete, A. y Gallardo, M. (2019). Rediseño curricular por competencias: experiencia en la formación Inicial universitaria en Chile. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *10*(27), 72-91. http://doi.org/10.22201/iisue.20072872e.2019.27.341

Díaz, V. y Poblete, A. (2019). Competencias matemáticas: Desempeño y errores en la resolución de problemas de límites. *Paradigma*, *40*, 358-383. http://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2019.p358 - 383.id733

Díaz, V. y Aravena, M. (2021). Solving problem type and levels of proportional reasoning in initial training of mathematics teachers. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *10*(3), 296-317. http://doi.org/10.17583/redimat.7125

Díaz, V. y Flores, M. (2022). Resolución de tipos de problemas contextualizados y análisis de errores: un estudio de casos. *Estudios Pedagógicos*, *42*(8), 9-34. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052022000200009

Dickerson, D. y Pitman, D. (2016). An examination of college mathematics majors' understandings of their own written definitions. *Journal of Mathematical Behavior*, *41*,1-9. https://doi.org/ 10.1016/j.jmathb.2015.11.001

Fatmanissa, N. y Usdiyana, D. (2019). Student difficulties in word problems of derivatives: A multisemiotic perspective. *Journal of Physics: Conference Series*, *1157*, 032111. https://doi.org/ 10.1088/1742-6596/1157/3/032111

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(2), 63-84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

García, M. y Dolores, C. (2012). Una propuesta para contribuir a la comprensión de la derivada. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 385-393). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

García-García, J. y Dolores C. (2019). Conexión entre derivada e integral en el registro algebraico en bachillerato. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 4*, 11-30.

Hitier, M. y González-Martín, A.S. (2022)."It all depends on the sign of the derivative": A praxeological analysis of the use of the derivative in similar tasks in mathematics and mechanics. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 2421-2428). ERME/Free University of Bozen-Bolzano.

Hitt, F. y González-Martín, A.S. (2016). Generalization, covariation, functions, and calculus. En Á. Gutiérrez, G.C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-38). Sense Publishers.

Jaafar, R. y Lin, Y. (2017). Assessment for learning in the calculus classroom: A proactive approach to engage students in active learning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *12*(3), 503-520. https://doi.org/10.29333/iejme/628

Juter, K. (2012). The validity of students' conceptions of differentiability and continuity. En C. Bergsten, E. Jablonka y E. Raman (Eds.), *Evaluation and Comparison of Mathematical Achievement: Dimensions and Perspectives* (pp. 121-130). Linköping University.

Leiss, D., Plath, J. y Schwippert, K. (2019). Language and mathematics - key factors influencing the comprehension process in reality-based tasks. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *21*(2), 131-153. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570835

Martínez, S., Munoz, J.M., Oller, A.M. y Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20*(1), 95-122. https://doi.org/10.12802/relime.17.2014

Montoya-Delgadillo, E., Páez, R., Vandebrouck, F. y Vivier, L. (2018). Deconstruction with localization perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 139-160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Neubert, J.C., Mainert, J., Kretzschmar, A. y Greiff, S. (2015). The assessment of 21st century skills in industrial and organizational psychology: complex and collaborative problem solving. *Industrial and Organizational Psychology, 8*(2), 238-268. https://doi.org/10.1017/iop.2015.14

Nguyen, H.A., Guo, Y., Stamper, J. y McLaren, B.M. (2020). Improving students' problem-solving flexibility in non-routine mathematics. En I. Bittencourt, M. Cukurova, K. Muldner, R. Luckin, y E. Millán (Eds.), *Artificial Intelligence in Education. AIED 2020. Lecture Notes in Computer Science* (pp. 409-413). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-52240-7_74

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18. https://doi.org/10.1007/BF00704699

Pino, J. (2015). Tipos de problemas de matemáticas. En L.J. Blanco, J.A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de Problemas en Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Primaria* (pp.187-207). Universidad de Extremadura.

Planinic, M., Susac, A., Ivanjek, L. y Milin Šipuš, Ž. (2019). Comparing student understanding of graphs in physics and mathematics. En G. Pospiech, M. Michelini y B.S. Eylon (Eds.), *Mathematics in Physics Education* (pp. 233-246). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04627-9_10

Rasch, G. (1980). *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*. The University of Chicago Press.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., y Borba, M.C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM*, *46*(4), 507-515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Renkl, A. (2014). *Learning from worked examples: How to prepare students for meaningful problem solving applying science of learning in education: Infusing psychological science into the curriculum.* American Psychological Association.

Roorda, G., Vos, P. y Goedhart, M. (2015). An actor-oriented transfer perspective on high school students' development of the use of procedures to solve problems on rate of change. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(4), 863-889. https://doi.org/10.1007/s10763- 013-9501-1

Sadler, P.M. y G. Sonnert. (2018). The path to college calculus: The impact of high school mathematics coursework. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(3), 292-329. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.3.0292

Sanjaya, A., Johar, R., Ikhsa, M. y Khairi. L. (2018). Students' thinking process in solving mathematical problems based on the levels of mathematical ability. *Journal of Physics: Conferences Series*, *1088*, 012116. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1088/1/012116.

Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Mc Graw Hill.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Sevimli, E. (2017). Understanding students' hierarchical thinking: a view from continuity, differentiability and integrability. *Teaching Mathematics and its Applications*, *37*(1),1-16. https://doi.org/10.1093/teamat/hrw028

Siti, Y. (2019). Analysis of difficulty learning calculus subject for mathematical education students, *International Journal of Scientific & Technology Research*, *8*(3), 80-84.

Swidan, O. y Yerushalmy, M. (2014). Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment. *International Journal on Mathematics Education*, *46*(4), 517-531. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0583-1

Tallman, M., Carlson, M., Bressoud, D. y Pearson, M.A. (2016). Characterization of calculus I final exams in U.S. colleges and universities. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(1), 105-133. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0023-9

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B. y Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 9-29. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0007-x

Vila, A. (1995). ¿Problemas de matemáticas? ¿Para qué? una contribución al estudio de las creencias de profesores/as y alumnos/as. *Actas de la VII JAEM* (pp.32-37). Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas.

Vila, A. y Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Narcea.

Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una Introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 449-468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

Zandieh, M. (2001). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS. Issues in Mathematics Education*, *8*, 103-127. https://doi.org/10.1090/cbmath/008/06

Zandieth, M. y Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning. The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 1-17.

PROBLEM SOLVING IN DIFFERENTIAL CALCULUS IN THE INITIAL TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS

ABSTRACT

The objective of this research was to evaluate the level of achievement of initial training students, in solving derivative application problems, according to types of mathematical problems that take into account the nature and context in which a problem is posed. A descriptive study with a quantitative method was designed in two mathematics pedagogy courses at two Chilean universities. The results indicate the existence of knowledge gaps, which limit the possibilities of adequately solving situations cognitively non-trivial problems of Differential Calculus, as well as certain contexts, with an important exception of routine purely mathematical context problems, which exclusively evoke to mathematical objects and their relationships, and routine problems with fantasy contexts, which captured the interest of the students and achieved a very effective resolution. Although these problems are not based on reality, they are constructed using situations that students recognize in their daily lives.

Keywords: Types of problems; Derivatives; Nature and context; Non-routine problems; Mathematics pedagogy.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM CÁLCULO DIFERENCIAL NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

RESUMO

O objetivo desta investigação foi avaliar o nível de aproveitamento dos alunos da formação inicial, na resolução de problemas de aplicação derivada, de acordo com tipos de problemas matemáticos que têm em conta a natureza e o contexto em que um problema é colocado. Um estudo descritivo com método quantitativo foi desenvolvido em dois cursos de pedagogia matemática de duas universidades chilenas. Os resultados indicam a existência de lacunas de conhecimento, que limitam as possibilidades de resolver adequadamente situações cognitivamente não triviais problemas de Cálculo Diferencial, bem como certos contextos, com uma importante exceção de problemas de contexto puramente matemáticos rotineiros, que evocam exclusivamente objetos matemáticos e seus relacionamentos e problemas rotineiros com contextos de fantasia, que captaram o interesse dos alunos e alcançaram uma resolução muito eficaz. Embora esses problemas não sejam baseados na realidade, eles são construídos a partir de situações que os alunos reconhecem em seu cotidiano.

Palavras-chave: Tipos de problemas; Derivados; Natureza e contexto; Problemas não rotineiros; Pedagogia matemática.

Verónica Díaz Quezada
Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile.
mvdiaz@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0001-5483-3428
Doctora en Educación con Especialización en Matemáticas. Magister en Evaluación Educativa y Profesora de Matemáticas de Secundaria. Académica titular de la Universidad de Los Lagos e Investigadora del Instituto Interuniversitarios de Investigación Educativa IESED-CHILE. Líneas de trabajo en investigación: Resolución de problemas; Medición y evaluación en matemáticas; Competencias matemáticas y profesionales; Investigación en educación universitaria en pedagogía en matemática y en diversas ingenierías, en las áreas de álgebra, cálculo diferencial, aritmética y geometría. Con participación activa en proyectos de investigación nacionales de CONICYT actual ANID, e internacional de la Cátedra Andrés Bello, en conjunto con países latinoamericanos y europeo. Consultora matemática para la UNESCO en el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad Educativa y evaluadora de pregrado y posgrado para la Comisión Nacional de Acreditación CNA para las universidades en Chile. Fundadora del Doctorado en Educación Matemática y del Magister en Educación Matemática en la Universidad de Los Lagos.

Felipe Muñoz Cañas
Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile.
felipe.munoz@ulagos.cl
https://orcid.org/0001-6445-7251
Ingeniero Civil en Informática y Telecomunicaciones. Magister en Tecnologías de la Información. Académico de la Universidad de Los Lagos. Líneas de trabajo de investigación: Didáctica de la Ingeniería Civil en Informática y Minería de datos. Investigador alterno en proyectos de investigación relativos a manuales interactivos y conteo de aves mediante drones y técnicas de visión artificial en praderas agrícolas para carreras de Ingeniería.

Capítulo 2

PROPONIENDO UN *CURRÍCULO MATEMÁTICO TRIVIUM* PARA LOS CURSOS DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA ETNOMODELACIÓN[3]

Milton Rosa

Daniel Clark Orey

RESUMEN

Es necesario difundir la discusión relacionada al Currículo Trivium desde la perspectiva de la Etnomodelación con el contexto de la Educación Matemática para los futuros profesores de Matemática. Es importante analizar los conceptos de literacia, materacia y tecnoracia, considerando que la Matemática está presente en la realidad y configurando la sociedad. El conocimiento matemático mecánico e instrumental no es suficiente para desarrollar en los alumnos una actitud crítica y reflexiva con relación a la propia realidad. Así, la acción pedagógica del Currículo Trivium posibilita el desarrollo de una actitud interrogante sobre el poder configurador de la Matemática en la sociedad. La literacia es necesaria para capacitar a los alumnos a utilizar las señales y los códigos para responder a las demandas de las actividades diarias, así como para comprender, entender y organizar el propio mundo con la comprensión de las informaciones trasmitidas por diferentes medios. La materacia es la capacidad de los alumnos para utilizar los símbolos, los códigos y el razonamiento matemático para que puedan sugerir etnomodelos y utilizarlos en la solución de situaciones-problema cotidianas, así como evaluar los resultados obtenidos en sus resoluciones con la utilización de los recursos tecnológicos por medio de la tecnoracia.

Palabras clave: Curriculum Trivium; Cursos de Formación; Etnomodelación; Matemática; Profesores de Matemática.

[3] **Como citar:** Rosa, M. y Orey, D.C. (2024). Proponiendo un *Currículo Matemático Trivium* para los Cursos de Formación de Profesores de Matemática desde la Perspectiva de la Etnomodelación. En M.D. Aravena-Díaz y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades* (pp. 34-56). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

CONSIDERACIONES INICIALES

En este capítulo proponemos una reflexión basada en el *Currículo Trivium* (D'Ambrosio, 1999) compuesto por la literacia, materacia y tecnoracia, que hace posible el desarrollo de una acción pedagógica dirigida a los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática*, fundamentada en la perspectiva de la Etnomodelación, así como en la elaboración de etnomodelos que son representaciones socioculturales de las situaciones-problema cotidianas contextualizadas en salas de aula. En este sentido, Rosa y Orey (2017) argumentan sobre la importancia de que esa visión innovadora del currículo matemático esté valorizada en el *Proyecto Pedagógico* de esos Cursos.

En ese currículo matemático, la literacia es la capacidad que los alumnos tienen para procesar las informaciones presentes en su día a día; la materacia es la capacidad que los alumnos tienen para interpretar y analizar las señales y los códigos de manera que propongan etnomodelos para que puedan encontrar soluciones a los problemas enfrentados diariamente mientras la tecnoracia es la capacidad que los alumnos tienen para utilizar y combinar los diferentes instrumentos materiales y tecnológicos para auxiliarlos en la solución de las situaciones-problema propuestas en sala de aula.

A partir de esa perspectiva, las situaciones-problema relacionadas con la vida diaria pueden ser contextualizadas, posibilitando que los futuros profesores de Matemática se comprometan con el desarrollo del pensamiento matemático crítico y reflexivo, que está más allá de la experiencia ofrecida por la escuela tradicional en su práctica docente, pues busca promover su conexión con los *saberes* y *haceres* locales encontrados en la propia comunidad (Rosa y Orey, 2017).

Para English (2006), esos alumnos precisan estar expuestos a las situaciones-problema que cuantifican informaciones cualitativas encontradas en el propio contexto sociocultural. Por esto, Rosa y Orey (2017) afirman que la Etnomodelación posibilita que esos alumnos se conciencien sobre las diferentes maneras de matematizar los problemas contextualizados en el ambiente escolar al lidiar con situaciones curriculares que incluyan la utilización del Currículo Trivium, así como la elaboración de etnomodelos.

Por consiguiente, es importante que los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática* discutan sobre la naturaleza colaborativa de la Etnomodelación, buscando proporcionar la reflexión de los futuros profesores sobre su práctica docente, permitiendo las deliberaciones individuales o en grupo sobre la implantación práctica de acciones pedagógicas y estrategias de enseñanza alternativas para el proceso de enseñanza y aprendizaje en Matemática (Rosa y Orey, 2017).

Para Orey y Rosa (2021), este análisis diagnóstico y reflexivo de la documentación del proceso formativo propicia en los futuros profesores la confianza y la autoeficacia necesarias para que defiendan las múltiples dimensiones de la práctica docente por medio de acciones que pueden ser consideradas insubordinadas y creativas.

La Etnomodelación emergió como una respuesta a las nuevas demandas sociales y, también, como una construcción cultural que está enraizada en las representaciones de los acontecimientos cotidianos por medio de la utilización de una diversidad de instrumentos matemáticos que son elaborados para auxiliar a los futuros profesores de Matemática en la explicación, comprensión, entendimiento y representación de los fenómenos que ocurren en la vida diaria al conectar los contenidos matemáticos relacionados con las situaciones-problema escolares de aprendizaje a los contextos locales de sus comunidades (Rosa y Orey, 2013).

Es importante destacar que, para Orey y Rosa (2021), en la Educación Matemática, ese enfoque educacional está considerado como la antítesis de los modelos tradicionales de oferta de Curso*s de Formación de Profesores de Matemática*, teniendo en cuenta que busca el desarrollo de una acción pedagógica dirigida hacia el trabajo pedagógico enraizado en políticas escolares marginales, como, por ejemplo, a los alumnos de raza negra, con deficiencias, con bajo rendimiento escolar y provenientes de la clase trabajadora.

Sin embargo, ese enfoque educacional depende de la utilización de estrategias y técnicas de enseñanza y aprendizaje en Matemática que son elaboradas por un grupo de profesionales provenientes, prioritariamente, de la clase media blanca, que tienen dificultades para comprender las experiencias y las vivencias de alumnos provenientes de otros grupos culturales (Gutiérrez, 2012). En ese caso, los futuros profesores pueden ser considerados como profesionales insubordinados y creativos, que por medio de su práctica pedagógica pueden utilizar alternativas didácticas innovadoras que pueden alcanzar mejores resultados para el bien común de sus comunidades (Orey y Rosa, 2021).

Consecuentemente, el principal objetivo de este capítulo es reflexionar sobre el Currículo Trivium en los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática*, que busca promover de manera crítica y reflexiva el desarrollo de instrumentos comunicativos, analíticos, materiales y tecnológicos necesarios para la convivencia pacífica de los miembros de grupos culturales distintos en la sociedad contemporánea del siglo XXI (D’Ambrosio y D’Ambrosio, 2013).

Ese currículo propone una acción pedagógica que busca lidiar con la resolución de problemas, con el juicio crítico y la sensibilidad cultural, que procuran valorizar y respetar los contextos matemáticos locales al abarcar formas distintas de pensar, razonar y conocer las diferentes lógicas matemáticas y sus distintas visiones de mundo, cosmologías y paradigmas.

De acuerdo con Rosa (2010), esa acción pedagógica tiene como objetivo deconstruir el discurso matemático dominante al promover discusiones innovadoras sobre la naturaleza de la Matemática o su papel en el desarrollo de la humanidad. En este sentido, es preciso resaltar que la acción pedagógica desarrollada en *Cursos de Formación de Profesores de Matemática* promueva la conexión entre el saber/hacer matemático local con el conocimiento matemático escolar/académico por medio del Currículo Trivium desde la perspectiva de la Etnomodelación.

UN CURRÍCULO TRIVIUM PARA LA MATEMÁTICA: LA PERSPECTIVA DE LA ETNOMODELACIÓN EN LOS CURSOS DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Las salas de aula pueden ser consideradas como ambientes en los cuales los alumnos y profesores aprenden a estudiar prácticas matemáticas inspiradas y desarrolladas desde la perspectiva de la Etnomodelación (Rosa y Orey, 2017), requiriendo una reconceptualización curricular que busque el desarrollo de una acción pedagógica para los futuros profesores de Matemática de Educación Básica.

Así, el objetivo de la Etnomodelación está relacionado con el desarrollo de competencias y habilidades de los alumnos por medio del estudio de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas conectadas con su propio contexto sociocultural, enfatizando la importancia de la comunidad en relación con el ambiente educacional al conectar la Matemática escolar/académica a las prácticas culturales desarrolladas y utilizadas localmente (Rosa y Orey, 2010).

Por ejemplo, los resultados del estudio dirigido por Rosa y Orey (2016) destacan que la propuesta de la Etnomodelación y del Currículo Trivium para los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática* está en sintonía con las principales tendencias actuales de la Educación Matemática, considerando que los futuros profesores de esta disciplina pueden desarrollar habilidades específicas para investigar las ideas y las prácticas matemáticas locales que son desarrolladas fuera del contexto escolar, para exponerlas pedagógicamente a los alumnos por medio de la elaboración de actividades contextualizadas en la comunidad escolar.

Por esto, para Orey y Rosa (2021), esa acción pedagógica puede ser considerada como un acto de resistencia y, en general, un desafío a la autoridad instituida, que se opone al desarrollo del bien común de alumnos provenientes de grupos minoritarios y marginados por su exclusión del sistema escolar por medio del uso de políticas educacionales discriminatorias.

En esa orientación, la acción pedagógica propuesta por la Etnomodelación proporciona un equilibrio al currículo matemático por medio de un enfoque sociocultural con la propuesta de actividades contextualizadas que posibilitan el desarrollo de un análisis holístico del contexto educacional, pues muchos procedimientos escolares abarcan el uso de técnicas, estrategias y prácticas presentes en el ambiente sociocultural de los alumnos (Chieus, 2004).

El principal objetivo de esa propuesta curricular está relacionado con la transformación de la Matemática en un terreno del conocimiento vivo y vinculado a situaciones reales en el tiempo y en el espacio, que haga posible a los alumnos analizar críticamente y reflexionar sobre fenómenos que ocurren en la vida diaria (D'Ambrosio, 1999). De acuerdo con este enfoque, la comunidad escolar se vuelve un ambiente propicio para el desarrollo de una acción pedagógica de los profesores que utilizan los contenidos matemáticos necesarios para el desarrollo del currículo basándose en las actividades realizadas localmente (Damazio, 2004).

Por ejemplo, en el estudio realizado en una comunidad de horticultores en Brasil, Bandeira y Lucena (2004) investigaron las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas presentes en la producción y comercialización de hortalizas. Esta investigación reveló conocimientos matemáticos específicos producidos por los horticultores, que eran diferentes de los códigos matemáticos utilizados en las escuelas. Los resultados de este estudio muestran que los alumnos se concienciaron sobre la existencia de lenguajes matemáticos distintos con relación a los procedimientos para contar que son utilizados en la comunidad y en la escuela.

En ese sentido, Rosa y Orey (2006) afirman que los miembros de ese grupo comparten el dominio de las prácticas matemáticas relacionadas con la materacia que se concentran en su capacidad de utilizar ideas y procedimientos matemáticos desarrollados localmente que son aplicados en el propio contexto sociocultural. De este modo, Bandeira y Lucena (2004) argumentan que el conocimiento matemático adquirido localmente por los horticultores de ese grupo cultural específico estaba relacionado con el desarrollo de su propia materacia, que ayudó a los alumnos a comprender la conexión entre la escuela y el conocimiento matemático local.

Ese contexto destaca que un presupuesto importante de la Etnomodelación es alertar a los profesores sobre cuáles aspectos culturales de la Matemática, que están enraizados en las prácticas comunitarias, pueden ser pedagógicamente trabajados en las salas de aula. Este enfoque ayuda a los alumnos a superar el uso de técnicas operatorias y la memorización de fórmulas por medio de una acción educativa que posibilita el desarrollo de estrategias distintas y el acceso a las diversas representaciones matemáticas (Rosa y Orey, 2017).

Esos enfoques hacen posible la propuesta de una acción pedagógica dirigida a los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática* que está relacionada con los sistemas de conocimientos matemáticos vinculados al día a día de los miembros de grupos culturales distintos, como, por ejemplo, los futuros profesores de Matemática, pues contienen ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que pueden ser matematizados y traducidos entre sistemas de conocimientos matemáticos distintos (Rosa y Orey, 2006).

Desde esa perspectiva, los miembros de esos grupos desarrollan diferentes tipos de matematización, que son formas distintas de conocer y utilizar el conocimiento matemático para comprender y entender el propio ambiente cultural, social, político, económico, ambiental y natural. Por consiguiente, los miembros de esos grupos desarrollarán, en el curso de la historia, maneras distintas de matematizar sus propias realidades (D'Ambrosio, 2001).

Así, la matematización es un proceso por el cual los futuros profesores de Matemática pueden utilizar herramientas matemáticas que posibilitan la organización, el análisis, la comprensión, el entendimiento y la resolución de problemas específicos que están presentes en el propio contexto sociocultural. Estas herramientas permiten la identificación y la descripción de ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que tienen por objeto ayudarlos en la esquematización, formulación y visualización de un determinado problema de maneras diferentes, propiciando el descubrimiento de relaciones y regularidades (Rosa y Orey, 2013).

Ese contexto posibilita la transferencia de un problema del mundo real para la sala de aula por medio de etnomodelos que son elaborados durante el proceso de matematización. Este enfoque permite que la matemática sea reinventada en el trabajo con situaciones que estén vinculadas a los problemas vivenciados cotidianamente por los miembros de grupos culturales distintos (Rosa y Orey, 2006).

Esa acción pedagógica promueve el desarrollo de la matematización de la propia realidad de los alumnos, que puede ser incentivada por los futuros profesores de Matemática en su práctica docente por medio de la elaboración de etnomodelos, representaciones generadas a través de inferencias locales. En este contexto, Rosa, Orey y Gavarrete (2017) argumentan que uno de los principales objetivos de esa acción pedagógica está relacionado con su aplicación en las prácticas pedagógicas docentes dirigidas al proceso de enseñanza y aprendizaje en Matemática fundamentado en la perspectiva de la Etnomodelación.

De acuerdo con Rosa y Orey (2017), los futuros profesores de Matemática pueden ser estimulados para el uso de sus propios modos de matematizar la realidad al valorizar las características socioculturales de los alumnos en su práctica docente. Así, la distinta formación cultural de los alumnos debe ser respetada para apoyarlos en la cimentación de su confianza en la construcción de los propios conocimientos matemáticos.

Este enfoque promueve la dignidad cultural de los alumnos al percibir que sus raíces socioculturales están incorporadas a la actuación pedagógica desencadenada en salas de aula. De esta manera, la matematización también busca promover la confianza de los alumnos, pudiendo atenuar sus percepciones negativas con relación a la Matemática.

Es importante destacar que la matematización es una de las etapas más importantes en el proceso de la Etnomodelación, pues posibilita la traducción de un determinado problema o situación para el lenguaje de la Matemática escolar/académica y viceversa, así como describe el proceso de elaboración de etnomodelos relacionados con los sistemas matemáticos locales que pueden ser traducidos por medio de representaciones matemáticas escolares (Cortes, 2017).

En consecuencia, para Rosa y Orey (2016), la Etnomodelación propicia el desarrollo matemático curricular de los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática*, pues incentiva, promueve y desarrolla el estudio de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas locales, encontradas en diversos contextos culturales que están en concordancia con el conocimiento local (émico) de sus miembros.

Por consiguiente, en la acción pedagógica de la Etnomodelación propuesta para los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática*, los futuros profesores de ese componente curricular analizan, interpretan y desarrollan sus etnomodelos y estrategias al utilizar los propios argumentos matemáticos. Estas competencias se relacionan con el proceso de matematización y, también, con la madurez de los alumnos para que puedan analizar esas representaciones, así como reflexionar críticamente sobre ese proceso (Orey y Rosa, 2021).

Por tanto, existe la necesidad de que los futuros profesores de Matemática desarrollen competencias y habilidades que los ayuden en la comprensión de la naturaleza de la Matemática como una ciencia, incluyendo sus aspectos socioculturales e históricos, así como la comprensión de su caráter interdisciplinar con otros campos del conocimiento.

Esta acción pedagógica requiere la elaboración de actividades enraizadas en las vivencias diarias, como, por ejemplo, la identificación de prácticas matemáticas locales, la esquematización, la formulación y la visualización de problemas, pues pretende el descubrimiento de relaciones y regularidades y del reconocimiento de semejanzas entre fenómenos diversos.

Siendo así, es necesario que los futuros profesores de Matemática se conciencien sobre el conocimiento matemático proveniente de prácticas sociales consecuencia de las relaciones culturales relacionadas con la resolución de problemas en contextos distintos. Este enfoque holístico posibilita que los alunos involucrados en ese proceso estudien la Matemática como un sistema de conocimiento humanista que está sacado de la propia realidad, que hace posible la comprensión de todos sus componentes, así como su interrelación (D'Ambrosio, 2001).

Esa perspectiva muestra que la Etnomodelación es una metodología científica que se caracteriza por la organización de estrategias de enseñanza y aprendizaje que tienen como objetivo la reorganización del currículo matemático para atender las demandas de la sociedad *glocalizada*[4] (Rosa y Orey, 2017). De manera que, para desarrollar su sensibilidad cultural y preparar a esos alumnos para la plena participación en la sociedad es necesaria su participación activa en las actividades curriculares matemáticas que estén vinculadas a las experiencias del mundo que vivencian.

En ese contexto, se espera que la Educación Matemática capacite a los futuros profesores de Matemática para utilizar los instrumentos comunicativos y que puedan lidiar de una manera crítica y reflexiva con los instrumentos analíticos. Ese contexto pretende promover la concienciación de esos alumnos sobre la conveniencia de los instrumentos tecnológicos, que son esenciales para el ejercicio de los derechos y deberes necesarios para la práctica de la ciudadanía y la lectura crítica y reflexiva de los fenómenos que ocurren en sus comunidades.

Literacia como la utilización de instrumentos comunicativos

La literacia puede ser definida como la capacidad de los alumnos para leer y escribir, pero en las

[4]En la sociedad glocalizada hay un mejor entendimiento del dinamismo cultural entre los conocimientos local y global, pues promueve maneras distintas para conectar las características locales (micro) a las de gran escala (macro) de la sociedad al promover la valorización y el respeto a las diferencias presentes en la sociedad (Rosa y Orey, 2017).

sociedades glocalizadas y tecnológicas de la actualidad existe la necesidad de difundir este concepto para incluir las competencias y habilidades necesarias para que esos discentes puedan trabajar con las características cuantitativas y cualitativas de la información y de la tecnología (D'Ambrosio, 2001).

Igualmente, la literacia está relacionada con la habilidad que los alumnos desarrollan para que puedan procesar las informaciones que ocurren en su vida diaria, buscando la resolución de situaciones-problema cotidianas al aplicar las técnicas de lectura, escritura, representación y cálculo, así como la utilización de diversos medios de comunicación y la internet (D'Ambrosio, 1999).

Por consiguiente, para D'Ambrosio (1999), la literacia puede ser entendida como la capacidad que los miembros de grupos culturales distintos desarrollan para procesar, entender y comprender las informaciones disponibles en el día a día. Estas informaciones incluyen la verificación de precios, de horarios y cronogramas con la utilización de las unidades de medida y de las operaciones matemáticas. Así, Rosa y Orey (2015) afirman que la literacia es un proceso que faculta a los alumnos a administrar con éxito sus rutinas diarias, así como para tener acceso a las informaciones disponibles diariamente en diferentes medios. La literacia también oferece los instrumentos comunicativos que ayudan a los alumnos a convertirse en ciudadanos participantes y activos en la sociedad.

Para D'Ambrosio (2008), con relación a las prácticas pedagógicas, es necesario que las actividades curriculares relacionadas a los estudios socioculturales se inicien con la historia de la familia de los alumnos y de la comunidad con el objetivo de buscar su identidad social y cultural. Para Rosa y Orey (2015), ese concepto puede ser aplicado al currículo matemático, considerando que los profesores pueden iniciar su actividad pedagógica con el contexto sociocultural de los alumnos, a fin de examinar las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas locales en el proceso de enseñanza y aprendizaje en Matemática.

Según los supuestos de la Etnomodelación, la literacia es entendida como la integración del contexto escolar y del de la comunidad por medio de la dinámica cultural del encuentro entre culturas distintas. Este dinamismo cultural posibilita a los alumnos cambiar conocimientos escolares y comunitarios al procesar informaciones verbales (escritas y habladas), corporales y mediáticas que son originadas en el propio contexto cultural de sus comunidades (Rosa y Orey, 2013). Con esa perspectiva, los futuros profesores de Matemática pueden mediar entre los alumnos de Educación Básica en la selección de un tema por medio del diálogo, de la discusión y del debate. Los temas pueden ser de naturaleza general, posibilitando a esos alumnos la investigación matemática y la creatividad, que están enraizadas en el propio contexto sociocultural.

De ese modo, la implementación de la Etnomodelación en salas de aula debe estar precedida de una investigación etnográfica de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas presentes en los sistemas socioculturales de la comunidad escolar y que pueden estar relacionados con objetivos del proceso de enseñanza y aprendizaje encontrados en las escuelas (Rosa y Orey, 2010).

Inmediatamente después de la creación de un banco de datos, esos alumnos inician su búsqueda de informaciones y modelos con el fin de familiarizarse con el tema elegido y, también, con su historia. Este enfoque puede ayudarlos a responder a su pregunta o tema investigado. En el desarrollo de este proceso, el incentivo de los profesores es fundamental para ayudar a los alumnos en la elección de un tema amplio que sea motivador y representativo de la comunidad escolar (Rosa y Orey, 2013).

A continuación, Rosa y Orey (2017) destacan la importancia de que los profesores discutan con los alumnos los temas propuestos con el objetivo de agruparlos en categorías, como, por ejemplo, industria, agricultura, economía, ecología, política, inflación, crecimiento urbano, consumo, medicina, tecnología, producción, polución, elecciones, políticas educacionales, salud y medioambiente.

Entonces, los alumnos interactuan con el tema elegido, recogiendo datos por medio de trabajos de campo, así como al buscar el tópico en *Internet*, bibliotecas escolares y digitales, libros, revistas y periódicos especializados, así como al entrevistar a especialistas en la temática investigada. El acceso a los datos cualitativos y cuantitativos es importante para ayudar a los alumnos en la formulación de las cuestiones relacionadas al tema elegido (Rosa y Orey, 2015).

Es importante resaltar que ese enfoque posibilita que los alumnos desarrollen sus capacidades de comunicarse de diferentes formas, como, por ejemplo, la visualización, el uso de los lenguajes verbal y corporal y de los recursos mediáticos, así como a través de señales, códigos, números y símbolos (D’Ambrosio y D'Ambrosio, 2013). Con ese enfoque, los alumnos analizan, interpretan, comprenden, procesan, entienden y responden a los estímulos ofrecidos por el estudio de los fenómenos modernos. Estas competencias se relacionan con el desarrollo de los instrumentos comunicativos de la literacia.

Ese proceso ayuda a los alumnos en la adquisición y en el desarrollo de aptitudes y habilidades relacionadas con la literacia por medio de la utilización de diferentes formas de comunicación: a) medios antiguos como los libros, la radio, la televisión y el periódico, b) medios nuevos, como los *blogs*, *youtube*, los *podcasts* y c) medios sociales, como *twitter*, *facebook* y el *podcamp*. Estos medios diversos ayudan a los alumnos a comprender la comunicación oral, escrita y gestual en su sentido más amplio (D'Ambrosio y D'Ambrosio, 2013).

Actualmente, de acuerdo con Rosa y Orey (2015), la conceptualización de literacia es más amplia, pues también incluye las competencias relacionadas con la materacia, como, por ejemplo, la interpretación de gráficos y tablas, así como la comprensión del lenguaje condensado de códigos y números, que pueden ser alcanzados por medio del uso de recursos tecnológicos como las calculadoras y los computadores. Este enfoque puede desencadenar acciones transformadoras en la comunidad escolar.

Por ejemplo, los resultados del estudio realizado por Bandeira y Lucena (2004) revelan ideas matemáticas asociadas a un grupo cultural específico, como la técnica del "par de cinco", que está presente en las actividades de producción y comercialización de hortalizas de una comunidad de horticultores en el estado de Rio Grande do Norte, Brasil. Este estudio evidencia la importancia de utilizar los propios conocimientos matemáticos como un elemento que potencia el proceso productivo y la preparación para la comercialización. En consecuencia, se revelaron conocimientos matemáticos específicos desarrollados por los horticultores, a menudo en un código diferente al código de las matemáticas escolares. Así, la alfabetización es la capacidad que tienen los estudiantes para procesar y utilizar la información presente en su vida diaria mediante la aplicación de técnicas y estrategias de lectura, escritura, lo que representa el cálculo y el uso de diversos medios de comunicación e internet, destacando su conexión con la literacia.

Materacia como la utilización de instrumentos analíticos

Para D'Ambrosio (1999), la materacia se relaciona con el conocimiento y la destreza que les son exigidos a los futuros profesores de Matemática para ayudar a los alumnos en la localización y utilización de las informaciones contenidas en documentos escritos, como, por ejemplo, mapas, diagramas, esquemas, programaciones, periódicos, revistas y libros, para que puedan procesar las informaciones que hagan posible la resolución de diferentes tipos de problemas.

Este enfoque valoriza el aprendizaje de conceptos matemáticos que pueden ayudar a esos alumnos a explicar, aprender, comprender y entender cómo lidiar de modo crítico y reflexivo con las situaciones-problema enfrentadas cotidianamente (D'Ambrosio, 1999).

En ese contexto, la materacia se refiere a las habilidades que permiten a esos alumnos el desarrollo del razonamiento lógico y matemático utilizado en una variedad de contextos. Este enfoque describe la capacidad de la utilización del conocimiento matemático para resolver problemas de la vida real, aplicando el sentido numérico, las operaciones numéricas y la interpretación de informaciones estadísticas (D'Ambrosio, 1999).

La materacia puede ser entendida como la capacidad de los alumnos para interpretar y gestionar los símbolos y los códigos, así como elaborar etnomodelos provenientes de la vida cotidiana. La materacia posibilita que los alumnos encuentren soluciones para los problemas enfrentados en su vida diaria al abstraer su resolución por medio de representaciones de los sistemas sacados de la realidad (Rosa y Orey, 2017).

Para Zevenbergen (2002), ese enfoque busca ayudar a los alumnos en el desarrollo de su competencia estadística, que es el desarrollo de la capacidad de recoger, leer, comprender, proponer hipótesis, inferir, producir e interpretar los datos con el objetivo de evaluar su validez, buscando la toma de decisión.

Así, la capacidad de matematizar problemas es esencial para el desarrollo de la materacia, pues es una forma de organizarlos utilizando las ideas y los conceptos matemáticos para la elaboración de los etnomodelos. Este enfoque ayuda a los profesores a organizar las actividades curriculares que orientan a los alumnos en la utilización de sus conocimientos tácitos, competencias y habilidades para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas (Cortes, 2017).

Ese contexto permite que la materacia proporcione los instrumentos simbólicos y analíticos que ayudan a los alumnos en el desarrollo de su creatividad, posibilitando la comprensión y la resolución de problemas y situaciones diversas (D'Ambrosio y D'Ambrosio, 2013). En este proceso, la materacia realiza un análisis de las relaciones entre las variables consideradas esenciales para la comprensión de los fenómenos estudiados, por medio de la elaboración de etnomodelos a partir de contenidos matemáticos conocidos y desconocidos (Rosa y Orey, 2010).

Desde la perspectiva de la Etnomodelación, la materacia puede ser descrita como el dominio de habilidades, estrategias, procedimientos, técnicas y competencias que pueden capacitar a los alumnos por medio de actuaciones pedagógicas en salas de aula propuestas por los futuros profesores de Matemática con relación a las maneras como los miembros de grupos culturales distintos explican sus creencias, tradiciones, mitos, símbolos y conocimiento científico y matemático por medio de la incorporación de etnomodelos relativos a las simulaciones matemáticas escolares y comunitarias (D'Ambrosio, 2017).

Ahora bien, es importante destacar que el énfasis en los etnomodelos no ocurre en torno de una técnica particular o de una teoría específica, considerando que su interpretación puede ser realizada culturalmente, socialmente, analíticamente, geométricamente, gráficamente, algebraicamente o por medio de la utilización de *saberes* y *haceres* matemáticos desarrollados en contextos socioculturales distintos. Es importante destacar que, frecuentemente, los etnomodelos están desarrollados de acuerdo con los conocimientos matemáticos y tecnológicos utilizados por los miembros de grupos culturales distintos (Rosa y Orey, 2010).

Por consiguiente, la materacia se convierte en un componente esencial de la Etnomodelación, pues conecta el contenido matemático relacionado con las situaciones escolares a los contextos de aprendizaje fuera de las escuelas. Este ambiente requiere técnicas de resolución de problemas, y el juicio crítico y reflexivo referentes a la comprensión de *saberes* y *haceres* locales. De esta manera, la materacia abarca las diferentes maneras de pensar, comprender y entender el conocimiento matemático y sus utilizaciones en contextos socioculturales distintos.

Por otro lado, la materacia también puede ser definida como un proceso de reflexión crítica y reflexiva sobre la humanidad y la sociedad. Así, la materacia no se refiere apenas al desarrollo de habilidades matemáticas, sino también de las competencias necesarias para que los alumnos puedan interpretar y actuar en el contexto social, político, ambiental y económico, que están estructurados por la matemática. En este sentido, la materacia promueve el desarrollo de habilidades complejas de pensamientos y razonamientos matemáticos que son utilizados en la elaboración de etnomodelos (Rosa y Orey, 2015).

Sin embargo, la solución de esos etnomodelos requiere la utilización de técnicas y estrategias matemáticas que, la mayoría de las veces, no están disponibles para los alumnos. En este caso, es necesario que los profesores actúen como mediadores del proceso de enseñanza y aprendizaje, proveyendo a los alumnos de la utilización de estrategias matemáticas y herramientas tecnológicas necesarias para ayudarlos en la elaboración de los etnomodelos propuestos en situaciones contextualizadas.

Los etnomodelos pueden ser utilizados como un instrumento que hace posible la toma de decisiones al transformar el conocimiento matemático en un poder político y sociocultural (Rosa y Orey, 2017). Similarmente, la materacia puede ser utilizada como un instrumento para el desarrollo de acciones políticas, que consideran la relación entre la matemática, el ambiente sociocultural y los currículos, buscando el desarrollo de la ciudadanía de los alumnos y su actuación en la sociedad (D'Ambrosio, 1999).

En ese sentido, es necesario definir los procedimientos y las estrategias necesarias para la elaboración de etnomodelos basados en las habilidades de los alumnos relacionadas con el uso de códigos y símbolos, que pueden ser considerados como factores socioculturales vinculados a los acontecimientos y hechos encontrados en la vida cotidiana (D'Ambrosio, 2008).

De ese modo, el desarrollo de etnomodelos está provocado por la interpretación de esos códigos y métodos, posibilitando que los alumnos sean capaces de comprender y entender los problemas y situaciones enfrentados en sus contextos socioculturales. Sin embargo, existe la necesidad de subrayar que los procedimientos, los códigos y los métodos matemáticos no son universales ni permanentes, pues están enraizados en las prácticas matemáticas locales (Rosa y Orey, 2017).

Por ejemplo, la materacia posibilita la elaboración de etnomodelos que representan las situaciones-problema concretas que acontecieron a lo largo de la historia. En consecuencia, los etnomodelos están estructurados según sus propios códigos, simbologías y métodos por medio de la utilización de un lenguaje específico que es utilizado para describir el mundo por medio de aproximaciones de la realidad (Rosa y Orey, 2013). Entonces, la materacia permite una comprensión de hechos y fenómenos que tiene como objetivo una reflexión más profunda sobre la sociedad (D'Ambrosio y D'Ambrosio, 2013) por medio de la elaboración de etnomodelos.

En ese contexto, D'Ambrosio (2001) afirma que la materacia está relacionada con la aplicación crítica y reflexiva de conocimientos y procedimientos matemáticos por medio de la utilización de herramientas matemáticas, como, por ejemplo, numéricas, estadísticas, probabilísticas y de medición para resolver situaciones concretas y complejas, vinculándolas a la necesidad del desarrollo de la ciudadanía en una sociedad glocalizada.

Por ejemplo, los resultados del estudio realizado por Bassanezi (2002) muestran que los profesores determinaron el volumen de las barricas (barriles) de vino aplicando procedimientos y técnicas matemáticas aprendidas por los antepasados de los productores de vino que llegaron a esa región de Brasil como inmigrantes italianos a principios del siglo XX. A través de la enseñanza, estos docentes interpretan y analizan signos, signos y códigos propios de la cultura de los enólogos, con el objetivo de proponer etnomodelos para encontrar soluciones a los problemas que enfrentan en su vida diaria, destacando su conexión con la materacia.

Tecnoracia como la utilización de instrumentos materiales y tecnológicos

La tecnoracia es la habilidad que los alumnos pueden desarrollar con la ayuda de los futuros profesores de Matemática para que puedan utilizar críticamente y combinar los diferentes recursos tecnológicos, de los más simples a los más complejos, así como evaluar sus posibilidades y limitaciones para atender sus necesidades en varias situaciones cotidianas. Así, la tecnoracia puede ser considerada como la familiaridad crítica y reflexiva de los alumnos con las tecnologías (D'Ambrosio, 1999).

Con esa perspectiva, el desarrollo de la tecnoracia por los alumnos posibilita el uso de los instrumentos materiales para que puedan evaluar las diversas formas de presentar y representar las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas a través de recursos tecnológicos, así como evaluar la razonabilidad de los resultados obtenidos y de su contextualización (Rosa y Orey, 2015).

Como la sociedad glocalizada es altamente tecnológica, la tecnoracia tiene un papel importante para ayudar a los alumnos a actuar sobre el mundo utilizando las herramientas tecnológicas para resolver los problemas enfrentados diariamente. La importancia del conocimiento tecnológico se manifiesta en la necesidad de que los alumnos resuelvan las situaciones-problema propuestas en las salas de aula. Así, la tecnoracia puede ser entendida como la utilización de diferentes herramientas tecnológicas que incluyen las calculadoras, los computadores, los *softwares*, los programas computacionales y los simuladores (D'Ambrosio, 2008).

Desde la perspectiva de la Etnomodelación, la tecnoracia puede ser considerada como un elemento importante del conocimiento científico, así como su cosificación por medio de artefactos tecnológicos posibilita la traducción de prácticas matemáticas locales, del mismo modo que la comprensión de las maneras de lidiar con las cuestiones naturales, sociales, culturales, políticas, ambientales y económicas. Estos ambientes promueven la incorporación de diversos modos de explicaciones, creencias, tradiciones, mitos y símbolos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemática (Rosa y Orey, 2013).

En ese proceso, es necesario que los futuros profesores de Matemática desarrollen su crítica para que puedan reflexionar de manera holística sobre las consecuencias de la utilización inadecuada de los recursos tecnológicos. Por ejemplo, la responsabilidad en el consumo a través de la comprensión de los recursos tecnológicos es una de las estrategias pedagógicas más importantes para el desarrollo de la tecnoracia (D'Ambrosio, 2008).

En ese sentido, los alumnos pueden desarrollar y elaborar etnomodelos para utilizarlos en el estudio y en la solución de problemas relacionados con la polución urbana (residuos residenciales e industriales) y ambientales (aire, agua, suelo, sonido y visión) por medio del empleo de recursos tecnológicos. También es importante que los profesores preparen a los alumnos para ser futuros productores de tecnologías, así como para concienciarse de que sus productos estén orientados a finalidades de carácter positivo (Rosa y Orey, 2017).

Según D'Ambrosio (2017), la etnomodelación plantea una propuesta política inserta en la ética, que tiene como objetivo la valorización y el respeto a la dignidad cultural de los miembros de grupos culturales distintos. Con el avance de la tecnología, la Matemática desarrolló su poder de proyectar la realidad, moldeando el futuro. No obstante, son innegables los beneficios y las posibilidades en relación con la utilización de tecnologías con el objetivo de promover el bien común y la calidad de vida.

Es importante resaltar que, para Orey y Rosa (2021), los debates sobre la importancia de la diversidad cultural en el currículo matemático, en los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática*, buscan despertar y/o renovar el interés de la academia por el debate local (émico)-global (ético). Esta discusión muestra la necesidad de las interpretaciones matemáticas desarrolladas por los miembros de culturas distintas que desafían los presupuestos tradicionales de la Matemática, considerando que promueven la elaboración de una base teórica que pretende comprender el desarrollo de ideas, procedimientos y prácticas matemáticas desarrolladas en contextos socioculturales distintos.

Consecuentemente, esa propuesta de esa reconceptualización curricular presenta una proposición innovadora para la acción pedagógica de la Matemática a partir del Currículo Trivium, compuesto por la literacia, materacia y tecnoracia, fundamentado en la perspectiva de la Etnomodelación. En este sentido, D'Ambrosio (1999) afirma que la principal contribución de ese currículo a la Educación está relacionada con la búsqueda de la eliminación de la desigualdad sociocultural y de las violaciones de la dignidad humana, pues ese es el primer paso para alcanzar la justicia social.

Por ejemplo, los resultados del estudio obtenido por Cortes (2017) consideraron el conocimiento matemático tanto local como escolar, de modo que los estudiantes entendieron de manera integral la información matemática desarrollada en la vida cotidiana, mediante el uso de la capacidad que les plantea la utilización y combinación de diferentes instrumentos tecnológicos que les ayuden a resolver los problemas que enfrentan en sus actividades diarias, con el objetivo de evaluar la razonabilidad de los resultados y su contextualización, destacando su conexión con la tecnoracia.

CONSIDERACIONES FINALES

Es necesario difundir la discusión relacionada al Currículo Trivium desde la perspectiva de la Etnomodelación con el contexto de la Educación Matemática para los futuros profesores de Matemática. Así, es importante analizar los conceptos de literacia, materacia y tecnoracia, considerando que la Matemática está presente en muchos matices de la realidad y, frecuentemente, configurando la sociedad.

En este sentido, el conocimiento matemático mecánico e instrumental no es suficiente para que esos profesores puedan desarrollar en los alumnos una actitud crítica y reflexiva con relación a la propia realidad. Por causa de esto, la acción pedagógica del Currículo Trivium desde la perspectiva de la Etnomodelación posibilita, según Skovsmose (2000), el desarrollo de una actitud interrogante en los alunos en relación con el poder configurador de la Matemática en la sociedad.

En ese currículo, la literacia es necesaria para capacitar a los alumnos a utilizar las señales y los códigos para que puedan responder a las demandas de las actividades diarias, así como para comprender, entender y organizar el propio mundo con la comprensión de las informaciones trasmitidas por diferentes medios. La materacia es la capacidad de los alumnos para utilizar los símbolos, los códigos y el razonamiento matemático para que puedan sugerir etnomodelos y utilizarlos en la solución de situaciones-problema cotidianas, así como evaluar los resultados obtenidos en sus resoluciones con la utilización de los recursos tecnológicos por medio de la tecnoracia.

En ese contexto, el Currículo Trivium desde la perspectiva de la Etnomodelación puede ser considerado como el primer paso para el desarrollo de una actitud intelectual, que está casi ausente de los sistemas escolares, así como de los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática*. En este sentido, D'Ambrosio y D'Ambrosio (2013) destacan que existe la necesidad de desarrollar en los alumnos una comprensión profunda de los hechos y fenómenos presentes en el día a día, así como una reflexión crítica sobre el papel del conocimiento matemático en la sociedad.

Abrazar las competencias de literacia, materacia y tecnoracia puede ayudar a los futuros profesores de Matemática a incluir la problematización, la contextualización y el cuestionamiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los alumnos por medio de la elaboración de actividades curriculares contextualizadas en el día a día. En esa acción pedagógica, la Etnomodelación puede desarrollar una conciencia sociocultural en esos profesores que está reflejada en las prácticas sociales y culturales de los alumnos, promoviendo el establecimiento de un puente entre el conocimiento matemático escolar/académico y el mundo real en toda su diversidad y pluralidad.

Además de eso, la acción pedagógica del Currículo Trivium y de la Etnomodelación proporciona un ambiente democrático que posibilita que los futuros profesores discutan y compartan sus experiencias y vivencias cotidianas, ampliando la comprensión sobre la importancia de otras formas de conocimiento matemático para el desarrollo de la Matemática escolar/académica. En este sentido, es necesario que los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática* promuevan la valorización y el respeto a las diferentes formas del *saber/hacer* matemático que estén en desacuerdo con las prácticas curriculares producidas en sala de aula.

De esta manera, en este capítulo, abordamos algunas ideas-clave que pueden promover una comprensión esclarecedora del Currículo Trivium y de la Etnomodelación como campos de investigación para el desarrollo de su actuación pedagógica por medio de la discusión de sus contribuciones para la formación de profesores, así como sobre la importancia de su papel en la trasformación social a través de la Educación. De esta manera, el Currículo Trivium basado en la perspectiva de la Etnomodelación busca construir un *corpus* de conocimiento matemático enraizado en tradiciones socioculturales por medio de la elaboración de etnomodelos.

Concluyendo: es importante resaltar que este tipo de currículo promueve la relevancia de los *saberes* y *haceres* locales, así como reconoce la importancia del conocimiento matemático escolar/académico para el desarrollo de la práctica docente de los futuros profesores. De este modo, Orey y Rosa (2021) destacan la necesidad de una transformación epistemológica, didáctica y pedagógica en los *Cursos de Formación de Profesores de Matemática* que pueda alojar cambios curriculares necesarios para el desarrollo de competencias y habilidades para el siglo XXI, buscando la valorización y el respeto de las ideas, de los procedimientos, y de las prácticas matemáticas desarrolladas por los miembros de grupos culturales distintos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bandeira, F.A. y Lucena, I.C.R. (2004). *Etnomatemática e práticas sociais. Coleção Introdução à Etnomatemática*. UFRN.

Bassanezi, R.C. (2002). *Ensino–aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto.

Chieus, G.J. (2004). Etnomatemática: reflexões sobre a prática docente. En J.P.M. Ribeiro, M.C.S. Domite, y R. Ferreira (Eds.), *Etnomatemática: papel, valor e significado* (pp. 185-202). ZOUK.

Cortes, D.P.O. (2017). *Re-significando os conceitos de função: um estudo misto para entender as contribuições da abordagem dialógica da Etnomodelagem.* [Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Departamento de Educação Matemática. UFOP].

Damazio, A. (2004). *Especifidades conceituais da matemática da atividade extrativa do carvão. Coleção Introdução à Etnomatemática*. UFRN.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technoracy: a trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 31-53.

D'Ambrosio, U. (2001). General remarks on ethnomathematics. *ZDM*, *33*(3), 67-69.

D'Ambrosio, U. (2008). Educação numa era de transição. *Revista Matemática & Ciência*, *1*(1), 8-18.

D'Ambrosio, U. (2017). Prefácio. En M. Rosa y D.C. Orey (Eds.), *Etnomodelagem: a arte de traduzir práticas matemáticas locais* (pp. 13-16). Editora Livraria da Física.

D'Ambrosio, U. y D'Ambrosio, B.S. (2013). The role of ethnomathematics in curricular leadership in mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *4*(1), 19-25.

English, L. (2006). Mathematical modeling in the primary school: children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 303-323.

Gutiérrez, R. (2012). Embracing Nepantla: rethinking knowledge and its use in teaching. *Journal of Research in Mathematics Education, 1(1), 29-56.*

Orey, D.C. y Rosa, M. (2021). A etnomatemática como um programa subversivo e responsável para uma ação pedagógica na formação de professores. *Revista Interdisciplinar em Ensino* *de Ciências e Matemática*, *1*(2), 109 - 124.

Rosa, M. (2010). *A mixed-methods study to understand the perceptions of high-school leaders about ELL students*: the case of mathematics. [Doctorate Dissertation, California State University].

Rosa, M. y Orey, D.C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delineando-se um caminho para a ação pedagógica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *19*(26), 19-48.

Rosa, M. y Orey, D.C. (2010). Ethnomodelling: a pedagogical action for uncovering ethnomathematical practices. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(3), 58-67.

Rosa, M. y Orey, D.C. (2013). Ethnomodelling as a research theoretical framework on ethnomathematics and modelling. *JUME - Journal of Urban Mathematics Education*, *6*(2), 62-80.

Rosa, M. y Orey, D.C. (2015). A trivium curriculum for mathematics based on literacy, matheracy, and *technoracy: an ethnomathematics perspective. ZDM*, *47*(4), 587-598.

Rosa, M. y Orey, D.C. (2016). Humanizing mathematics through ethnomodelling. *Journal of Humanistic Mathematics*, *6*(3), 3-22.

Rosa, M. y Orey, D.C. (2017). *Etnomodelagem*: a arte de traduzir práticas matemáticas locais. Editora Livraria da Física.

Rosa, M., Orey, D.C., y Gavarrete, M. (2017). El Programa Etnomatemáticas: Perspectivas Actuales y Futuras. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *10*(2), 69-87.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *13*(14), 66-91.

Zevenbergen, R. (2002). Citizenship and numeracy: *implications for youth*, employment and life beyond school yard. *Quadrante*, *11*(1), 29-39.

PROPOSING A TRIVIUM MATHEMATICS CURRICULUM FOR MATHEMATICS TEACHER EDUCATION COURSES FROM THE PERSPECTIVE OF ETHNOMODELLING

ABSTRACT

It is necessary to difuse discussions regarding ethnomodelling in the context of mathematics education for future mathematics teachers. It is also important to analyze the concepts of literacy, matheracy and technoracy by considering that mathematics is present and shapes society. Mere mechanical and instrumental mathematical knowledge is not enough to develop in critical and reflective attitude in relation to reality itself in learners. Thus, the pedagogical action of a trivium curriculum enables the development of a questioning attitude about the shaping power of mathematics. Literacy is necessary to enable students to use signals and codes to respond to the demands of daily activities, as well as to understand, comprehend, and organize the world itself with the understanding of information transmitted by different media. Matheracy is the ability of students to use symbols, codes and mathematical reasoning so that they can elaborate ethnomodels and use them in solving everyday problem-situations, as well as evaluating the results obtained in their resolutions with the use of technological resources through technocracy.

Keywords: Trivium Curriculum; Teacher Education Courses; Ethnomodelling; Mathematics; Mathematics Teachers.

PROPONDO UM CURRÍCULO MATEMÁTICO TRIVIUM PARA OS CURSOS DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA ETNOMODELAGEM

RESUMO

É necessário difundir a discussão relacionada com o Curriculum Trivium na perspectiva da Etnomodelagem no contexto da Educação Matemática para os futuros professores de Matemática. É importante analisar os conceitos de literacia, materacia e tecnoracia ao considerar que a Matemática está presente na realidade, bem como moldando a sociedade. O conhecimento matemático mecânico e instrumental não é suficiente para desenvolver nos alunos uma atitude crítica e reflexiva em relação à própria realidade. Assim, a ação pedagógica do Curriculum Trivium possibilita o desenvolvimento de uma atitude questionadora sobre o poder formador da Matemática na sociedade. A literacia é necessária para capacitar os alunos na utilização de sinais e códigos para responder às demandas das atividades cotidianas, bem como para compreender, entender e organizar o próprio mundo com a compreensão das informações transmitidas por diferentes meios. A materacia é a capacidade dos alunos utilizarem símbolos, códigos e o raciocínio matemático para que possam elaborar etnomodelos e utilizá-los na resolução de situações-problema do cotidiano, bem como para avaliar os resultados obtidos em suas resoluções com a utilização de recursos tecnológicos por meio da tecnocracia.

Palavras-chave: Currículo Trivium; Cursos de Formação; Etnomodelagem; Matemática; Professores de Matemática.

Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil
milton.rosa@ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5190-3862
El Doctor Milton Rosa es Posdoctor en Educación por la Facultad de Educación (FE), de la Universidade de São Paulo (USP). Doctor en Educación por la California State University, Sacramento (CSUS). Máster en Educación Matemática por la CSUS. Especialista en Educación Matemática por la Pontificia Universidade Católica de Campinas (PUCC). Graduado en Matemáticas, Ciencias y Pedagogía por la Facultad de Ciencias y Letras Plínio Augusto do Amaral, en Amparo, São Paulo. Profesor y Coordinador del Curso de Licenciatura en Matemáticas, en la modalidad a distancia, del Centro de Educación Abierta y a Distancia (CEAD), de la Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Docente permanente y orientador del Programa de Maestría Académica en Educación Matemática, del Departamento de Educación Matemática (DEEMA), de la UFOP. Actualmente es profesor de Educación Matemática del DEEMA, en la UFOP, y presidente del *International Study Group on Ethnomathematics* (ISGEm) desde primeiro de enero de 2020.

Daniel Clark Orey
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil
oreydc@ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-8567-034X
El Dr. Daniel C. Orey, Ph.D. es profesor emérito en Educación Matemática y Educación Multicultural, en la California State Univesity, Sacramento (CSUS), Estados Unidos. Vivió y trabajó como profesor universitario y de escuela primaria en Brasil, Guatemala, México, Nepal, y Estados Unidos. El Dr. Daniel C. Orey es un educador especialista senior Fulbright con experiencias académicas desarrolladas en la Pontificia Universidad Católica de Campinas (PUCC) en Brasil, en 1998, y en la Universidad de Katmandú (KU), en Nepal, en 2007. Actualmente es profesor de Educación Matemática en el Departamento de Educação Matemática (DEEMA) y de la Licenciatura en Matemáticas, en la modalidad a distancia, en el Centro de Educación Abierta y a distancia (CEAD), siendo además profesor titular y supervisor del Programa de Maestría Académica en Educación Matemática de la Universidad Federal de Ouro Preto (UFOP).

Capítulo 3

RELACIONES ENTRE LAS COMPETENCIAS DE MODELACIÓN Y ARGUMENTACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS[5]

Horacio Solar

Andrés Ortiz

Victoria Arriagada

Marco Catalán

RESUMEN

Para desarrollar una visión competencial del aprendizaje, varias investigaciones han puesto el acento en la modelación y la argumentación Si bien existe una nutrida literatura en ambas competencias matemáticas, es muy escasa en la literatura el abordaje conjunto de la argumentación y modelación. Este estudio pretende dar cuenta de qué manera la argumentación le otorga una nueva perspectiva a la modelación en el aula, al analizar las discusiones en grupo y los conflictos que emergen entre los estudiantes para encontrar la solución más adecuada. A partir de un estudio de un caso del aula de matemáticas de la profesora Ángeles, se tiene como propósito caracterizar el desarrollo de la argumentación cuando los estudiantes transitan por el ciclo de modelación en el aula de matemáticas. Para ello, se seleccionaron episodios en que convergen códigos de modelación de las distintas fases del ciclo de modelación y momentos de argumentación con la presencia de refutaciones. Los resultados indican que los niveles superiores de argumentación de los estudiantes se concentran en la fase de trabajando con las matemáticas del ciclo de modelación. Estos resultados son un aporte a las relaciones ya encontradas entre la argumentación y modelación que se han descrito en otros estudios.

Palabras clave: Competencias matemáticas; Modelación; Argumentación; Estudio de casos; Desarrollo profesional docente.

[5] **Como citar:** Solar, H., Ortiz, A., Arriagada, V. y Catalán, M. (2024). Relaciones entre las competencias de modelación y argumentación en el aprendizaje de las matemáticas. En M. Aravena-Díaz y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades* (pp. 57-79). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

INTRODUCCIÓN

Cada vez hay más países que han realizado reformas profundas en el currículum de matemáticas para que los estudiantes puedan desarrollar competencias matemáticas (Real Decreto 157, 2022; MINEDUC, 2013). Estos cambios en los propósitos curriculares han requerido que los profesores de matemáticas pongan un mayor acento en el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes (Niss y Højgaard, 2019). Sin embargo, estos cambios no han sido suficiente para una modificación profunda de las prácticas en el aula de matemática. La realidad, en muchos países, es que la enseñanza se sigue direccionando principalmente al logro de objetivos de aprendizaje centrados en los contenidos, con patrones de interacción cerrados en los que las intervenciones del docente son para realizar preguntas de bajo nivel cognitivo y evaluar las intervenciones de los estudiantes (Solar y Deulofeu, 2016).

De todas las competencias matemáticas que permiten promover estos cambios, varias investigaciones y propuestas han puesto el foco en modelación y argumentación, las que se relacionan con aspectos esenciales de la actividad matemática de los estudiantes. La modelación es una competencia que se relaciona con analizar y construir modelos matemáticos en otras áreas, matematizando la situación extramatemática, trabajando con los objetos matemáticos que están inherentes a ella, extrayendo conclusiones, validando el modelo y también analizándolo críticamente para evaluar su alcance y validez (Niss y Højgaard, 2019). Al respecto, Niss y Højgaard (2019) señalan que el foco de esta competencia es que los estudiantes construyan modelos, y para ellos deben ser capaces de, entre otras cosas, de transitar por las distintas fases del ciclo de modelación. En la literatura se han propuesto diversos ciclos para describir el proceso mediante el cual se realiza la construcción de modelos matemáticos, los cuales difieren en algunas de sus etapas (Blum y Niss, 1991; Maaß, 2006). En esta investigación se utilizó el ciclo de modelación propuesto por Maaß (2006), que es una adaptación del ciclo propuesto por Blum (1996), dado que muestra claramente la interacción entre la realidad y las matemáticas durante el proceso de modelación, estableciendo una relación entre ellos. El proceso de modelación comienza en el mundo real; *simplificando,* estructurando e idealizando el problema para obtener un modelo real que contiene un enfoque matemático preliminar que orienta el proceso de *matematización*. Esta segunda fase traduce al lenguaje matemático los datos, relaciones y suposiciones, que conducen a un modelo matemático de la versión idealizada. *Trabajando con las matemáticas* se utilizan definiciones, propiedades y procesos matemáticos, donde se obtienen soluciones matemáticas las cuales deben ser *interpretadas,* en un rango aceptable y compatible con las condiciones iniciales y luego *validadas*, mediante aproximaciones numéricas en términos del problema real (Blum y Niss, 1991; Maaß, 2006). Si la solución o el proceso elegido no resulta ser adecuado a la realidad, los pasos o quizás incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado (Blum y Niss, 1991; Borromeo-Ferri, 2006).

En el marco teórico de PISA 2018 (OECD, 2019) se describen siete competencias matemáticas según el ciclo de modelación. Entre éstas se encuentra la argumentación, la cual contribuye a una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de enfoques y perspectivas. Hay varias aproximaciones a la argumentación en la literatura. En esta investigación seguimos un acercamiento que es comúnmente aceptado por la investigación educativa según el cual la argumentación tiene como propósito convencer, tanto a sí mismo como a otros, de la validez de un razonamiento (Ayalon y Hershkowitz, 2018; Krummheuer, 1995; Van Eemeren et al., 2013).

Podemos encontrar varias relaciones entre argumentación y modelación en contextos de trabajo colaborativo y discusión de modelos. Para que los estudiantes transiten por el ciclo de modelación se requieren habilidades de trabajo en equipo, de comunicación y negociación (Maaß et al., 2019) en que es habitual que emerjan discusiones productivas (Manouchehri et al., 2020). Las discusiones en pequeño grupo entre estudiantes inciden en el ciclo de modelación, ya que al momento de explorar posibles caminos de solución suelen haber conflictos entre los miembros del grupo para llegar a la solución más adecuada (Tekin-Dede, 2019). En las discusiones en gran grupo, cuando el profesor selecciona y secuencia las respuestas de los estudiantes, se genera una oportunidad para contraponer los distintos modelos propuestos y para estudiar su validez o pertinencia (Smith y Stein, 2011). Pese a estas relaciones entre ambas competencias matemáticas, solo algunos estudios han dado cuenta de cómo se construyen los argumentos en el ciclo de modelación por el que transitan los estudiantes (Tekin-Dede, 2019; Güç y Kuleyin, 2021), y por tanto, se requiere seguir profundizando en cómo se caracteriza la argumentación de los estudiantes en el ciclo de modelación.

El propósito de esta investigación es caracterizar el desarrollo de la argumentación cuando los estudiantes transitan por el ciclo de modelación, a partir de un estudio de caso de una profesora en el nivel 8º básico (13-14 años) que implementó una secuencia didáctica para favorecer la modelación y la argumentación en el aula de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Argumentación

La argumentación hace referencia a la actividad que se realiza para convencer a una audiencia por medio de aserciones, evidencias, justificaciones y refutaciones (Toulmin, 2003; Cervantes-Barraza et al., 2017). En el aula de matemáticas, la argumentación promueve que las ideas de los estudiantes sean objeto de discusión y evaluación, posibilitando el desarrollo de culturas matemáticas orientadas al diálogo (Solar et al., 2021), en que la construcción del conocimiento se considera una actividad situada, crítica y reflexiva que involucra la participación grupal (Conner et al., 2014; Krummheuer, 1995). Cuando participan varias personas en la construcción de un argumento, se hace referencia a una argumentación colectiva (Conner et al., 2014; Krummheuer, 1995).

Idealmente una argumentación contiene varios enunciados relacionados entre sí y que asumen ciertas funciones para su eficacia interaccional (Krummheuer, 1995). En general, los análisis de los enunciados que contienen un argumento en el aula se sustentan en el modelo de Toulmin (2003). El análisis consiste en que la validez pretendida de una aserción se establece mediante una argumentación que puede considerar varios elementos. Toulmin propone un modelo con 6 elementos de la estructura argumentativa: los «datos» (D) que corresponden a la evidencia que se presenta para iniciar la argumentación; la «conclusión» o aserción (C) es la posición de la que se quiere convencer a los interlocutores; la «garantía» (G) permite la inferencia de la conclusión a partir de los datos; el «refutador» (Ref) establece las condiciones en las que la garantía o conclusión no son válidas; el «calificador modal» (CM) que califica la conclusión en términos de la certeza que el argumento provee; y finalmente el «respaldo» (R) que aporta legitimidad a la garantía.

La estructura de Toulmin ha sido utilizada por diversos investigadores para analizar la argumentación en el aula de matemáticas. Algunas de estas investigaciones han reducido la estructura de Toulmin omitiendo el calificador modal y el refutador (Krummheuer, 1995; Yackel 2002), y otros han utilizado la estructura completa de Toulmin (Conner et al., 2014, Inglis et al., 2007), en particular el poder persuasivo que tiene la refutación en la argumentación colectiva (Knipping y Reid, 2014; Reid et al., 2011; Solar et al., 2023).

Por otro lado, la argumentación colectiva requiere del apoyo docente, puesto que con determinadas acciones se pueden potenciar diferentes pasos del proceso argumentativo que desarrollan los estudiantes (Conner et al., 2014). Por tanto, el docente desempeña un papel esencial en el establecimiento de normas y estándares para la argumentación matemática en el aula (Ayalon & Hershkowitz, 2018; Solar et al., 2020).

El desarrollo de la argumentación colectiva no depende únicamente del apoyo docente, sino también de las características de las tareas matemáticas. Tareas abiertas en que no necesariamente hay un único resultado correcto, o que su desarrollo invita a un acercamiento con distintas estrategias informales o formales de resolución, o que en el proceso de resolución los estudiantes tomen posturas, son tareas que promueven distintos puntos de vista y, con ello, el debate en los estudiantes para que se desarrolle argumentación (Solar y Deulofeu, 2016).

La argumentación en las fases de modelación

La argumentación colectiva le otorga una nueva perspectiva a la modelación en el aula, ya que permite analizar las discusiones en grupo y los conflictos que emergen entre los estudiantes para encontrar la solución más adecuada (Tekin-Dede, 2019). La revisión de literatura para este estudio dio cuenta de tres brechas en la investigación. En primer lugar, estudios que han abordado las relaciones entre la argumentación con el ciclo de modelación son escasos y recientes. En segundo lugar, se cuenta con más resultados sobre el desarrollo de la argumentación en el diseño y resolución de tareas de modelación en contextos de formación inicial profesores (Ledezma et al., 2022; Tekin-Dede, 2019) que en contextos escolares (Cho y Jonassen, 2002).

Una tercera brecha tiene relación con el contenido de momentos argumentativos en el ciclo de modelación. En un estudio previo se analizaron las estructuras de argumentación en modelación, y se evidenció que momentos argumentativos con refutación no necesariamente involucra un desarrollo de razonamientos matemáticos profundos en los estudiantes (Solar et al., en prensa). Para este nuevo estudio se ha puesto un foco específico sobre el contenido en momentos argumentativos. Dentro de los estudios que han investigado sobre el contenido matemático en la argumentación, se encuentra el trabajo de Kiel et al. (2015) quien propone que la argumentación se puede caracterizar en una dimensión estructural (ej. Modelo de Toulmin), una dimensión orientada al destinatario y una dimensión de contenido. Esta dimensión analiza qué tipo de fenómeno se debe explicar e incluye la validez, precisión e integridad del contenido matemático. Otros estudios se han enfocado en las relaciones entre la argumentación y prueba (Pedemonte, 2007), y utilizan la noción de unidad cognitiva, que hace referencia a la articulación entre la argumentación y la prueba matemática que puede aparecer en la resolución de una tarea matemática (Mariotti & Pedemonte, 2019). Otros estudios se han enfocado en la calidad de la argumentación, por medio de una rúbrica basada en la estructura de Toulmin (Cho y Jonassen, 2002), la cual ha sido usada en analizar la argumentación en tareas de modelación (Güç y Kuleyin, 2021). En estos estudios reportados, los análisis del contenido matemático en momentos de argumentación, no necesariamente son los más apropiados para ser analizados en un ciclo de modelación, dado que aparecen otros elementos a tener en cuenta tales como el uso de representaciones, procedimientos y modelos matemáticos involucrados. En nuestra investigación, consideramos que el contenido matemático de la argumentación se puede interpretar como las conexiones matemáticas que realicen los estudiantes, entendidas como un proceso cognitivo a través del cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí. Las conexiones matemáticas emergen cuando los estudiantes resuelven tareas específicas y pueden identificarlas en sus producciones escritas o en los argumentos orales o mímicos que desarrollan (Campo-Meneses et al., 2021; García-García y Dolores-Flores, 2018).

Pregunta de investigación

En consideración a las brechas de investigación identificadas, la pregunta de investigación que dirige este estudio es ¿cómo se desarrolla la argumentación de los estudiantes en el tránsito por las distintas etapas de modelación? Para responder esta pregunta es relevante considerar la presencia de la argumentación en las etapas de modelación, con una especial consideración a la refutación (Knipping y Reid, 2014) y el contenido de la argumentación en términos de las conexiones matemáticas (Campo-Meneses et al., 2021) que establecen los estudiantes en los episodios argumentativos.

METODOLOGÍA

Se ha diseñado una investigación cualitativa con un enfoque de estudio de caso múltiple (Yin, 2014) de alcance exploratorio, cuyos casos fueron seleccionados de manera intencionada (Creswell, 2011). Los casos corresponden a clases de distintas profesoras, quienes implementaron una tarea de modelación a través de una secuencia de aprendizaje, diseñada para promover tanto la modelación como la argumentación en el aula de matemáticas. Se ha utilizado este enfoque metodológico para comprender de qué de qué manera se desarrollan los momentos de argumentación en las distintas fases del ciclo de modelación.

Contexto y participantes

Si bien se han obtenido logros en la formación de profesorado al promover la modelación en el aula de matemáticas, aún se requiere investigación acerca de su implementación (Manouchehri, 2015). Por tanto, en esta investigación se llevó a cabo un programa de desarrollo profesional de profesores para promover la argumentación y modelación en el aula de matemáticas, el cual se implementó en dos ciudades de Chile. En el programa participaron 22 profesoras, 13 en la Región Metropolitana y 9 de la Región del Biobío, que imparten clases de matemáticas en educación primaria (6-11 años) o en los dos primeros años de la educación secundaria (12-13 años). Las profesoras fueron escogidas de manera intencionada porque contaban con la experiencia de promover la argumentación en el aula.

El programa formativo consistió en 15 sesiones de 3 horas, y se implementó entre agosto y diciembre de 2018. El diseño del programa consideró dos dimensiones: el propósito de formación y el modelo de desarrollo profesional docente. En cuanto al primero, la formación tuvo como foco la modelación y gestión de la argumentación en el aula, lo que implicó un estudio bibliográfico previo de los componentes teóricos y didácticos que, según la investigación, permiten promover las competencias de modelación y argumentación. Considerando este estudio, se decidió incorporar en la propuesta el ciclo de modelación adaptado por Maaß (2006) y la argumentación colectiva (Krummheuer, 1995). Respecto al desarrollo profesional, la propuesta incorporó el modelo de mejoramiento de la experiencia docente (MED) (Solar et al., 2016), cuya base es, en primer lugar, mostrar experiencias de otros docentes por medio de videos, para que luego, sean los propios docentes quienes implementen una propuesta didáctica.

Recogida de datos

Una vez terminado el proceso formativo, en el segundo año del proyecto, 10 profesoras de ambas ciudades, fueron seleccionadas para hacer un seguimiento de sus clases, quienes diseñaron una tarea matemática para promover la modelación y la argumentación con sus estudiantes. La selección de las profesoras se realizó considerando criterios de asistencia permanente durante el proceso formativo realizado el primer año del proyecto, y considerando los niveles educativos de los cursos de las profesoras para así poder observar en distintas edades el desarrollo de la argumentación de los estudiantes en el tránsito por las distintas etapas de modelación. Cada tarea matemática diseñada se implementó en 3-4 clases de 45-70 minutos para que sus estudiantes tuvieran tiempo adecuado para transitar por el ciclo de modelación. Las tareas matemáticas se implementaron en grupos pequeños de estudiantes para promover el trabajo de manera colaborativa y filmadas con 3 cámaras. Una cámara registró todos los movimientos de la docente y las otras dos cámaras registraron todas las intervenciones de dos grupos pequeños fijos seleccionados por la profesora (grupo 1 y grupo 2). Además, se recopiló las producciones escritas de los grupos de estudiantes.

Para este estudio de casos múltiple, se seleccionaron de manera intencionada a cinco de las diez docentes, quienes lograron implementar la tarea matemática en una secuencia de clases en que se observó el ciclo de modelación completo (Maaß, 2006) y además se presentaron momentos argumentativos que implicaron refutación de ideas y/o procedimientos entre los estudiantes (Knipping y Reid, 2014). Para realizar las videograbaciones se obtuvo el consentimiento de cada participante (docentes y estudiantes) y la aprobación del comité de ética de la Universidad del primer autor de este estudio.

En este capítulo se muestran los resultados del aula de matemáticas de Ángeles, como caso de estudio, el cual se ha seleccionado para ejemplificar los momentos de argumentación en las distintas fases del ciclo de modelación en sus clases.

Estrategia de análisis

Los datos de este estudio corresponden a los videos de las intervenciones de los dos grupos fijos seleccionados de la clase de la profesora Angélica, y el video que registro las intervenciones entre estudiantes y la profesora cuando se realizaron discusiones con el curso completo.

El análisis de estos videos se realizó en dos fases. En la primera, se elaboró un conjunto de 5 categorías de análisis que corresponden a las fases de transición del ciclo de modelación adaptado por Maaß (2006): simplificación, matematización, trabajando con la matemática, interpretación y validación. Cada una de estas cinco categorías de modelamiento se han caracterizado por códigos ingresados en el software ATLAS.ti para el análisis de los videos. En una segunda fase, en los episodios codificados con las fases de modelación se identificaron momentos de argumentación colectiva (Krummheuer, 1995) con la presencia de justificaciones y/o refutaciones (Knipping y Reid, 2014). De esta forma, se identificaron episodios con momentos argumentativos en las distintas etapas del ciclo de modelación (ver Tabla 1).

Tabla 1

Niveles de estructura argumentativa (EA) utilizados en el estudio

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Los estudiantes responden con monosílabos o frases breves a las preguntas del docente o de sus compañeros.	Los estudiantes ofrecen respuestas o posiciones de manera breve y sin justificarlas.	Los estudiantes ofrecen y justifican respuestas y posiciones.	Los estudiantes ofrecen, justifican y refutan respuestas y posiciones.	Los estudiantes ofrecen, justifican y refutan respuestas y posiciones. Además, realizan aclaraciones, ampliaciones y reformulaciones para fundamentar sus justificaciones o refutaciones.

Fuente: Adaptado de Toulmin (2003)

Los episodios de argumentación colectiva se analizaron por medio de códigos de argumentación en dos dimensiones: estructura argumentativa (EA) y conexiones matemáticas (CM). La EA clasifica las intervenciones de los estudiantes en niveles basados en el modelo de Toulmin, que van desde un Nivel 1 donde los estudiantes responden de manera breve y reproductiva, hasta un Nivel 5 donde los estudiantes fundamentan sus justificaciones o refutaciones ampliando sus razonamientos para fundamentar sus intervenciones (Tabla 1).

Las CM clasifica las intervenciones en términos del tipo de conexiones que establecen los estudiantes sobre conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre si (García-García y Dolores-Flores, 2018), en relación a la justificación de sus respuestas, posiciones o refutaciones. Esta dimensión se manifiesta desde intervenciones sin conexiones (SC) donde los estudiantes responden o se posicionan sin dar cuenta de conexiones matemáticas, hasta intervenciones con construcción matemática (CMa) donde dan cuenta de un tipo de conexión más avanzada asociada a la construcción de conocimiento matemático a través de generalizaciones, formulaciones de propiedades o teoremas o construcción de modelos (ver Tabla 2).

Tabla 2

Tipo de conexiones matemáticas (CM) utilizados en el estudio

Sin conexiones (SC)	Conexiones Simples (CS)	Conexiones Complejas (CC)	Construcción Matemática (CMa)
Los estudiantes responden o se posicionan sin realizar conexiones matemáticas	Los estudiantes responden o se posicionan por medio de conexiones matemáticas simples	Los estudiantes responden o se posicionan por medio de conexiones matemáticas complejas	Los estudiantes responden o se posicionan construyendo conocimiento matemático.

Fuente: Adaptado de García-García y Dolores-Flores (2018)

Se analizaron los episodios codificados de las dimensiones argumentativas EA y CM en las distintas etapas de modelación. Para ello, se consideraron episodios codificados en un estudio previo (Solar et al., 2023) de acuerdo a las distintas etapas del ciclo de modelación. Luego, se codificaron todos estos episodios de acuerdo con la dimensión EA y se preseleccionaron aquellos de un Nivel 3 o superior, ya que en estos niveles se presentan justificaciones y/o refutaciones. De esta pre-selección de episodios, se analizaron y codificaron, según la dimensión CM, sin importar el nivel observado. Por tanto, se obtuvo una selección de episodios identificados por etapa del ciclo de modelación, de Nivel 3 o superior de estructura argumentativa (EA) y con un nivel de conexión matemática (CM) que varía desde Sin Conexiones (SC) hasta Construcción Matemática (CMa). Es importante señalar que el proceso formativo de los docentes se enfocó en la promoción de la argumentación y no en el contenido matemático de estas argumentaciones en términos de las conexiones matemáticas de los estudiantes.

RESULTADOS

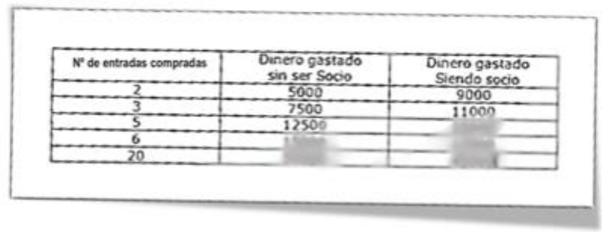
En la clase de 8º grado (13-14 años), Ángeles diseñó la tarea “Cinema Paraíso” (Figura 1), diseñada como una tarea de modelación, ya que responde a un problema con complejidad cuya resolución involucra procesos de modelación (Maaß, 2010). La tarea matemática, la cual se diseñó para ser implementada en 3 clases con grupos de 4 personas, solicita que los estudiantes indiquen si conviene o no ser socio del cine; además, esta no se basa en un gasto anual, sino que en el ahorro anual, por lo que la respuesta no es inmediata e invita a la discusión. Por tanto, la tarea promueve la argumentación, ya que solicita que los estudiantes tomen una decisión de si conviene o no ser socio del cine (Solar y Deulofeu, 2016).

Figura 1

Tarea matemática Cinema Paraíso

Cinema Paraíso

En el cine "Paraíso", existe la posibilidad de ser socio comprando una tarjeta de suscripción anual, lo que permite comprar entradas al cine pagando un costo rebajado por entrada.
La siguiente tabla contiene un informe de lo que gastaría una persona comprando entradas siendo y no siendo socio. Lamentablemente el informe se ha mojado perdiendo parte de la información.



Nº de entradas compradas	Dinero gastado sin ser Socio	Dinero gastado Siendo socio
2	5000	9000
3	7500	11000
5	12500	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	[illegible]

Una familia dice que tomando la opción más conveniente su ahorro anual del año pasado fue de $29.000, ¿Cuál es la opción más conveniente?

Fuente: Elaboración propia

En la implementación de la tarea matemática "Cinema Paradiso" en las clases de Ángeles, se observaron 33 episodios argumentativos de un Nivel 3 y 11 episodios de nivel 4 en estructura argumentativa (EA), que se han caracterizado en relación a la etapa de modelación y el tipo de conexiones matemáticas (CM) (ver Tabla 3).

Tabla 3

Episodios argumentativos en las etapas del ciclo de modelación. Caso Ángeles

Etapas del ciclo de modelación	EA		CM			Total
	Nivel 3	Nivel 4	CS	CC	CMa	
Simplificando	1	1	1	1	0	2
Matematizando	1	0	1	0	0	1
Trabajando con las matemáticas	17	7	3	21	0	24
Interpretando	6	1	0	6	1	7
Validando	8	2	4	6	0	10
Total	33	11	9	34	1	44

Nota: EA= Estructura Argumentativa, CM=Conexiones Matemáticas, CS=Conexiones Simples, CC=Conexiones Complejas, CMa=Construcción Matemática.

Fuente: Elaboración propia.

Argumentación en las etapas de modelación

En cuanto a la estructura de argumentación (EA), los niveles más altos de EA se alcanzaron principalmente en la etapa *trabajando con las matemáticas*, con 17 episodios en Nivel 3 y siete episodios en Nivel 4. Durante la búsqueda del modelo matemático, se generaron diversos momentos donde los estudiantes refutan sus ideas, respuestas o procedimientos. Durante la segunda y tercera clase, principalmente, los estudiantes no estaban de acuerdo en cómo calcular el valor por entrada -siendo y no siendo socio-, produciéndose así refutaciones, ya que al realizar los cálculos había incoherencias con los datos de la tabla o con el supuesto de que ser socio en algún momento es conveniente. Esto fue un insumo para la discusión de la tercera clase durante las etapas de *interpretación* y *validación,* pues algunos modelos iniciales consideraban un valor base a pagar por ser socio mientras que otros no, lo que permitió que los estudiantes evaluaran los modelos incorporando el valor base de $5.000 para establecer la validez de los mismos.

Respecto a las conexiones matemáticas (CM), en la tabla 2 se observa que 9 episodios se asocian a CS, 34 con CC y uno con CMa. Si bien se observan episodios con CC a lo largo de todo el ciclo de modelación, estos se concentran en la etapa *trabajando con las matemáticas*, que presenta 21 episodios con CC y solo tres episodios con CS. Este tipo de conexiones matemáticas se evidenciaron cuando los estudiantes se posicionaban respecto a que el valor de la entrada siendo socio no podía costar $2.000. Además, en esa etapa, realizaron los cálculos para establecer dos aspectos importantes: primero, establecer qué era más conveniente, ser o no ser socio, y segundo, cuántas entradas debían comprarse para ahorrar $29.000. Para ello, debieron explicitar las estrategias utilizadas para establecer a partir de cuántas entradas convenía ser socio y después determinar el número de tickets para tener el ahorro señalado. Esto implicó que los estudiantes desplegaran conexiones matemáticas complejas (CC).

Ejemplos de episodios argumentativos en etapas de modelación

A continuación, se presentan tres episodios de la secuencia de Ángeles en que se muestran las relaciones entre los niveles de participación y de contenido matemático de la argumentación. El primer episodio se sitúa en la fase de simplificación en la primera clase, el segundo episodio en la fase de trabajando con la matemática en la segunda fase y el tercer episodio en la fase de validación en la tercera fase.

Ejemplo 1: Fase de simplificación

En la fase de simplificación, los estudiantes discutieron el problema para comprenderlo utilizando la tabla sin llegar a un modelo matemático, donde algunos grupos presentaron sus cálculos en un papelógrafo que sería utilizado con posterioridad para ser expuesto al resto del curso. En el episodio 1 se aprecia un momento argumentativo en que un grupo de estudiantes discute cuántas entradas considerar para reconocer si es conveniente ser socio o no.

Episodio 1

Alejandro: Ya mira si con 6 entradas ¿Cuánto eran?
Florencia: $15.000
Alejandro: Ya $15.000, 6+6 son 12 entradas cierto y el doble de $15.000 son $30.000 y nos piden $29.000. O sea que compraron como 11 o 12 entradas, tenemos que elegir entre 11 o 12.
Esteban: 11 porque con 12 se pasa
Alejandro: Pero es que está entre medio, como que compraron 11 y media
Esteban: ¡Si!
Alfredo: Pero ¿cuántas compraría siendo socio o sin ser socio?
Esteban: Saquemos las dos yo creo
Florencia: Aquí dice "una familia dice que tomaron opción más conveniente. Su ahorro anual del año pasado fue de $29.000 ¿Cuál es la opción más conveniente?"
Alejandro: Pero es que yo creo que aquí pasa lo del otro día, este, ser socio va a ser conveniente en el futuro
Esteban: Si
Alejandro: Porque obvio que aquí da $90.000 y aquí da $50.000
Florencia: Pero el dinero gastado sin ser socio, o sea ya eres socio del cine, pagas más todavía
Alejandro: Yapo ¿entonces qué te conviene ser socio?
Florencia: Nada pues
Alejandro: Nada pues si pagas más
Florencia: Porque al final siempre los socios pagan menos entonces… entonces no conviene

Este episodio corresponde a un nivel 3 de EA, ya que los estudiantes justifican sus intervenciones sin refutaciones. Por ejemplo, Alejandro describe todo el cálculo que realiza para concluir que compraron 11 a 12 entradas. En cuanto a las conexiones matemáticas (CM), la discusión del problema se sitúa en la exploración del problema, estableciendo relaciones y cálculos simples que los lleva a conjeturar que ser socio debe implicar ser más conveniente. Por tanto, los estudiantes se están posicionando por medio de conexiones matemáticas simples (CS).

Ejemplo 2: Fase de trabajando con las matemáticas

En la fase trabajando con las matemáticas, todos los grupos presentaron sus cálculos y procedimientos en el papelógrafo y expusieron su postura al resto del curso en la pizarra. En el episodio 2, se aprecia un momento argumentativo en que los estudiantes discuten sobre si las entradas aumentan de manera constante o no.

Episodio 2

Alfredo: El valor sin descuento
Esteban: Es que no sé, cómo que no hay un valor…
Alfredo: ¿De cuánto es el valor original 5 mil cuánto?
Esteban: $5.150
Alfredo: por 20 es igual a…
Esteban: Es que el descuento como que va aumentando pero no de forma $2.500 + $2.500 + $2.500
Alfredo: Va aumentando el descuento
Esteban: Pero no va así como $2.500+$2.500+$2.500
Florencia: Aumenta en diferentes cantidades
Alejandro: Pero es que yo noté que el otro va a ser -$2.500 siempre o va a ser -$5.000, -$7.500 así
Florencia: Pero es que lo que dice Esteban es que no sabemos si el aumento va a ser el doble de $2.500 o puede ser otro precio
Alejandro: Noo, no puede ser diferente porque si en una te descuentan uno (un precio) no va a cambiar pues. Sería ilógico. Pero tienen que ir pensando que si es $2.500 siempre va a llegar un momento en que va a ser más conveniente que él

En la discusión entre los estudiantes presentes en el episodio 2, existe una idea que se está desarrollando respecto al valor por entrada. Esteban y Florencia indican que el valor de las entradas no va aumentando de manera constante, declaración que es refutada por Alejandro, señalando que al aplicar un descuento al ser socio es ilógico que no sea constante; por tanto, este episodio corresponde a un nivel 4 de EA. Por otro lado, las intervenciones de los estudiantes se posicionan por medio de conexiones matemáticas complejas (CC), ya que la observación que hace Esteban de que no aumenta de la forma $2500 no es evidente, sino que requiere de haber calculado primero los valores que faltan para luego empezar a discutir sobre el crecimiento del descuento.

Ejemplo 3: Fase de validación

En la tercera y última clase de la secuencia, se desarrolla la fase de validación del ciclo de modelación, en que los grupos de trabajo presentan sus papelógrafos al curso completo para que luego la profesora dirigiera una discusión, donde se analizó cada una de las producciones para escoger la que mejor se ajustaba a la realidad. Además, en conjunto, determinaron un modelo matemático en caso de ser socio y en caso de no serlo. En el episodio 3 se observa un momento argumentativo en que los estudiantes discuten el modelo y sus resultados, por medio de la intervención de Ángeles.

Episodio 3

Andrés: Eh, yo digo que siendo socio no hay tanto beneficio. O sea, porque, ¿quién va a ir con tantas personas a un cine?
Martín: Pero hay personas que buscan comprar más entradas y revenderlas.
Coni: Es que, o también, por eso se hacen socios, porque siempre van al cine, supuestamente.
Ariel: Sí po, para gente que va siempre al cine le sale a cuenta, o que tiene una familia grande.
Profesora: Ah, entonces podríamos tener restricciones...
Ariel: Sí po, porque le hace falta, a lo mejor, a un colegio, a un curso...
Profesora: Por ejemplo, si nosotros nos ganamos una ida al cine, ¿cuántas entradas compraríamos de una?
Ariel: Como 40.
Profesora: Como 40. Con los profesores, los inspectores, todos los que nos acompañan, ¿cierto?...
Coni: En las antiguas ecuaciones que habíamos hecho, siempre había una diferencia. Supongamos, se usaba más...
Andrés: Profesora, o sea que va a servir para algunas ocasiones, pero para otras ocasiones no.
Profesora: Ya, pero, ¿para qué ocasiones va a servir?
Andrés: Para las que vaya harta gente.
Profesora: ¿Estamos de acuerdo en eso?

El episodio 3 corresponde a un nivel 3 de EA, ya que los estudiantes tratan de justificar la coherencia y consistencia del modelo respecto a las condiciones de la situación real, debido a la intervención de otro estudiante que duda del resultado que ofrece el modelo. Con ayuda de la profesora, se establece que, de acuerdo a las condiciones, será pertinente tomar una decisión o no respecto a lo que indica el problema; esta conclusión se obtiene luego de haber estudiado y analizado la situación desde el modelo. En cuanto a las CM, en el episodio 3 se observan conexiones complejas, ya que los estudiantes utilizan, aunque no de manera tan explícita, los resultados obtenidos del análisis del modelo para posicionarse. En efecto, los estudiantes son conscientes de que hay rangos de valores para los cuales es conveniente tomar una u otra opción, lo que se aprecia a través de la observación de los modelos intermedios para el problema trabajado.

Los tres ejemplos descritos nos muestran las relaciones representativas entre el nivel de EA y CM en las fases de modelación descritas. En la fase de simplificación, las estructuras argumentativas son sin refutación y conexiones matemáticas simples. En la fase de trabajando con la matemática, emergen estructuras argumentativas con refutación y conexiones matemáticas complejas. Finalmente, en la fase de validación, estructuras argumentativas sin refutación, con conexiones matemáticas complejas.

DISCUSIÓN

Los cambios en el currículum de matemáticas de varios países para que los estudiantes puedan desarrollar competencias matemáticas (OCDE, 2019) no han sido suficientes para una modificación profunda de las prácticas en el aula de matemática. Del listado de competencias matemáticas (Niss y Højgaard, 2019), varias investigaciones han puesto el foco en las competencias de modelación (Blum y Leiß, 2007; Blum y Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006) y argumentación (Ayalon y Hershkowitz, 2018; Conner et al., 2014; Krummheuer, 1995). No obstante, es muy escaso en la literatura el abordaje conjunto de la argumentación y modelación, siendo que en su conjunto abordan aspectos esenciales de la actividad matemática de los estudiantes (Tekin-Dede, 2019). En este estudio, cuyo propósito ha sido caracterizar las relaciones entre la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas, se ha apreciado de qué manera, en un caso de estudio, los niveles superiores de estructura argumentativa y las conexiones matemáticas compleja se concentran en la fase *trabajando con las matemáticas* del ciclo de modelación, en otras palabras, cuando surge la necesidad por parte de los estudiantes de justificar y contrastar sus procedimientos y modelos matemáticos en grupo por medio de conexiones matemáticas compleja. Estos resultados son un aporte a las relaciones ya encontradas entre la argumentación y modelación que se han descrito en otros estudios (Güç y Kuleyin, 2021; Tekin-Dede, 2019), dado que profundiza de qué manera interactúan la argumentación en cuanto a la estructura y el contenido de la argumentación en relación a las fases del ciclo de modelación.

Una de las limitaciones que tiene el estudio es que para observar prácticas docentes que desarrollen la argumentación y la modelación ha sido necesario realizar un programa de desarrollo profesional de larga extensión para docentes, dado que no es habitual que el docente desarrolle estas competencias matemáticas de manera articulada. Esta limitación se ve reflejada en nuestro estudio ya que, de los veintidós profesores que iniciaron el proceso, finalmente fueron cinco docentes quienes mostraron secuencias de aprendizaje que completaron el ciclo de modelación con promoción de la argumentación. En ese manuscrito los hallazgos descritos se circunscriben a uno de los cinco casos de la investigación. Por tanto, un próximo estudio es poder analizar en más casos como se observan los niveles superiores de argumentación según las fases de modelación.

El estudio descrito tiene varias implicaciones para el aula de matemáticas. Desde el punto de vista del currículum de matemáticas, se muestra un caso de aula en que se generan oportunidades de aprendizaje para desarrollar de manera articulada la modelación y la argumentación, competencias matemáticas que están presentes en varios currículum de matemáticas (Real Decreto 157, 2022; MINEDUC, 2013). Desde el punto de vista del trabajo matemático de los estudiantes, el caso muestra que el desarrollo de tareas de modelación no se limita a una clase sin que se requiere que los estudiantes cuenten con un espacio y tiempo importantes para poder desarrollar el ciclo de modelación. Además, nuestro estudio sugiere la necesidad de implementar programas de desarrollo profesional con foco en el desarrollo de competencias matemáticas. Por tanto, es necesario considerar decisiones sobre el diseño de tareas matemáticas, la organización del trabajo de los estudiantes, el papel del docente y su formación, para que se generen oportunidades auténticas para desarrollar competencias matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ayalon, M. y Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior, 49*, 163-173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/bf00302716

Blum, W. (1996). Anwendungsbeziige im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven**.** *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, *23*, 15-38.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). Investigating quality mathematics teaching: The DISUM project. *Developing and researching quality in mathematics teaching and learning, proceedings of MADIF*, *5*, 3-16.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38 (2), 86-95.

Campo-Meneses, K., Font, V., García-García, J. y Sánchez, A. (2021). Mathematical connections activated in high school students' practice solving tasks on the exponential and logarithmic functions. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(9), em1998. https://doi.org/10.29333/ejmste/11126

Cervantes-Barraza, J., Cabañas-Sánchez, G. y Ordoñez-Cuastuma, J.S. (2017). El poder persuasivo de la refutación en argumentaciones colectivas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *31*(59), 861-879

Cho, K. y Jonassen, D. (2002). The effects of argumentation scaffolds on argumentation and problem solving. *Educational Technology Research and Development*, *50*(3), 5-22.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. y Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401-429.

Creswell, J. (2011). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4ta. ed.). Pearson.

García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227-252.

Güç, F. A. y Kuleyin, H. (2021). Argümantasyon kalitesinin matematiksel modelleme sürecine yansimasI. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *34*(1), 222-262. https://doi.org/10.19171/uefad.850230

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 3-21.

Knipping, C. y Reid, D. (2014). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_4

Kiel, E., Meyer, M. y Mueller-Hill, E. (2015). Erklaeren –Was? Wie? Warum? *Praxis der Mathematik in der Schule*, *64*(57), 2-9.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), T*he emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Lawrence Erlbaum.

Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G. y Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics*, *10*(18), 3339.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM – Mathematics Education*, *38*(2), 113-

142.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*, 85-311.

Maaß, K., Geiger, V., Ariza, M.R. y Goss, M. *(2019).* The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM*, *51*, 869-884. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5

Manouchehri, A. (2015). Implementing mathematical modelling: The challenge of teacher educating. En G. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education*. *International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 421-432). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319- 62968-1_35

Manouchehri, A., Bekdemir, M. y Yao. X. (2020). Facilitating modelling activities in a grade 5 classroom. E. G. Stillman, G. Kaiser, C. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-making, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 187- 197). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_17

Mariotti, M.A. y Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems'. *ZDM - Mathematics Education*, *51*(5), 759-777. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01059-3

MINEDUC (2013). *Bases curriculares chilenas 7º básico a 2º medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited**.** *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework (PISA*). OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23-41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-

Real Decreto 157/2022 de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (2022). *Boletín oficial del Estado,* 52, de 3 de marzo de 2022. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296

Reid, D., Knipping, C. y Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA*, 6(1) 1-10.

Smith, M. y Stein, M. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. National Council of Teachers of Mathematics.

Solar, H. y Deulofeu, J (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *30*(56), 1092-1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13 (2016)

Solar, H., Ortiz, A. y Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagógicos*, *42*(4), 281-298.

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J. y Ulloa, J. (2020). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(7), 977-1005. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J. y Ulloa, J. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(7), 977-1005. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686

Solar, H., Ortiz, A., Aravena, M. y Goizueta, M. (2023). Relaciones entre la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *37*(76), 500-531. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07

Tekin-Dede, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(2), 292-314. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument.* Cambridge University Press.

Van Eemeren, F.H., Grootendorst, R., Johnson, R.H., Plantin, C. y Willard, C.A. (2013). *Fundamentals of argumentation theory: A handbook of historical backgrounds and contemporary developments.* Routledge.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 423-440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Yin, R (2014). *Case study research: design and methods* (5ta. ed.). Sage.

RELATIONSHIPS BETWEEN MODELING AND ARGUMENTATION COMPETENCES IN THE LEARNING OF MATHEMATICS

ABSTRACT

Several studies have emphasized mathematical modeling and argumentation as part of the development of a competency view of learning. Although there is abundant literature on both mathematical competences, joint approaches to argumentation and modeling are limited in the literature. This study aims to explain how argumentation gives a new perspective to modeling in the classroom, by analyzing group discussions and the conflicts that emerge between students to find the most appropriate solution. Based on a case study from Professor Ángeles' mathematics classroom, the purpose is to characterize the development of argumentation when students go through the modeling cycle in the mathematics classroom. To do this, episodes were selected in which modeling codes from the different phases of the modeling cycle and moments of argumentation with the presence of refutations converge. The results indicate that students' higher levels of argumentation are concentrated in the working with mathematics phase of the modeling cycle. These results are a contribution to the relationships already found between argumentation and modeling that have been described in other studies.

Keywords: Mathematical literacy; mathematical competences; modeling, argumentation; case studies; Teacher professional development

RELAÇÕES ENTRE AS COMPETÊNCIAS DE MODELAGEM E ARGUMENTAÇÃO NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

RESUMO

Para desenvolver uma visão de competência da aprendizagem, várias investigações têm enfatizado as competências de modelagem e argumentação. Embora exista uma vasta literatura sobre ambas as habilidades matemáticas, a abordagem conjunta de argumentação e modelagem é muito escassa na literatura. Este estudo tem como objetivo explicar como a argumentação dá uma nova perspectiva à modelagem em sala de aula, analisando as discussões em grupo e os conflitos que surgem entre os alunos para encontrar a solução mais adequada. Com base num estudo de caso da sala de aula de matemática da professora Ángeles, o objetivo é caracterizar o desenvolvimento da argumentação quando os alunos passam pelo ciclo de modelagem na sala de aula de matemática. Para isso, foram selecionados episódios em que convergem códigos de modelagem das diferentes fases do ciclo de modelagem e momentos de argumentação com presença de refutações. Os resultados indicam que os níveis mais elevados de argumentação dos alunos estão concentrados na fase de trabalho com matemática do ciclo de modelagem. Estes resultados são uma contribuição para as relações já encontradas entre argumentação e modelagem que foram descritas em outros estudos.

Palavras-chave: Mathematical literacy; competências matemáticas; modelagem; Argumentação; Estudo de casos; Desenvolvimento profissional de professores

Horacio Solar Bezmalinovic
Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
hsolar@uc.cl.
https://orcid.org/0000-0002-1958-8153
Profesor asistente de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesor y Licenciado en Matemática. Realizó sus estudios de doctorado en Didáctica de las matemáticas en la Universitat Autònoma de Barcelona. Ha dirigido los proyectos Fondecyt 113675 "Tratamiento de la contingencia desde el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemática" y Fondecyt 1180880 "Aprendizaje de los estudiantes en contextos de argumentación colectiva y modelización el aula de matemáticas". Sus áreas de interés principales son las competencias matemáticas, en especial la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas, y el desarrollo profesional docente en matemáticas.

Andrés Ortiz Jiménez
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile.
aortiz@ucsc.cl
https://orcid.org/0000-0003-1370-8051
Profesor Asociado de la Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Profesor de Matemática y Magíster en Enseñanza de las Ciencias mención Matemática. Actualmente está realizando sus estudios de doctorado en Didáctica de las Matemáticas en la Universitat Autònoma de Barcelona. Ha sido coinvestigador en los proyectos Fondecyt Fondecyt 1180880 "Aprendizaje de los estudiantes en contextos de argumentación colectiva y modelización el aula de matemáticas", Fonide FX 11264 "Diagnóstico de las creencias y conocimientos iniciales de estudiantes de pedagogía básica sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza" entre otros. Sus áreas de interés principales son las competencias matemáticas, en especial la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas, y el desarrollo profesional docente en matemáticas.

Victoria Arriagada Jofré
Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
vparriagada@uc.cl
https://orcid.org/0000-0002-5112-0876
Profesora de Matemática y Computación de la Universidad de Concepción y Magíster en Educación Superior de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Actualmente, realiza su Doctorado en Educación en la Pontificia Universidad Católica de Chile y forma parte del equipo ARPA (Activando la Resolución de Problemas en las Aulas) de la Universidad de Chile. Ha participado en los proyectos Fondecyt 113675 "Tratamiento de la contingencia desde el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemática" y Fondecyt 1180880 "Aprendizaje de los estudiantes en contextos de argumentación colectiva y modelización en el aula de matemáticas", entre otros. Sus principales áreas de interés son las competencias matemáticas: argumentación, modelación y la resolución de problemas en el aula de matemáticas; el desarrollo profesional docente de profesores de matemáticas y el desarrollo de la mirada profesional de docentes y futuros docentes de matemáticas.

Marco Catalán Urbina
Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
mncatalan@uc.cl
https://orcid.org/0000-0002-8783-2963
Licenciado en Ciencias con mención en Matemática de la Universidad de Chile, profesor de enseñanza media de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Master of Education de The University of Melbourne y estudiante del Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona. Actualmente, se desempeña como docente en la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile y en la Escuela de Educación de la Universidad de O'Higgins. Ha participado en el proyecto Fondecyt 1180880 “Aprendizaje de los estudiantes en contextos de argumentación colectiva y modelización en el aula de matemáticas”, junto a otras instancias de desempeño profesional y de investigación. Sus principales áreas de interés son la formación inicial docente y el ámbito de la educación de estudiantes talentosos.

Capítulo 4

UN MODELO COGNITIVO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA CONJETURA Y SU PRUEBA EN UN CONTEXTO GEOMÉTRICO-FIGURAL[6]

Marcela Parraguez-González

Isabel García-Martínez

Irma Pinto-Rojas

RESUMEN

En este capítulo se realza la importancia de actividades que propician la construcción de una conjetura en un contexto geométrico-figural y su prueba. Para ello, con base en la teoría APOE, se interpreta la construcción del Objeto abstracto conjetura, a través de Acciones sobre Objetos concretos. Se considera la metodología proporcionada por esta teoría, para lo cual, se diseña una descomposición genética que modela la construcción del Objeto abstracto conjetura y su prueba pasando por la construcción mental Totalidad y el mecanismo síntesis. Para validar o refinar dicha descomposición genética se aplicó una actividad geométrico-figural a un caso único. A partir del contraste de la descomposición genética con los datos obtenidos, se evidenció el rol fundamental que tienen las actividades geométrico-figurales para lograr la construcción de esta conjetura. Como resultado, se presenta la construcción de la conjetura y su prueba en un modelo cognitivo que valida la síntesis de elementos geométricos en una expresión de la conjetura como Totalidad, la cual se encapsula a través de un método de prueba en el Objeto abstracto conjetura probada. Estos resultados constituyen un aporte para el diseño de actividades de clase, dado que favorecen la construcción de un Objeto abstracto a partir de Acciones sobre Objetos concretos.

Palabras clave: Conjetura; Modelo cognitivo; APOE.

INTRODUCCIÓN

El punto inicial de esta investigación se asocia con el proceso mismo que se va realizando para llegar a determinar una conjetura inicial que llamaremos *conjetura* (dinámica) y su posterior

---

[6] **Como citar:** Parraguez-González, M., García-Martínez, I. y Pinto-Rojas, I. (2024). Un modelo cognitivo para la construcción de la conjetura y su prueba en un contexto geométrico-figural. En M.D. Aravena-Díaz y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades* (pp. 80-102). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

validación a través de un método de prueba, para alcanzar la que llamaremos *conjetura y su prueba* (estática), para un problema específico que está presentado en un contexto geométrico-figural.

El caso del problema que hemos llamado *"Contar en un geoplano"* y la experimentación mental de elaborar una conjetura, permite mostrar la capacidad de un individuo de testear una conjetura para determinar "tantear" su valor de verdad. Esto último, corresponde a un paso mental importante, ya que por un lado podría indicar que la conjetura es falsa, pero por otro podría permitir pensar en un algoritmo que se generalice, es decir, dar luces de la prueba de la conjetura.

En el ámbito de la literatura, el enunciado y el tratamiento de la conjetura junto con el uso de diferentes técnicas para su prueba, recae en contextos mayoritariamente algebraicos o aritméticos (Girit Yildiz y Durmaz, 2021); sin embargo, en esta investigación se indaga en la ruta matemática o geométrica que se puede dar para determinar una conjetura y su posterior prueba, a través de una actividad geométrico-figural. Todo el proceso seguido, desde la propuesta de la conjetura hasta su prueba, es interpretado por una teoría cognitiva –la teoría APOE–, por medio de la cual fue posible sustentar para un estudio de caso único que, para alcanzar el objeto cognitivo conjetura, se requiere que un proceso algebraico o geométrico sea sintetizado en una conjetura como una Totalidad, para posteriormente ser encapsulada en el objeto abstracto de conjetura y su prueba, a través de un principio o método que la valide como tal.

ANTECEDENTES

En esta investigación se propone un modelo que muestra la ruta cognitiva de un sujeto que conjetura y prueba en un contexto geométrico-figural, considerando la conjetura como una "declaración que se cree cierta, pero para la que no se ha encontrado una demostración ni un contraejemplo" (Scheinerman, 2000, p. 469). De acuerdo con la investigación de Cañadas et al. (2008), en el ámbito de la resolución de problemas, las conjeturas se clasifican en los siguientes tipos: inducción empírica a partir de un número finito de casos discretos, inducción empírica a partir de casos dinámicos, por analogía con un hecho conocido o por abducción, y conjeturas basadas en la percepción. Esta clasificación no contempla la forma de conjeturar a partir de una construcción recursiva, tampoco se ha encontrado literatura que la considere.

En general, en las investigaciones se aborda la tarea de conjeturar a través de un camino hacia la generalización con un razonamiento inductivo (Castro et al., 2010; Nuñez-Gutiérrez y Cabañas-Sánchez, 2020; Pinto y Cañadas, 2018; Sosa et al., 2020), esto es, en las conjeturas del primer tipo en la clasificación anterior.

La percepción cognitiva en el camino para generalizar y llegar a una conjetura va más allá de la percepción sensorial (Rivera, 2010), dado que, un sujeto que enfrenta la tarea de conjeturar ve o reconoce propiedades o hechos que relacionan la estructura matemática en conexión con la figura. En el camino para generalizar se presentan dificultades, como se evidencia en la investigación realizada por Sosa et al. (2020) con profesores de secundaria, donde concluyen que en el camino para generalizar no es suficiente reconocer regularidades, sino que, más importante es relacionarlas con las estructuras matemáticas para poder describir el patrón de manera general.

Mariotti y Pedemonte (2019), realizan una investigación con problemas geométricos abiertos que requieren una conjetura y su demostración. Ellas concluyen que cuando una conjetura se construye a partir de la argumentación, la prueba puede resultar más accesible para los estudiantes que cuando esta argumentación está ausente y la conjetura emerge desde la intuición o evidencia perceptiva. En este caso, puede resultar muy difícil para los estudiantes construir una prueba porque no tienen ninguna pista para construir una argumentación.

Esta investigación que se presenta, considera el tipo de conjetura basada en la percepción, pero no relacionada con la generalización de patrones ni con el razonamiento inductivo, sino que la conjetura a través de una construcción recursiva en un contexto geométrico-figural.

Si bien el problema que se plantea en esta investigación es un problema geométrico-figural, las conjeturas que se construyan son planteadas en función de los números naturales, y un método de prueba usual para estas conjeturas obtenidas a partir de un proceso recursivo, es el principio de inducción matemática. Este último es un método de demostración, utilizado para probar que una función proposicional es verdadera para todo número natural n. En matemática muchos descubrimientos se conjeturan antes de ser probados, un ejemplo de ello es el Teorema de Fermat (Singh, 1998). Para llegar a una conjetura, tal cual lo evidencian los trabajos de Peano (Apostol, 1999; Movshovitz-Hadar, 1993), entre otros, la mente humana procede muchas veces inductivamente.

En esta investigación se considera la prueba como intelectual en el sentido de Balacheff (1987), esto es, aquella que proviene de un razonamiento donde se articulan argumentos dados en lenguaje simbólico, con pasaje a lo algebraico o geométrico, dejando de lado los objetos materiales.

En este escenario la pregunta de investigación es: en un contexto geométrico-figural, ¿qué estructuras mentales modelan la construcción de una conjetura y su prueba en un profesor de matemáticas?

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En pro de responder la pregunta de investigación, se determina el siguiente objetivo general: determinar estructuras mentales que muestra un profesor de matemáticas para modelar la construcción de una conjetura y su prueba en un contexto geométrico-figural. Y los objetivos específicos son: (1) diseñar un modelo hipotético de construcción de conjeturas a las que podría llegar un profesor de Matemáticas, (2) validar o refinar el modelo propuesto y (3) mostrar evidencias con sustento teórico del uso que el profesor hace de un método de prueba para validar conjeturas en un contexto geométrico-figural.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico sobre el cual se fundamenta e interpreta esta investigación es la teoría APOE, cuya sigla significa Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Esta fue creada por Ed Dubinsky (1996) y está basada en la teoría de Piaget (1967/2000) sobre la construcción del conocimiento y la abstracción reflexiva. Posteriormente, esta teoría se ha seguido desarrollando en conjunto con otros investigadores (Arnon et al., 2014).

Construcciones mentales

Según la teoría APOE (Arnon et al., 2014) todos los conceptos matemáticos, o fragmentos de estos, pueden construirse en la mente de un individuo a través de estructuras (o construcciones) mentales denominadas Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

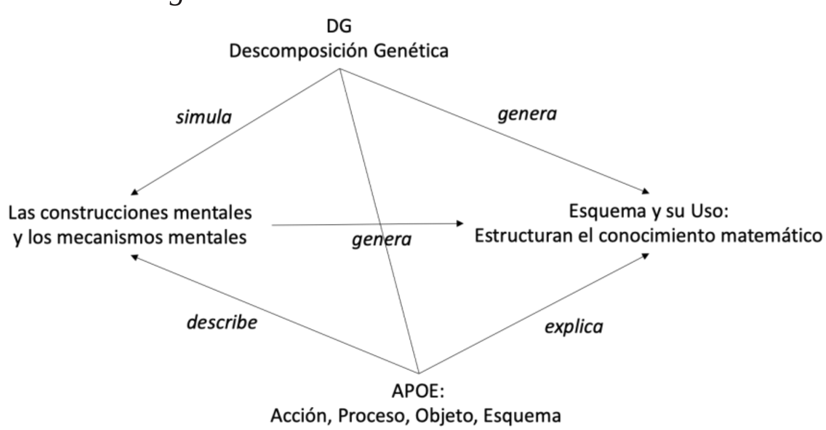
Un individuo muestra una construcción Acción de un concepto matemático determinado cuando necesita de un estímulo externo para realizar transformaciones sobre Objetos –físicos o mentales construidos previamente–. Esta Acción es interiorizada en un Proceso cuando el individuo la repite y reflexiona sobre ella. A su vez este Proceso se encapsula en un Objeto cuando el individuo puede verlo como un todo y actuar sobre él. Este Objeto, si fuera necesario, también puede desencapsularse para volver al Proceso que lo generó, por ejemplo, para mostrar un contraejemplo.

El conjunto de Acciones, Procesos y Objetos relacionados con un concepto matemático específico es denominado Esquema de dicho concepto, que es una estructura coherentemente armada. Coherente en el sentido de que un individuo puede determinar si dicho Esquema le es útil o no al enfrentarse a una situación matemática específica. El Esquema, a su vez, puede ser visto como un Objeto para actuar sobre él, en este caso se dice que el Esquema se ha tematizado.

La forma de pasar de un estado de construcción del conocimiento a otro superior se denomina mecanismo mental. Algunos mecanismos mentales son la interiorización, la coordinación, la reversión, la encapsulación y la desencapsulación.

En el escenario investigativo, la teoría APOE proporciona elementos para el diseño de modelos cognitivos que permiten describir en un conjunto organizado de construcciones y mecanismos mentales la ruta cognitiva para el aprendizaje (construcción) de tópicos matemáticos específicos. Este modelo recibe el nombre de *Descomposición Genética (DG)*, el cual actúa como hipótesis en la investigación y se pone a prueba para ser validado o refinado.

Figura 1.
APOE modela la construcción cognitiva del conocimiento matemático



Fuente: Adaptado de Parraguez et al. (2021, p. 318)

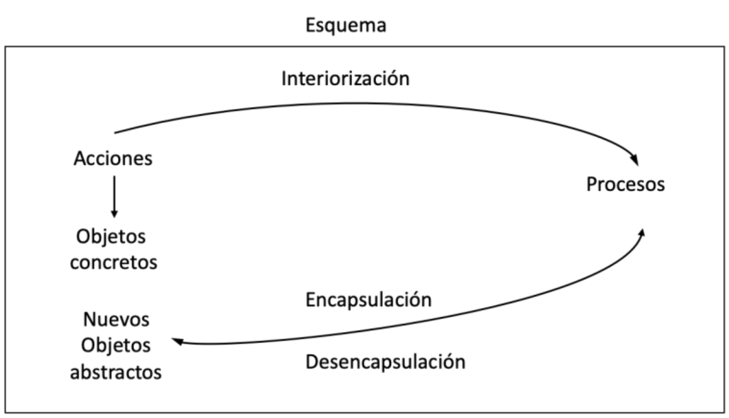
La teoría APOE, en el contexto que se muestra en la Figura 1, modela la construcción cognitiva de fragmentos matemáticos a través de (1) elementos que describen las construcciones mentales que se precisan para explicar los componentes del Esquema cognitivo que evoca un sujeto para su uso y que van estructurando su conocimiento matemático y (2) un modelo llamado DG, que simula y genera las estructuras y mecanismos mentales que el investigador pone a prueba para evidenciar el aprendizaje de Objetos abstractos o concretos de la matemática.

Objetos abstractos y objetos concretos

Los significados que se consideran en esta investigación para abstracto y concreto son los dados en Arnon et al. (2001), esto es: un Objeto abstracto es aquel que hace referencia a un concepto matemático que no tiene ninguna representación física del mundo, en cambio un Objeto concreto es el que involucra el uso de objetos físicos tanto reales como imaginarios. Específicamente en la presente investigación los Objetos concretos son las figuras que se construyen a partir de un geoplano de malla cuadrada, con la finalidad de que se apliquen Acciones sobre estos Objetos concretos para construir la conjetura hipotética, la cual podrá ser validada usando el principio de inducción matemática u otro método, para transformarse en el Objeto abstracto conjetura.

Para interpretar las Acciones sobre los Objetos concretos se operacionalizará la teoría APOE, tal cual se propone en Arnon et al. (2014). En la Figura 2 se presenta cómo las Acciones aplicadas a Objetos concretos dan lugar a Objetos matemáticos abstractos en la mente de un individuo, esto es, las Acciones así interiorizadas se encapsulan en Objetos abstractos.

Figura 2.
Construcciones y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático a partir de Objetos concretos

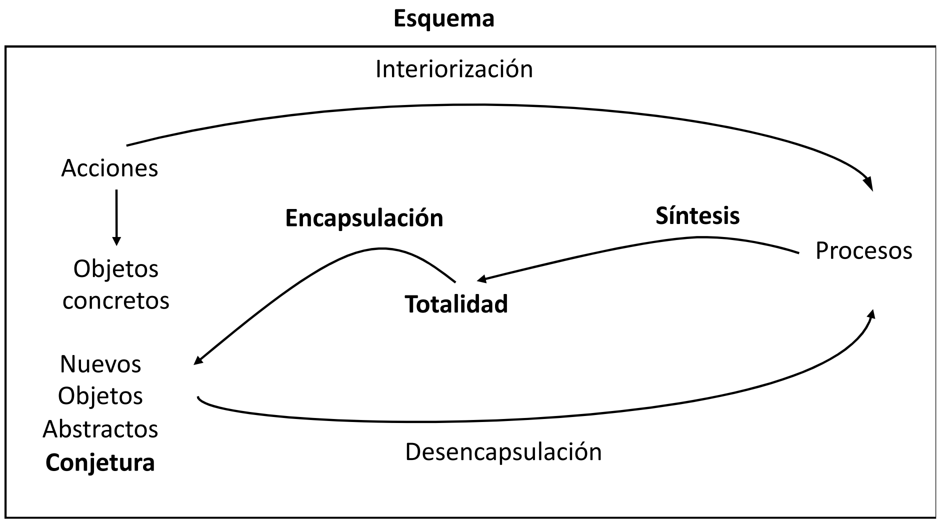


Fuente: Adaptado de Arnon et al. (2014, p. 154)

En la presente investigación, y para una actividad específica que requiere ser conjeturada y probada, se incluirá en la Figura 2 la construcción mental Totalidad, como se muestra en la Figura 3.

Figura 3.

Construcción mental Totalidad y mecanismo asociado



Fuente: Adaptado de Arnon et al. (2014, p. 154)

Esta construcción mental Totalidad se presenta en Arnon et al. (2014) como una estructura intermedia entre Proceso y Objeto dado que, según el desarrollo de la teoría APOE, hasta el año 2013 la construcción de Objetos mentales se caracterizaba por dos aspectos esenciales: a) concebir un Proceso como un todo (Totalidad) y b) poder realizar Acciones sobre esa Totalidad (Arnon et al., 2014; Weller et al., 2011), donde la Totalidad era parte del Objeto. Sin embargo, en Dubinsky et al. (2013) se abrió la posibilidad de que en la construcción de ciertos objetos matemáticos se requiera la Totalidad como una estructura en sí misma, lo que permite interpretar con mayor detalle cómo se logra el aprendizaje de tópicos matemáticos específicos, especialmente los que involucran Procesos que se corresponden con los números naturales, donde Gutiérrez y Parraguez (2021) han mostrado que el mecanismo mental que permite el desarrollo de tal estructura es el mecanismo síntesis.

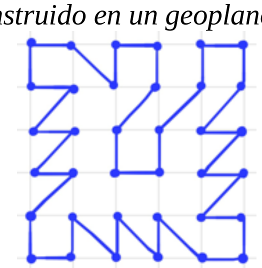
En el contexto de esta investigación, la Figura 3 muestra un modelo teórico cognitivo resultante de haber operacionalizado la Teoría APOE incluyendo el mecanismo síntesis y la estructura Totalidad, el cual nos proporciona los elementos sobre los cuales se interpreta y analiza la construcción y prueba de una conjetura en un contexto geométrico-figural, como un Objeto abstracto.

MÉTODO

Los elementos que han guiado los aspectos metodológicos de este estudio se explican desde el propio paradigma de investigación de la teoría APOE, con un ciclo de investigación formado por tres componentes: (i) el análisis teórico o DG del tópico matemático en estudio, (ii) el diseño y aplicación de instrumentos y (iii) el análisis y verificación de datos para validar o refinar la DG propuesta. La ejecución de este ciclo permite, de una manera precisa y detallada, describir las estructuras mentales de sujetos que enfrentan actividades relacionadas con conjeturas geométrico-figurales y su prueba. La búsqueda de la comprensión de estos fenómenos se enmarca en el paradigma hermenéutico-interpretativo, dado que los datos son los registros figurales y la matemática que los sujetos ponen en juego en situaciones específicas, los cuales son coherentes con los objetivos de la investigación. El propósito fundamental es comprender en profundidad la particularidad del dato, y el estudio de casos permite complementar una indagación en su complejidad, "tanto por lo que tiene de único como por lo que tienen en común" (Stake, 2010, p. 11). En relación con esto último, se considera un caso único para indagar en profundidad y comprender la realidad, centrando siempre el interés en el caso que aporta mejores y mayores posibilidades para analizar cómo profesores universitarios construyen una conjetura y el método que utilizan para realizar su prueba.

Siguiendo el ciclo de investigación de APOE, su primer componente corresponde al análisis teórico o DG, cuyo objetivo es proponer un modelo cognitivo que guíe la construcción de una conjetura para el problema P: *determine el mayor número de lados de un polígono que se pueda dibujar en un geoplano de malla cuadrada de lado par y pruebe su conjetura*. Por ejemplo, en un geoplano de malla cuadrada, de 6×6, se puede construir el polígono de 36 lados, que es el de mayor número de lados, porque los vértices de ese polígono son la totalidad de los puntos del geoplano de malla cuadrada de 6×6, que se muestra en la Figura 4.

Figura 4.
Polígono de mayor número de lados construido en un geoplano de malla cuadrada de 6×6



Fuente: Datos de la investigación

Descomposición Genética para conjeturar P y su prueba

El modelo cognitivo que conduce a conjeturar el problema P y su prueba está dado por la siguiente ruta cognitiva.

Acciones

a) La Acción de unir los puntos de un geoplano de malla cuadrada de lado par para formar un polígono.
b) La Acción de contar el número de lados del polígono construido en el geoplano.
c) La Acción de seleccionar, en cada caso, el polígono de mayor número de lados construido en el geoplano de malla cuadrada de $2 \times 2, 4 \times 4, 6 \times 6, \ldots, 2n \times 2n$ ($n \in \mathbb{N}$).
d) La Acción de construir, en cada caso, un polígono que tenga vértices en el mayor número posible de puntos del geoplano de malla cuadrada de $2 \times 2, 4 \times 4, 6 \times 6, \ldots, 2n \times 2n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Interiorización de Acciones

Argumenta que el polígono con el mayor número de lados es el que utiliza todos los puntos del geoplano como vértices.

Proceso

Transforma a P en el problema equivalente, esto es, *determinar la existencia de un polígono que tenga como vértices todos los puntos del geoplano*.

Mecanismo mental síntesis asociado a Totalidad

Los puntos que se utilizan del geoplano, los segmentos que se trazan y sus distintas representaciones (dibujos) se sintetizan en una expresión algebraica o geométrica llamada conjetura.

Totalidad

El problema equivalente se concibe como un todo, en el sentido de utilizar todos los puntos del geoplano como vértices del polígono, a partir de lo cual se construye la conjetura.

Encapsulación

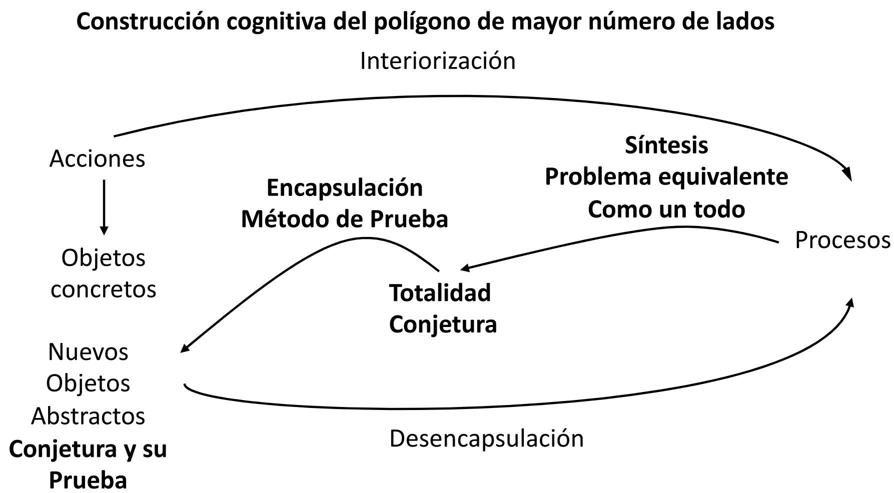
El método de prueba utilizado para validar la conjetura.

Objeto abstracto

Conjetura probada.

En resumen, la DG o Modelo Hipotético para la construcción de la conjetura de P y su prueba como Objeto abstracto es la que se muestra en la Figura 5.

Figura 5.
DG hipotética de la construcción de la conjetura de P y su prueba



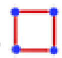
Fuente: Elaboración propia

Respecto del segundo componente del ciclo de investigación de APOE, una vez que se establece el análisis teórico y se diseña la DG, sigue proponer la actividad a los sujetos participantes de la investigación, de tal manera que puedan mostrar argumentos observables de cómo llegan a construir la conjetura y su prueba del problema presentado en un contexto geométrico-figural, tomando como referencia los elementos descritos en la DG. La importancia de este componente radica en que la DG puede o no validarse a través de las evidencias que proporcionan los participantes.

Diseño de instrumentos y caso de estudio

En la presente indagación, el instrumento de recogida de datos se ha llamado “Contar en un geoplano”. Esta actividad contiene dos situaciones que se describen en la Tabla 1, la que fue aplicada a un caso de estudio.

Tabla 1.
Actividad “Contar en un geoplano”

Situaciones	Preguntas
S1	Determine el mayor número de lados de un polígono que se pueda dibujar en un geoplano de malla cuadrada de tipo $2n \times 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, en un geoplano de 2×2 se puede construir , que es un polígono de cuatro lados.
S2	Pruebe su conjetura.

Fuente: Elaboración propia

Para la confiabilidad de la Actividad “Contar es el Comienzo” se utilizaron los criterios de rigor para una investigación cualitativa, expuestos por Izcara (2014): (a) Someter los instrumentos a la crítica de expertos; (b) Grabación y transcripción del material cualitativo; (c) Triangulación de los datos recogidos para la comprensión del fenómeno.

El objetivo de S1 es mostrar el Proceso de conjeturar, a partir de diferentes situaciones geométrico-figurales específicas que se describen en la DG de conjeturar P y su prueba. La finalidad de S2 es analizar si el método de prueba utilizado fue el principio de inducción matemática u otro, para probar la conjetura propuesta en S1 y contrastar los argumentos observables de los participantes con las estructuras y mecanismos mentales propuestos en la DG.

Caso único de estudio

Un punto importante, en relación con el propósito de la investigación, es la necesidad de realizar el estudio con informantes de alto nivel académico, que permitan asegurar el logro de los objetivos del estudio, por lo que se han considerado los siguientes criterios para la conformación de un caso único de estudio: (a) ser profesor de universidad; (b) haber sido profesor de una asignatura de tópicos de álgebra y (3) ser accesible para las investigadoras.

La actividad “Contar en un geoplano” fue enviada vía correo electrónico a seis profesores, los cuales respondieron y enviaron sus respuestas escaneadas. De estos profesores se consideró solo uno, dado que sus respuestas fueron las que aportaron más elementos para ser contrastadas con la DG, constituyendo el caso único de estudio (Tabla 2).

Tabla 2.

Ciclo metodológico y Caso de estudio para la actividad "Contar en un geoplano"

Ciclo Componentes	Diseño metodológico				
1	Análisis teórico o DG para construir la conjetura de P				
2	Diseño y Aplicación de Instrumentos				
	Estudio de Caso				
	Caso	Participantes	Nivel	Características	Identificación
	Caso único	Profesor universitario	Posgrado nacional e internacional Doctor en Matemática	Profesor de Matemáticas universitarias con 15 años de experiencia	D1
	Técnica Actividad "Contar en un geoplano"				
3	Análisis y verificación de datos				
	Los datos obtenidos de la aplicación de la técnica son analizados desde la DG propuesta, mostrando qué estructuras y mecanismos mentales evidencia D1.				

Fuente: Adaptado de Córdova-Cornejo et al. (2024, p. 7)

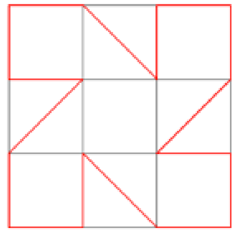
RESULTADOS

Los datos obtenidos a partir de la aplicación del instrumento al caso único fueron analizados desde la DG hipotética, detectando qué estructuras evidenciadas por los informantes no han sido tomadas en cuenta en la DG y cuáles de las incluidas hipotéticamente no fueron observadas. En cuanto a lo inesperado en los argumentos observables del caso de estudio, se tomaron decisiones consensuadas entre las investigadoras.

D1 aborda la actividad desechando los polígonos que se pueden dibujar en una cuadrícula de 0×0 y 1×1, y la justificación radica en que el primer caso es vacío y el segundo es un punto. Sumado a lo anterior, D1 indica que para una cuadrícula de 2×2 el polígono con mayor número de lados es el polígono de 4 lados, y con base en este caso D1 plantea una primera conjetura, *C1: el número máximo de lados es* $2(2n)$, $n \in \mathbb{N}$. Con un dibujo (Figura 6), D1 muestra que la conjetura propuesta no se cumple para $2n = 4$, porque obtiene un polígono de 16 lados y $2(2n) \neq 16$.

Figura 6.

Polígono de 16 lados para $2n = 4$

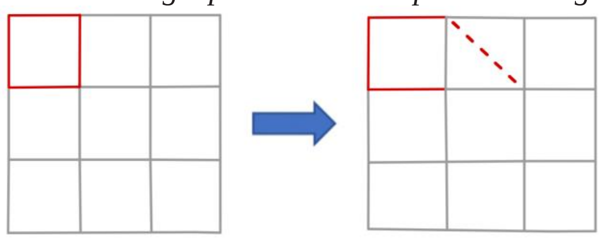


Fuente: Elaboración propia

Con base en la Figura 7, D1 observa y reflexiona sobre cómo utilizar de forma óptima la figura del caso 2×2 para construir la figura en el geoplano de 4×4. En sus deliberaciones, D1 señala que la mejor manera de usar los 4 vértices del caso 2×2 es comenzar la construcción, como se observa en la Figura 7.

Figura 7.

Construcción de la figura de D1en el geoplano de 4×4 a partir de un geoplano de 2×2



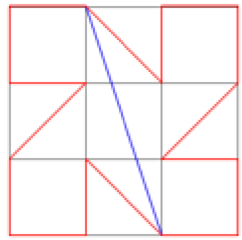
Fuente: Elaboración propia

Ahora D1 se pregunta: ¿hacia dónde se debe continuar con el dibujo? No se puede ir hacia abajo porque se cierra el ciclo, tampoco parece óptimo continuar de manera horizontal porque se desperdician 3 vértices. Así que la opción más razonable para D1 es continuar de manera diagonal, tal cual se muestra en la Figura 7. Producto de esta reflexión, D1 considera que una estrategia para construir polígonos en otras cuadrículas pares, con el mayor número de lados, es intentar colocar en el geoplano el mayor número de dibujos de la forma $\sqsubset$, $\sqsupset$, $\sqcap$ o $\sqcup$ y conectarlos con diagonales.

Esto último, señala D1, coincide con los 2^2 lados del caso 2×2. Además, en el otro geoplano que le sigue de 4×4, 4^2 es el máximo número de lados posibles, pues con estas construcciones –declara D1– se usan todos los vértices (cada vértice con dos aristas), de lo contrario, algunos vértices tendrían 3 aristas, como se aprecia en la Figura 8, no siendo esa la definición de polígono que se considera en esta investigación.

Figura 8.

Construcción de D1 para descartar el polígono



Fuente: Elaboración propia

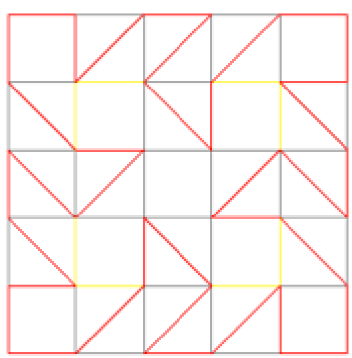
En este recorrido de reflexión, D1 señala que en este momento se podría conjeturar, para este caso par, *C2: el número máximo de lados es* $(2n)^2$.

A partir de todas estas ideas expuestas por D1, se interpreta desde la DG hipotética que D1 muestra interiorización de Acciones concretas sobre las Figuras 6 y 7 en el Proceso en el cual transforma el problema P en uno equivalente, argumentando que el polígono con el mayor número de lados es el que utiliza todos los puntos del geoplano como vértices.

A continuación, D1 aborda el caso 6×6 para comprobar si la conjetura C2 es verdadera o falsa para el valor $2n = 6$. C2 será verdadera si es posible construir en una cuadrícula de 6×6 un polígono de 6^2 lados. D1 comenta que se debería poder construir un polígono utilizando todos los vértices, lo cual es posible de acuerdo con un patrón de construcción particular, como D1 lo deja ver en la Figura 9.

Figura 9

Polígono de 36 *lados para* $2n = 6$ *realizado por D1*

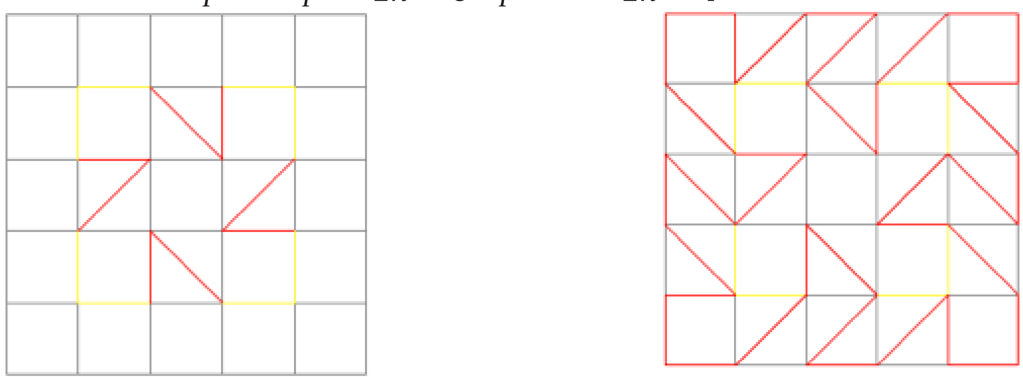


Fuente: Elaboración propia

El patrón que D1 sigue para construir la Figura 9, se sustenta en una relación metafórica que D1 establece entre la construcción del polígono y el crecimiento de los brotes en las plantas, esto es, considerar las orillas exteriores (extremos de la planta) para hacer crecer nuevos brotes en cada extremo. Con base en la Figura 9, D1 se predispone a dibujar una figura en un geoplano de 6×6, para ello en la Figura 10 borra los 8 lados exteriores del caso 4×4 (amarillos). Posteriormente, D1 agrega que los brotes con el mayor número de lados posibles en cada arista borrada deben cubrir todos los vértices de la orilla del cuadrado de 6×6, conectándolos con los vértices libres (los que se quedaron con una sola arista, después de borrar las aristas amarillas) del cuadrado de 4×4. Así es como D1 logra construir el polígono de 36 lados en una cuadrícula de 6×6, apreciado con detalle en la Figura 10.

Figura 10.

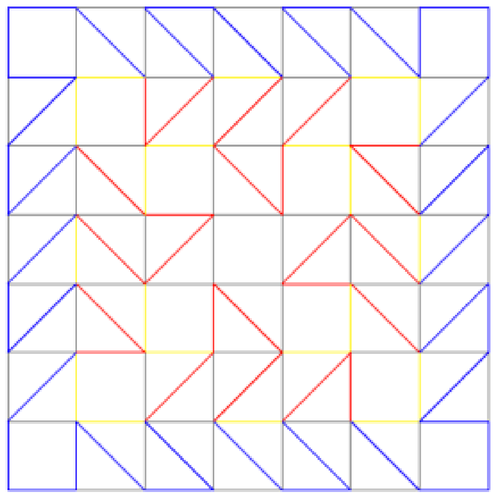
Construcción realizada por D1 para $2n = 6$ a partir de $2n = 4$



Fuente: Elaboración propia

Con esta forma de proceder, D1 muestra que, debido a la interiorización de Acciones concretas sobre construcciones específicas en la cuadrícula $2n \times 2n$, ha cambiado el problema P por uno equivalente, esto es, determinar polígonos que utilizan todos los puntos del geoplano como vértices del polígono, como fue considerado en la DG hipotética, pero de forma recursiva, es decir, construir el polígono que sigue con base en el resultado anterior, conformado a través de Sintetizar segmentos y puntos en una figura integral como Totalidad que le permite ir estableciendo conjeturas hipotéticas para el problema P o su equivalente. Sumado a lo anterior, se puede inferir que D1 está utilizando la prueba de validar o refutar sus conjeturas como un medio para llegar a construir el Objeto cognitivo abstracto de conjetura probada, lo cual se evidencia cuando D1 corrobora la construcción del siguiente polígono, a través del anterior válidamente construido. Este argumento observable de construcción de la conjetura del problema equivalente a P que presenta D1 es posible debido a que D1 ha sintetizado la expresión algebraica o geométrica en una conjetura hipotética como Totalidad a través de una síntesis de elementos geométricos, la cual se encapsula por medio de la prueba recursiva metafórica en el Objeto abstracto de conjetura probada. Esta última se evidencia nuevamente en el patrón de construcción que D1 ha elaborado, el cual es validado por D1 nuevamente para el caso 8×8, explicitado en la Figura 11.

Figura 11.
Patrón de construcción para $2n = 8$ de D1

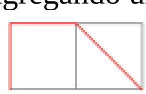
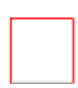


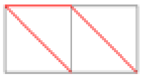
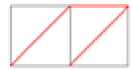
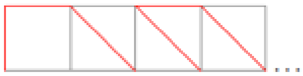
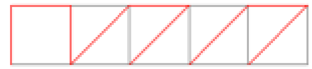
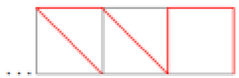
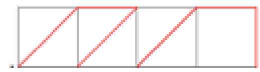
Fuente: Elaboración propia

D1, antes de proceder a elaborar una propuesta para una cuadrícula de $2n \times 2n$, con $n \in \mathbb{N}$ a través de un procedimiento recursivo, hace notar que siempre se borra una arista de manera alternada en la orilla y que siempre se puede borrar de a dos aristas en las esquinas. Lo anterior, indica D1, es posible porque tenemos un número par de vértices y se pueden borrar de manera alternada.

Luego de esto, D1 sostiene que el patrón general de construcción a partir del caso anterior será siempre de una de las formas que se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3
Formas de construir un polígono óptimo en una cuadrícula de $2n \times 2n$, con $n \in \mathbb{N}$

FORMA 1 $2n \equiv 0\ mod(4)$	FORMA 2 $2n \equiv 2\ mod(4)$
Si $2n \equiv 0\ mod\ 4$ (como el caso de la Figura 11). Empezar en la esquina superior agregando un brote de la forma:  Y continuar con los brotes de la forma:	Si $2n \equiv 2\ mod\ 4$ (como el caso de la Figura 10). Empezar en la esquina superior agregando un brote de la forma:  Y continuar con brotes de la forma:

FORMA 1 $2n \equiv 0 \; mod(4)$	FORMA 2 $2n \equiv 2 \; mod(4)$
	
De modo que se obtenga:	De modo que se obtenga:
	
Para terminar con algo de la forma:	Para terminar con algo de la forma:
	

Fuente: Elaboración propia

El patrón que presenta D1 en el Tabla 3 podría variar, de acuerdo con la posición inicial con la que se dibuja el caso 4×4. Sin embargo, hay que tener en cuenta que siempre es posible rotar o reflejar el polígono de 16 lados para ponerlo en la posición que utilizó D1 en la Figura 7.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

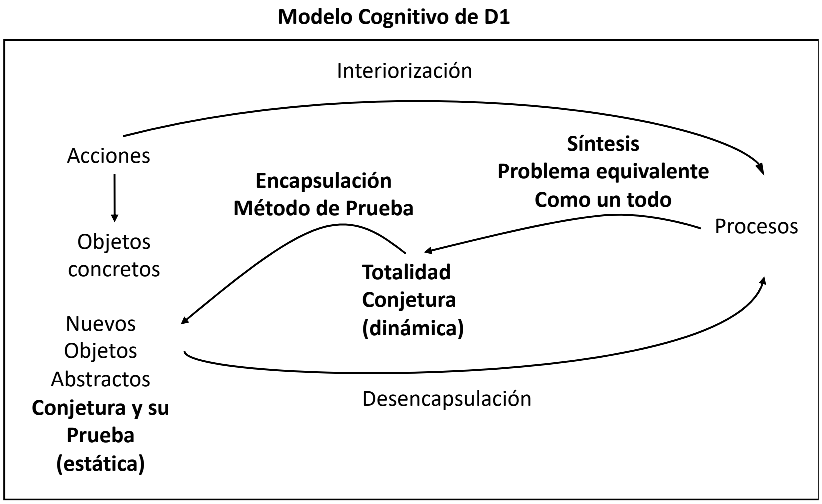
Hacer matemáticas entre muchas otras cosas, implica "descubrir y la conjetura es el principal camino para el descubrimiento" (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 60). Al respecto Cañadas et al. (2008), proponen una clasificación de las conjeturas y una forma de analizar el proceso de su elaboración. En respuesta a que no había una estructura sistemática para analizar problemas con sus potenciales conjeturas, ni tampoco un procedimiento para describir las conjeturas en términos de su progreso hacia la prueba. Sin embargo, dicha clasificación no considera las conjeturas que surgen a partir de un proceso recursivo. Con este estudio hemos aportado a llenar este vacío desde un marco teórico cognitivo que tiene como objetivo el análisis del proceso de construir conjeturas y su prueba en un contexto geométrico-figural, así como su relación con el diseño de un primer modelo.

Este estudio de una conjetura desde lo geométrico-figural es novedoso para el lector en dos sentidos: (1) se utilizan los constructos de la teoría APOE más allá de lo usual, incorporando para la interpretación de los datos la estructura mental Totalidad y el mecanismo mental síntesis, y (2) el tratamiento de una conjetura en lo geométrico-figural que marca una particularidad en su construcción mental a través de Acciones concretas para llegar a construir el Objeto abstracto conjetura y su prueba.

Sumado a lo anterior, la ruta cognitiva planteada como modelo de construcción a través de la Descomposición Genética fue validada por D1, proporcionando un camino de construcción de una conjetura como Totalidad que actuó de manera dinámica en el caso de D1, la cual fue encapsulada a través de una construcción recursiva con base en elementos geométrico-figurales en el Objeto abstracto y estático conjetura y su prueba, como se muestra en la Figura 12.

Figura 12.

Camino de construcción de la conjetura y su prueba que ha realizado D1



Fuente: Elaboración propia

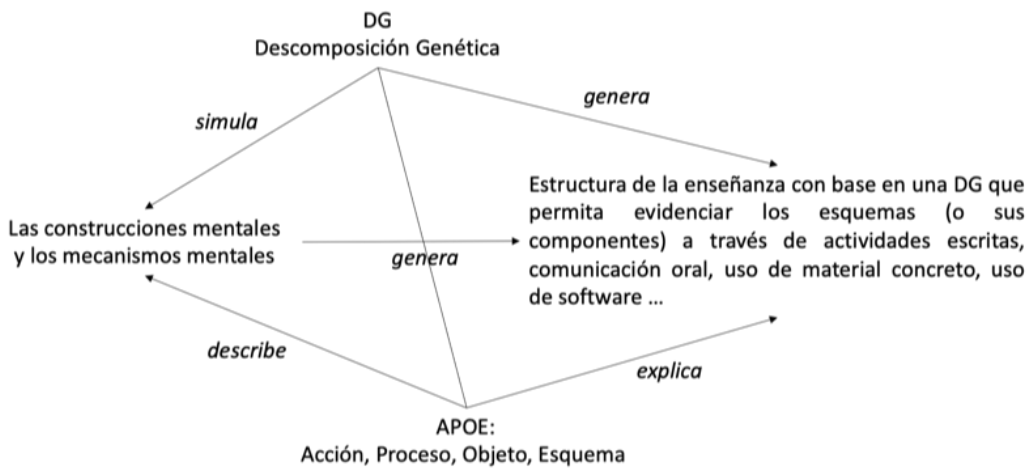
En relación al logro de los objetivos de investigación, podemos señalar, para cada uno de ellos, lo que sigue:

- En cuanto a diseñar un modelo hipotético de construcción de conjeturas, se puede señalar que D1 aportó a su cumplimiento dado que, a partir del problema geométrico-figural propuesto, él realizó construcciones que le permitieron mirar como un todo el caso $2n \times 2n$ con $n \in \mathbb{N}$, para luego plantear unos patrones y la validación de ellos a través de los brotes. Estos últimos sintetizan elementos geométricos que dan lugar a la conjetura como Totalidad.
- En referencia a validar o refinar la Descomposición Genética hipotética de la Figura 5, esta fue validada por D1, en lo que toca a la construcción de la conjetura y su prueba. Respecto a la estructura mental que resultó clave para validar la Descomposición Genética, se resalta la construcción mental Totalidad y el mecanismo síntesis que se propuso en ella.

Proyecciones de la investigación

Los resultados de esta investigación y la situación presentada, sientan la base para un modelo cognitivo para el aula desde la Teoría APOE (Figura 13), a través del diseño de actividades de aula que consideren los elementos que ponen de relieve las Descomposiciones Genéticas que son validadas en la investigación. En el contexto de la presente investigación, los resultados obtenidos en la Tabla 3 son un pilar fundamental para formular secuencias didácticas de aula con sustento en las estructuras y mecanismos mentales plasmados en la Descomposición Genética (Figura 5), en un contexto que trasciende lo algebraico.

Figura 13
APOE como un modelo cognitivo para diseñar actividades de aula



Fuente: Elaboración propia

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada parcialmente por ANID a través del Proyecto FONDECYT Nº 1180468, por el Plan de Implementación FID-UCN 2020 código PICEFID2020-7 y por FID-UCN 2021 código PICEDFID2021-1.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, T. (1999). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Reverté, S.A.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014).

APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Arnon, I., Nesher, P. y Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school? *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6,* 167-214. https://doi.org/10.1023/A:1017998922475

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Cañadas, M.C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 431-444.

Castro, E., Cañadas, M.C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática*, *54*, 55-67.

Córdova-Cornejo, V., Aravena-Díaz, M. y Parraguez-González, M. (2024). Construcción y mecanismos mentales para el aprendizaje de la función exponencial en contexto escolar. *Uniciencia*, *38*(1), 1-121. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.7

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática, 8*(3), 25-41.

Dubinsky, E., Arnon, I. y Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.999 and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, *13*(3), 232-258.

Girit Yildiz, D. y Durmaz, B. (2021). A Gifted High School Student's Generalization Strategies of Linear and Nonlinear Patterns via Gauss's Aproach. *Journal for the Education of the Gifted*, *44*(1), 56-80.

Gutiérrez, X. y Parraguez, M. (2021). Mecanismo mental de síntesis en el aprendizaje del triángulo de Sierpinski como totalidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(3), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2908

Izcara, P. (2014). *Manual de investigación cualitativa*. Fontamara.

Mariotti, M.A. y Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems. *ZDM Mathematics Education 51*, 759-777. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01059-3

Movshovitz-Hadar, N. (1993). Mathematical induction: A focus on the conceptual framework.

School Science and Mathematics, *93*, 408-417. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1993.tb12271.x

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nuñez-Gutiérrez, K. y Cabañas-Sánchez, G. (2020). Inductive reasoning in mathematics teachers when resolving generalization tasks. *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 790-802). CINVESTAV, AMIUTEM y PME-NA. https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020-121

Parraguez, M., Bonilla, D. y Randolph, V. (2021). Un modelo para la comprensión del sistema de los números racionales: Un estudio de casos en la formación de profesorado. En C. Guerrero-Ortiz, A. Morales-Soto y E. Ramos-Rodríguez (Eds.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática: Modelación Matemática* (pp. 313-348). Graó.

Piaget, J. (2000). *Biología y conocimiento* (13ra ed.) (Trad. F. González). Siglo XXI. (Obra original publicada en 1967).

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F.J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457-466). SEIEM.

Rivera, F.D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328.

Scheinerman, E. (2000). *Matemáticas discretas.* Thomson Learning.

Singh, S. (1998). *El enigma de Fermat* (Trad. D. Galadí y J. Gutiérrez). Planeta.

Sosa, L., Aparicio, E. y Cabañas-Sánchez, G. (2020). Fases del razonamiento inductivo que presentan profesores de matemáticas al resolver un problema de generalización. *PNA, 14*(2), 118-140.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ta ed.). Morata.

Weller, K., Arnon, I. y Dubinsky, E. (2011). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: Strength and stability of belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, *11*, 129-159. https://doi.org/10.1080/14926156.2011.570612

A COGNITIVE MODEL FOR THE CONSTRUCTION OF A CONJECTURE AND ITS PROOF IN A GEOMETRIC-FIGURAL CONTEXT

ABSTRACT

This chapter emphasizes the importance of activities that foment the construction of a conjecture in a geometric-figural context and its proof. To do this, based on the APOS theory, the construction of the abstract Object conjecture is interpreted, through Actions on concrete Objects. The methodology provided by this theory is considered, for which a genetic decomposition is designed that models the construction of the conjecture abstract Object and its proof through the Totality mental construction and the synthesis mechanism. To validate or refine this genetic decomposition, a geometric-figural activity was applied to a single-case. From the contrast of the genetic decomposition with the data obtained, the fundamental role of geometric-figural activities to achieve the construction of this conjecture was evidenced. As a result, the construction of the conjecture and its proof present in a cognitive model that validates the synthesis of geometric elements in an expression of the conjecture as Totality, which is encapsulated through a test method in the Abstract Object proven conjecture. These results constitute a contribution to the design of class activities since they favor the construction of an abstract Object from Actions on concrete Objects.

Keywords: Conjecture; Cognitive model; APOS.

UM MODELO COGNITIVO PARA A CONSTRUÇÃO DUMA CONJECTURA E SUA PROVA NUM CONTEXTO GEOMÉTRICO-FIGURAL

RESUMO

Este capítulo destaca a importância de atividades que promovam a construção de uma conjectura num contexto geométrico-figural e sua prova. Para isso, com base na teoria APOE, interpreta-se a construção do Objeto Abstrato conjectura, por meio de Ações sobre Objetos concretos. Considera-se a metodologia fornecida por esta teoria, para a qual desenha-se uma decomposição genética que modela a construção do Objeto abstrato conjectura e sua prova através da construção mental Totalidade e do mecanismo síntese. Para validar ou refinar essa decomposição genética, foi aplicada uma atividade geométrico-figural a um único caso. A partir do contraste da decomposição genética com os dados obtidos, evidenciou-se o papel fundamental das atividades geométrico-figurais para alcançar a construção dessa conjectura. Como resultado, a construção da conjectura e sua prova são apresentadas em um modelo cognitivo que valida a síntese de elementos geométricos numa expressão da conjectura como Totalidade, que é encapsulada através dum método de prova no Objeto Abstrato conjectura provada. Esses resultados constituem uma contribuição para o desenho de atividades de classe, pois favorecem a construção dum Objeto abstrato a partir de Ações sobre Objetos concretos.

Palavras-chave: Conjectura; Modelo cognitivo; APOE.

Marcela Parraguez-González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
marcela.parraguez@pucv.cl
https://orcid.org/0000-0002-6164-3056
Doctora en Matemática Educativa, profesora titular e investigadora en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), Chile. Sus publicaciones y proyectos de investigación se inscriben en la línea de Pensamiento Matemático Avanzado, Formación de Profesores y Resolución de Problemas. A la fecha ha graduados más de una treintena de Magíster en Didáctica de la Matemática y cinco Doctores en Didáctica de la Matemática. Ocupó un cargo directivo en la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM), fue Directora del Postgrado en Didáctica de la Matemática de la PUCV y Directora del Instituto de Matemáticas de la PUCV. Actualmente, es integrante del Consejo Directivo del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME).

Isabel García-Martínez
Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile
igarcia@ucn.cl
https://orcid.org/0000-0001-6683-7776
Doctora en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), docente e investigadora en Didáctica de la Matemática de la Universidad Católica del Norte (UCN), Chile. Sus publicaciones y proyectos de investigación se inscriben en la línea de Pensamiento Matemático Avanzado, Formación de Profesores y Resolución de Problemas. Actualmente, es integrante del Comité Editorial de la revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), miembro asociado del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), miembro de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM), y miembro del comité científico de congresos nacionales (JNEM) e internacionales (RELME).

Irma Pinto-Rojas
Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.
ipinto@ucn.cl
https://orcid.org/0000-0002-3121-8921
Doctora en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), docente e investigadora en Didáctica de la Matemática de la Universidad Católica del Norte (UCN), Chile. Sus publicaciones y proyectos de investigación se inscriben en la línea de Pensamiento Matemático Avanzado, Formación de Profesores y Resolución de Problemas. Ocupó un cargo directivo en la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM). Actualmente, es miembro asociado del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), es miembro del comité científico de congresos nacionales (JNEM) e internacionales (RELME), y forma parte del equipo investigador de la Red Iberoamericana sobre Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas (Red Iberoamericana MTSK).

Capítulo 5

USOS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA INGENIERÍA. MARCO DE REFERENCIA ALTERNATIVO PARA EL DOCENTE[7]

Falconery Giacoleti-Castillo

Francisco Cordero

Eleany Barrios-Borges

Sindi Marcía-Rodríguez

RESUMEN

En la educación superior reconocemos que para el profesorado de matemáticas no existen marcos de referencia que le permitan impartir los cursos de matemática con una visión del uso real de las matemáticas en las disciplinas. Para atender esta problemática, en esta investigación se conforma un marco de referencia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con sustento en la Teoría Socioepistemológica y aspectos metodológicos etnográficos, a partir de una categoría de modelación revelada al analizar los usos y significados del conocimiento matemático de la ingeniería electrónica en la construcción de un sistema de control. En particular, la transformada de Laplace ofrece la temporalización de la reproducción continua de un comportamiento discontinuo, esto se contrasta con la enseñanza habitual de las ecuaciones diferenciales y su presentación en los libros de textos. Se concluye que conformar una epistemología de usos del conocimiento matemático propio de las profesiones debe ser la base para diseñar situaciones escolares y brindar un entorno de usos y significados de la matemática para ser enseñada y aprendida, esto trastoca y transforma el *statu quo* de la matemática escolar para crear la relación recíproca con el cotidiano de las realidades.

Palabras clave: Significado; Resignificación; Reproducción de comportamientos; Ecuaciones diferenciales; Transformada de Laplace.

[7] **Como citar:** Giacoleti-Castillo, F., Cordero, F., Barrios-Borges, E. y Marcía-Rodríguez, S. (2024). Usos de la modelación matemática de la ingeniería. Marco de referencia alternativo para el docente. En M.D. Aravena-Díaz y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades* (pp. 103-130). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

INTRODUCCIÓN

Cuando se trata de la docencia de la matemática nos parece importante especificar a las o los docentes de qué nivel educativo se hace alusión, dado que, por lo general, si se trata de primaria habrá recibido preparación para ejercer en dicho nivel, al igual que en educación media y media superior, dependiendo del país donde se encuentren. Pero ¿qué pasa con el profesorado de educación superior? ¿quién es? ¿qué preparación recibe?

El profesorado de matemáticas para la educación superior es, en casi todos los casos, formado en una disciplina totalmente ajena a la docencia de la matemática, ya sean las matemáticas u otra la profesión, en su carrera recibe ínfima o ninguna preparación para ser docente (Kane, et al., 2002; Nardi, Jaworski, y Hegedus, 2005) y cómo enseñar matemáticas o qué matemáticas enseñar.

Las matemáticas impartidas en la educación superior son motivo de altas tasas de fracaso y abandono de los estudiantes, generalmente están conformadas por un cúmulo de matemáticas ajenas de significados propios de los usos de la disciplina para la que se están formando. Esta afirmación se hace palpable al observar las clases de matemática para ingenieros en las universidades donde concurren en un mismo espacio áulico estudiantes de diferentes ingenierías y reciben los mismos contenidos matemáticos (Cordero y Solís, 2022).

Entonces, ¿cuál debe ser el conocimiento del profesorado de matemáticas en la educación superior para que logre su enseñanza eficaz? Nuestra hipótesis de partida es que debemos brindarle un marco de referencia donde se exprese una matemática funcional8 proveniente de los usos y significados del conocimiento matemático en los cursos no matemáticos y en la práctica de la ingeniería específica en la que se está formando.

En el presente reporte se utiliza la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013). El resultado consiste en mostrar los usos y significados asociados a la transformada de Laplace que emergen en una situación de construcción de un sistema de control en una comunidad de estudiantes de la ingeniería electrónica. Luego, esta epistemología de usos del conocimiento matemático se contrasta con la presentación habitual de la transformada de Laplace en la matemática escolar.

[8] La *funcionalidad*, en términos sencillos, significa un conocimiento útil de las personas en situaciones de su vida cotidiana y profesional (Arendt, 2005). En nuestro entendimiento, la funcionalidad es el resultado de la transversalidad del uso del conocimiento matemático de la gente en diferentes situaciones de la realidad donde se resignifica.

La conformación de la epistemología de usos del conocimiento matemático, es decir, de *la categoría de modelación* se realizó a través del modelo de comunidad de conocimiento matemático (Cordero, Mendoza-Higuera et al., 2022). Esto es analizado a partir de una inmersión en la comunidad, retomando aspectos metódicos de la etnografía (Guber, 2011). Se identifican las situaciones rutinarias donde usan el conocimiento matemático y las problematizaciones de su saber matemático.

Para dar cuenta de un marco de referencia de usos y significados de este conocimiento matemático, se estableció la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuáles son los factores funcionales de la Transformada de Laplace que relacionan los comportamientos continuos y comportamientos discontinuos, en una situación específica de diseño de un sistema de control, en estudiantes de ingeniería electrónica?*

LA MATEMÁTICA, LA INGENIERÍA Y LA DOCENCIA. LA PROBLEMÁTICA

Una problemática educativa con respecto a la ciencia, en particular a la matemática, es que estos saberes por la condición de su desarrollo disciplinar se alejan de la vida del ciudadano. Más específicamente de la condición de la gente quien vive a través de mantener y transformar rutinas que expresan su vida mundana, y de esta manera van construyendo el mundo que les rodea (Cordero y Solís, 2022). Una forma de tratar este distanciamiento es a través de construir un marco de referencia para valorizar, en la educación, la justificación funcional del conocimiento matemático que demandan otros dominios de conocimiento, por ejemplo, los disciplinares y la vida (Cordero, Carranza et al., 2022). Su construcción es condición *sine qua non* para poder crear la relación recíproca entre la matemática de la escuela y el cotidiano de las realidades del que aprende, en nuestro caso, los y las estudiantes de ingeniería (Mendoza-Higuera et al., 2018).

No es suficiente cuestionar ¿qué es el conocimiento matemático? sino también importa preguntar ¿qué matemática? La naturaleza de la formulación obliga estudiar *los usos y significados de la matemática*, la cual provee de la pluralidad epistemológica[9] y de la transversalidad de los usos del conocimiento matemático en diferentes escenarios (Cordero, 2016; Rosa et al., 2022). Estos dos aspectos definen una categoría de conocimiento matemático que formula una epistemología de usos. Por tanto, confrontan los tratamientos escolares habituales que no

[9] La pluralidad epistemológica significa que asumimos que hay otra epistemología de la matemática, en oposición a la epistemología universal de la matemática (Cordero, 2016).

favorecen la funcionalidad del conocimiento matemático, para abrir *otro tratamiento alternativo donde favorece el aprendizaje de los usos y significados de la matemática* (Cordero, Rosa et al., 2022).

La categoría de conocimiento matemático es algo más robusto que una matematización de la realidad o una aplicación matemática a una situación real, es una acción plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión, la cual está compuesta de significaciones o resignificaciones con sus respectivos procedimientos, con base en un instrumento. Esta categoría de conocimiento matemático lleva a cabo múltiples realizaciones y hace ajustes en su estructura para producir un patrón deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación (Cordero, 2023). La categoría es conocimiento matemático expresado en un proceso que se resignifica y que valora los usos en el entorno del objeto que le dan sentido y significado (Cordero, Carranza et al., 2022).

Para lograr la relación o sistemas de relaciones recíprocas entre la matemática y el cotidiano de las realidades del que aprende, en este caso el estudiante de ingeniería, se requiere necesariamente trabajar intensamente en una socialización contemporánea del conocimiento: donde se generen entornos de diálogos recíprocos entre el conocimiento de la ciencia (en este caso de la ingeniería), el conocimiento escolar (los cursos de matemáticas para la ingeniería) y la realidad del que aprende (estudiante de ingeniería) (Pérez-Oxté y Cordero, 2022).

La docencia de la matemática de las universidades

El estudio de las prácticas de enseñanza de las matemáticas a nivel universitario (Nardi y Rasmussen, 2020), como otras líneas de investigación en la Matemática Educativa, es un campo que estuvo dominado en gran medida en sus inicios por los estudios sobre el pensamiento y el aprendizaje de los alumnos en matemáticas (por ejemplo, Tall, 1991), luego se ha sumado gradualmente al docente y la institución (Artigue, 2016).

Cada vez existen más investigaciones que reconocen las insuficiencias de la enseñanza tradicional de la matemática y proponen innovaciones. “Las prácticas reales en las que se involucran los profesores universitarios de matemáticas para iniciar, promover y sostener la indagación es un área de investigación activa y emergente” (Nardi y Rasmussen, 2020, p. 842). Por ejemplo, el proyecto ESUM (Estudiantes de Ingeniería que Comprenden las Matemáticas) en el Reino Unido trabaja con estudiantes de primer año de ingeniería a través de una intervención cuádruple: uso de preguntas basadas en la indagación, resolución de problemas en grupos pequeños, un entorno de aprendizaje basado en computadora, y un proyecto de grupo evaluado (Jaworski et al., 2012). Otras investigaciones (por ejemplo, Artigue y Blomhøj, 2013; Rasmussen y Kwon, 2007) también están basadas en la teoría de la indagación, la cual se conceptualiza en términos tanto de lo que hacen los estudiantes como de lo que hace el profesor, si bien propicia discusiones matemáticas entre pares, este método a veces favorece que los estudiantes se dediquen a hacer matemáticas de maneras que reflejan la práctica auténtica de los matemáticos, sin estarse formando propiamente para ser matemáticos.

Biza et al. (2017), en su revisión de literatura sobre la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel terciario, informan sobre el crecimiento e interés continuos en investigación empírica sobre las prácticas reales de enseñanza en la universidad. Ellos realizan una exploración centrándose en los temas de las prácticas de enseñanza de las matemáticas; la influencia de las perspectivas de los profesores, los antecedentes y las prácticas de investigación en la enseñanza de las matemáticas; los recursos y la preparación para la enseñanza y el desarrollo profesional de los profesores; y los enfoques alternativos de la enseñanza. A partir de las investigaciones que ellos revisan podemos ver que por lo general se abordan desde lo pedagógico, es decir, preparar al docente para impartir "mejores clases" y que los estudiantes tengan una participación activa para que se sientan más motivados, pero el conocimiento matemático enseñado no es cuestionado.

Harris et al. (2015) investigaron la influencia de las experiencias matemáticas de los estudiantes en su disposición hacia los cursos de ingeniería y las matemáticas e identificaron que los estudiantes necesitan tener una visión del uso real de las matemáticas en su disciplina. Una pregunta usual de los estudiantes en clases de matemáticas es: ¿y esto para que me va a servir?, y en particular en la ingeniería ¿y esto cómo contribuye a mi profesión? aludiendo a esas matemáticas que suelen recibir sin expresiones de su funcionalidad. Coincidimos con Winslow y Rasmussen (2020) cuando afirman que se necesita más investigaciones sobre la interacción de los cursos y los componentes matemáticos en los cursos no matemáticos, que aparecen para satisfacer diversas formas de necesidades de modelización, computación y representación en la ingeniería.

"Sólo hay unos pocos estudios que investigan el significado específico de los conceptos matemáticos en las aplicaciones" (Biza et al., 2017, p. 8). A partir de la tradición de la investigación en otros niveles, se ha tratado de describir estas aplicaciones a los problemas del mundo real mediante los ciclos de modelización, empero esta visión es muy idealizada, artificial y simplificada. Además, cuando hablamos del conocimiento matemático puesto en uso en otras disciplinas, no tiene lugar hablar de la matemática y la realidad, sino que están intrínsecos.

Por su parte, Cordero, Carranza et al. (2022) a partir de la interdisciplinariedad en la modelación exponen un ejemplo de proyecto a partir de calcular, construir e instalar molinos Savonius; los autores comentan que, los saberes puestos en juegos son de utilidad para el futuro y el presente, además, propician que se comprenda el mundo y se intervenga en él, todo esto a la vez que sus conocimientos se ponen al servicio de la comunidad.

La matemática y la realidad

Un aspecto central de la formulación de la *categoría* es entender como realidad a la puesta en uso del conocimiento entre la escuela, el trabajo y la ciudad. Esta acepción de realidad, en el análisis de los datos de nuestras investigaciones, ha llevado a generar constructos que valoran los usos y significados del conocimiento matemático (Cordero, 2023).

Cordero (2016) llama la atención sobre los intereses del quehacer de la modelación, en los cuales intervienen grandes vertientes: representar la realidad y aplicar una estructura de conocimiento a una situación real, con modelos empíricos o analíticos según los intereses disciplinares (Bissell y Dillon, 2012). Estas vertientes tienen sus dimensiones; por una parte, en el campo de la matemática suele definirse a la modelación como una teoría que estudia las características cualitativas de las estructuras matemáticas: se exige de un objeto predeterminado (una realidad) ya sea para ser reproducido o para ser distinguido de otros objetos, lo que amerita el carácter de cualitativo (Cordero, 2011). Y, por otra parte, las investigaciones en el campo de la matemática educativa en esa temática analizan la estructura de tales representaciones e identifican sus registros semánticos para establecer relaciones con los procesos cognitivos de los individuos (Blum, 2002; Borromeo-Ferri, 2006). Ambas vertientes presumen estar ligadas con la "realidad". Sin embargo, conviene cuestionar el término realidad para transformar su *statu quo* en la educación de la matemática. Cordero (2016) considera que eso llamado "realidad" tiene diferentes acepciones y que la discusión se puede ampliar a las diversas corrientes filosóficas (Pollak, 1979; Alsina, 2007; Bachelard, 1938). Sin embargo, para los fines del cuestionamiento, conviene encaminarlo a aspectos empíricos y tener presente los principios fundamentales de la razón crítica de Kant (1788/1998). En ese sentido sobresalen aspectos tales como la realidad subjetiva y otros ligados a las sensaciones de los humanos, los cuales favorecen el sentido funcional del conocimiento donde sus usos y resignificaciones suceden en el quehacer disciplinar y en la vida (Cordero, Rosa et al., 2022).

Una realidad en la modelación puede ser el comportamiento de una partícula en un campo electromagnético, el modelo que se genere al respecto responde a los intereses disciplinares de la ciencia, como lo es alguna ingeniería. Pero una realidad en el aula de matemáticas, como lo menciona Cordero (2016), no es clara ni trivial: llevar la matemática a la realidad del estudiante y crear ambientes de la matemática de todos los días son consignas que no se han podido llevar a cabo satisfactoriamente. La matemática escolar, en su tradición, no ha sido orientada para tal fin. Tal vez ello se deba a los contenidos matemáticos considerados en el currículum. Por ejemplo, habitualmente en la educación universitaria, se ofrecen cursos de servicio de matemáticas a estudiantes de otras disciplinas, como la ingeniería. Winslow y Rasmussen (2020) reportan que no hay estudios que den cuenta de cómo estos cursos ayudan al estudiante a entender mejor sus cursos no matemáticos en su programa de formación. González-Martín et al. (2021) reportan que hay escenarios en donde los ingenieros resuelven problemas de la ingeniería usando una matemática que no está en los cursos de matemáticas que tradicionalmente se les ofrece en el pregrado.

El docente de matemáticas en las facultades de ingeniería no tiene un referente para transformar el *statu quo* de la matemática curricular. Esto quiere decir que se vale de una lista explícita con una secuencia temporizada de conceptos matemáticos para cubrir el programa del semestre o del año escolar y no dispone de un marco de referencia para resignificar la matemática para el aprendizaje de la vida disciplinar de la ingeniería (Cordero, Mendoza-Higuera et al., 2022). Para construir ese marco de referencia, la realidad deberá ser interpretada en aquello que es habitual de los escenarios donde se expresan los usos rutinarios; es decir, los cotidianos del especialista disciplinario, del trabajador y de la gente.

La Transformada de Laplace en los cursos ecuaciones diferenciales para la ingeniería

Una de las temáticas que aparece en los cursos de matemáticas para ingenierías es la Transformada de Laplace, la cual se introduce mediante la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Esta transformada es presentada como una herramienta cuyas propiedades formales son ventajosas para resolver ecuaciones diferenciales lineales, pero en ningún momento es construida o motivada por algún medio físico o geométrico o a partir de un conocimiento previo (Cordero y Miranda, 2002), y en la mayoría de los libros de texto se presenta su definición casi sin preámbulo (Aguilar-Sánchez, 2002). Esto se puede constatar en algunos libros de texto utilizados en cursos de ingeniería tales como el de Diprima y Boyce (2000); Edwards y Penney (1986); Spiegel (1983); y Zill y Cullen (2006).

Además, en los cursos de matemáticas para ingeniería la enseñanza de la Transformada de Laplace está limitada a la manipulación de su expresión integral, calculando la transformada de funciones, probando sus propiedades, para después establecer un algoritmo que permite obtener la solución de algunos tipos de ecuaciones diferenciales —comúnmente, ecuaciones diferenciales lineales—. Este procedimiento se resume en la siguiente figura:

Figura 1.
Procedimiento de aplicación de la transformada de Laplace para resolver una ecuación diferencial con valor inicial

Fuente: Zill y Cullen (2006, p. 203)

Este tratamiento centrado en lo algorítmico no propicia el desarrollo de argumentos funcionales referentes a los comportamientos presentes en las ecuaciones diferenciales. En este sentido, la Transformada de Laplace en los cursos de matemáticas de ingeniería está carente de un marco de referencia de usos y significados en las situaciones del cotidiano de la ingeniería, ni son considerados los significados de origen que permitieron su construcción (Giacoleti-Castillo y Cordero, 2020).

MATERIALES Y MÉTODOS

La categoría de Modelación

La *categoría de modelación* es la síntesis de tres experiencias: la funcionalidad del conocimiento matemático, la modelación matemática y la formación inicial del docente de matemáticas (Cordero, Mendoza-Higuera et al., 2022). Tiene relación con la modelación matemática, pero no es propiamente la modelación matemática según definiciones comunes de ésta. Creemos que una forma conveniente de encarar el enigma de nuestra categoría es llevarla a la noción de variedad[10], la cual consiste en crear una diferencia sin perder la unidad. Esto quiere decir que la modelación matemática tiene una "unidad" que la define o la distingue como tal.

Prevalece un principio P tanto en las aproximaciones a la ciencia como en las aproximaciones a la educación, el cual consiste en que la modelación matemática tiene que ver con un ciclo que conecta el mundo real y la matemática. El modelo de Blum (2011) es un ejemplo de ese principio: define el ciclo con una secuencia, la cual, en términos generales, comienza con una situación real, mediante procesos de matematización se obtiene un modelo matemático y finalmente se interpreta y valida en la situación real. El ciclo, con su secuencia de fases, es consecuente con el principio P: conecta la realidad del mundo con la matemática. Y ese ciclo es llevado a diferentes niveles educativos para mejorar los aprendizajes de la matemática. Además, en el planteamiento educativo habitual se vigilan o estudian los procesos entre las fases del ciclo *preexistente* para las experiencias del docente y del estudiante (Borromeo, 2018).

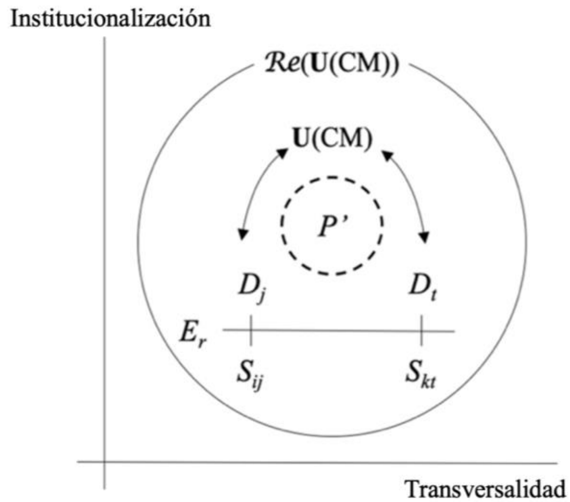
En cambio, la variedad de la *categoría de modelación z(Mod)* (ver Figura 2) se basa en un principio P', que es *la funcionalidad de la relación recíproca y horizontal entre la matemática y la realidad*. En este principio P' la matemática no preexiste a la realidad, ni viceversa. Este principio deja de concebir a la realidad como un mundo alejado de las matemáticas, dado que la construcción del conocimiento matemático (sus usos y significados) se lleva a cabo en diversas situaciones de la realidad. Este principio P' es el que genera la *categoría de modelación*, que pone en juego diferentes epistemologías E_r de usos del conocimiento matemático, U(CM). Estas epistemologías de usos emergen en diversas situaciones S_{ij} y dominios D_j de conocimiento, donde los usos se resignifican. De esta manera la *categoría de modelación* es la resignificación de usos del conocimiento matemático, *Re*(U(CM)), cuando sucede la transversalidad de saberes entre situaciones o dominios. Además, la institucionalización es el referente de la continuidad del conocimiento con su tradición, cultura e historia, en el seno de la comunidad donde se construye

[10] Esta noción de variedad es en el mismo sentido de Brousseau, cuando presenta su Teoría de Situaciones Didácticas y la define como una *variedad didáctica* para distinguirla de la Didáctica clásica existente en el medio disciplinar de la época (Brousseau, 1997).

el conocimiento matemático (Cordero et al., 2022).

Figura 2

Marco del saber matemático de la z(Mod)

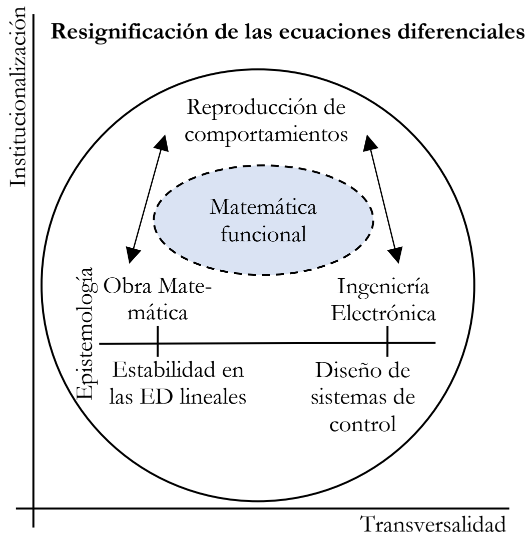


Fuente: Cordero, Mendoza-Higuera et al. (2022) y Barrios Borges y Cordero (en prensa)

Un ejemplo de la *categoría de modelación* en situaciones específicas donde se pone en uso el conocimiento matemático es la *Reproducción de Comportamientos*. Se ha revelado la emergencia de esta categoría en diferentes comunidades, como ingenieros, que hacen uso del conocimiento matemático (ver Mendoza-Higuera et al., 2018; Mendoza-Higuera et al., 2022). Se ha encontrado que, en situaciones reales de la ingeniería, una ecuación diferencial $ay' + y = f(t)$ no está centrada en los procedimientos algorítmicos para encontrarle la solución, sino en los *comportamientos tendenciales* que la ecuación describe; donde la solución y tiende al comportamiento de $f(t)$ cuando $t \to \infty$. En este sentido, la ecuación diferencial se resignifica como una *instrucción que organiza comportamientos*. En estas situaciones aparecen significaciones como patrones de comportamientos gráficos y analíticos, que conllevan procedimientos de variación de parámetros; de tal manera que los argumentos que emergen aluden a la búsqueda de tendencias al *reproducir comportamientos deseados.* Esta categoría se resignifica al transitar entre diversas situaciones y dominios: por ejemplo, en los dominios de la obra matemática y la ingeniería electrónica; en las situaciones de estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales, y de diseño de sistemas de control (Ver Figura 3).

Figura 3

Marco del saber matemático de la reproducción de comportamientos



Fuente: Basada en Giacoleti-Castillo (2020)

Unidad de análisis: la comunidad de conocimiento matemático

La investigación cualitativa, como la que reportamos, no se trata de un estudio de cualidades separadas sino de un "estudio de un todo integrado que forma o constituye una *unidad de análisis* y que hace que *algo sea lo que es*: una persona, una entidad étnica, social, empresarial, un producto determinado, etcétera" (Martínez, 2007, p. 8). En nuestra investigación, la unidad de análisis la constituye una *comunidad de conocimiento matemático de ingenieros electrónicos en formación*. Los tres elementos que constituyen el modelo de comunidad de conocimiento matemático (Cordero, 2023) son:

- *Reciprocidad*: se refiere a la argumentación-situacional, en donde el conocimiento de la comunidad se genera por la existencia de un compromiso mutuo.
- *Localidad:* el conocimiento local se da cuando existe en la comunidad una coincidencia de ideas, una jerga disciplinar, intereses y saberes.
- *Intimidad*: se manifiesta en la categoría de conocimiento matemático que emerge en la comunidad, la cual es un conocimiento propio y privado de esta.

Los miembros de la comunidad de este estudio fueron cuatro estudiantes que cursaban la asignatura denominada *Control Avanzado*, que se ubica en el último semestre de la carrera de

Ingeniería Electrónica del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, de Chiapas, México. Como tarea final del curso, el profesor les solicitó que desarrollasen un proyecto relacionado con sistemas de control. Los estudiantes decidieron diseñar y realizar el prototipo de un sistema para el control de temperatura del agua para el cultivo de algas (Castro et al., 2019). En la sección de resultados y discusión se explica con mayor detalle este sistema.

Aspectos etnográficos

En el enfoque etnográfico, los fenómenos de las comunidades que se estudian son concebidos como sociales y culturales (Guber, 2011). En este sentido, nuestro estudio tiene un enfoque etnográfico y usó técnicas, como son: observación participante, entrevistas no dirigidas y la inmersión. Se considera a la inmersión como la que posibilita al investigador adentrarse adecuadamente en la comunidad para conocer sus intereses y problemáticas.

Los instrumentos para el registro de los datos, tanto de la observación participante como de las entrevistas, fueron: fichas de observación, cuaderno de apuntes, grabaciones (audio, videos y fotografías) y apuntes en papel y pizarra (explicaciones escritas de la comunidad y del profesor de ingeniería). También se consideraron otras fuentes que contribuyeron a enriquecer el análisis de los datos obtenidos a partir de la inmersión en la comunidad, como son: literatura especializada de Teoría de Control (Hernández, 2010; Kuo, 1996; Ogata, 2010), informe escrito del proyecto de diseño de sistema de control que elaboró la comunidad de estudiantes (Castro et al., 2019).

Elementos del análisis de datos

Luego de la obtención y registro de los datos, se analizaron utilizando técnicas diversas: revisión documental y análisis descriptivo-interpretativo (Toro y Parra, 2010).

Los usos del conocimiento matemático que emergieron en la situación específica del sistema de control se analizaron considerando dos elementos que caracterizan al uso: su funcionamiento y su forma (Cordero y Flores, 2007).

- *Funcionamiento del uso*: lo constituyeron las tareas o ejecuciones que la comunidad desarrolla con el propósito de diseñar el sistema de control.
- *Forma del uso:* son las clases de tareas/ejecuciones, las cuales fueron interpretadas como las maneras en que se llevan a cabo dichas tareas en la situación de diseño del sistema.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se muestra un ejemplo de la categoría de modelación, que consiste en la emergencia de la *categoría reproducción de comportamientos*. Para ello, se describe una situación de diseño de sistemas de control que desarrolla una comunidad de ingenieros electrónicos en formación, en donde la transformada de Laplace se resignifica como una instrucción que organiza un comportamiento continuo.

Inmersión en la comunidad de ingenieros electrónicos en formación

La inmersión que se llevó a cabo en la comunidad permitió revelar los usos de la transformada de Laplace, tomando como base epistemológica a la categoría reproducción de comportamientos. La situación específica estudiada se refiere al diseño del sistema de control, que es una de las actividades centrales en las ingenierías, particularmente en ingeniería electrónica. El propósito de un sistema de control consiste en que el equipo o proceso que se está controlando tenga las características deseadas en los momentos que se determina (Hernández, 2010; Ogata, 2010). Es decir, dado que se tienen ciertos comportamientos deseados, se diseña el sistema para controlar la reproducción de esos comportamientos.

El sistema de control diseñado por la comunidad consiste en controlar el comportamiento de la temperatura del agua en el rango deseado, para el cultivo de algas comestibles (Espirulina). La temperatura óptima para el crecimiento de las algas es de 31 °C a 39 °C. Pero la temperatura del agua se perturba frecuentemente por la temperatura del ambiente, entre otros factores. Para evitar este problema, la comunidad diseña un sistema que controle el comportamiento de la temperatura del agua en un rango deseado de 33 °C a 37 °C[11] (Ver Figura 4).

El funcionamiento del sistema de control consiste en que un sensor toma la temperatura del agua. El software Arduino adquiere los datos de temperatura que le proporciona el sensor. Si la temperatura del agua está fuera del rango deseado, entonces el sistema genera una *señal de error* y activa un procedimiento de realimentación: se ejecuta una *acción de control* para corregir el error, que consiste en activar las bombas para la recirculación de agua de otro recipiente hacia el recipiente que contiene las algas, con el fin de regresar la temperatura del agua al rango deseado

[11] Nótese que al establecer el rango deseado (33–37 °C), se ha dejado un rango de tolerancia de 2 °C en cada extremo, respecto a la temperatura óptima para el crecimiento de las algas (31–39 °C).

en el menor tiempo posible (Castro et al., 2019), luego la recirculación se detiene.

Figura 4.
Equipo físico del sistema de control

Fuente: Giacoleti-Castillo (2020, p. 85)

En el comportamiento de la temperatura del agua que se controla, la comunidad identifica los siguientes componentes del sistema de control: rango de temperatura deseado (*señal de entrada* $R(s)$), temperatura obtenida en el recipiente (*señal de salida* $C(s)$), y la realimentación del sistema en la recirculación del agua (*función de transferencia* $G(s)$). Al respecto, la Teoría de Control (Hernández, 2010; Kuo, 1996; Ogata, 2010) presenta a la transformada de Laplace como fundamental en los componentes de un sistema de control, ya que dichas señales están dadas con esta transformada; y la función de transferencia del sistema se define mediante $\mathrm{G}(s) = \frac{\mathrm{C}(s)}{\mathrm{R}(s)}$ que relaciona la Transformada de Laplace de la señal de salida con la transformada de Laplace de la señal de entrada. La función de transferencia $\mathrm{G}(s)$ es el elemento central del sistema de control en donde los miembros de la comunidad llevan a cabo los procedimientos de realimentación necesarios para obtener el comportamiento deseado del sistema. Es decir, el uso de la transformada de Laplace ocurre cuando llevan a cabo las modificaciones, ejecuciones o procedimientos de control (realimentación mediante la recirculación del agua), para que la temperatura del agua se devuelva al rango deseado.

Una de las características en la *Teoría de Control* es que en las señales y acciones que se ejecutan en un sistema, ocurren comportamientos que son modelados típicamente por funciones que están definidas de manera discontinua (por ejemplo, la función escalón unitario); sin embargo, la reproducción de los comportamientos en la salida del sistema es continua. En el caso de esta comunidad, aunque no definen o determinan funciones, sí expresan comportamientos con gráficas discontinuas, pero la reproducción de ese comportamiento la expresan de manera continua.

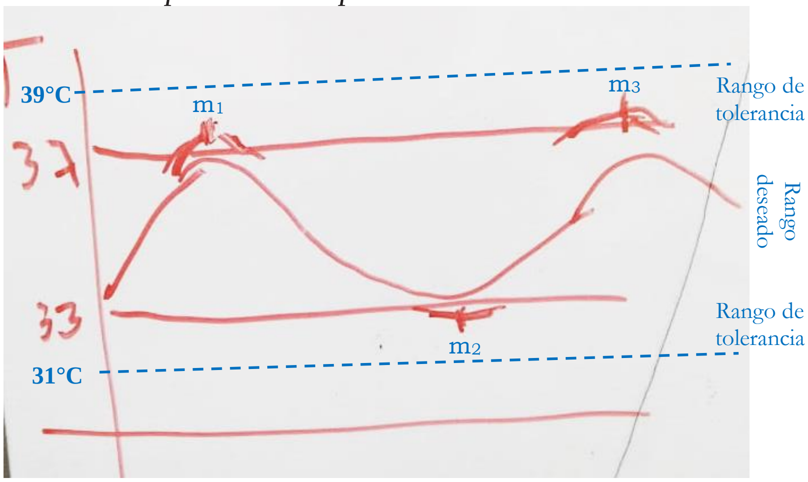
La reproducción continua a partir de comportamientos discontinuos

El comportamiento de la gráfica de la señal de salida describe una *tendencia* en el rango 33–37 °C (ver Figura 5), el deseado para el crecimiento de las algas; y esta tendencia se reproduce a través del *tiempo*. Es decir, se *reproduce un comportamiento* en *todo tiempo* y este comportamiento es con *tendencia en un rango*. Para que la temperatura del agua esté en el rango deseado en todo tiempo, se reproduce ese comportamiento deseado al *temporalizar*, el cual es interpretado como un comportamiento continuo. El rol del tiempo como temporalización se da cuando la comunidad programa con antelación la acción de control para que se ejecuten en momentos futuros (m_1, m_2, m_3…) donde ocurrirán *errores de control* (temperatura fuera del rango deseado). La acción de control que se ejecuta en esos momentos es la recirculación del agua mediante el bombeo, con el propósito que la temperatura del agua vuelva al rango deseado en el menor tiempo posible, y así evitar que cruce el rango de tolerancia.

En la Figura 5 se presenta el esbozo de un estudiante donde se observa que para explicar el comportamiento de la temperatura en los momentos m_1, m_2, m_3, se hacen trazos que están expresados de manera discontinua. Esto se debe a que las acciones de control se ejecutan solo cuando el sistema detecta que la temperatura del agua se ha salido del rango deseado; no ocurren siempre, sino solo en los momentos (m_1, m_2, m_3) cuando se requiere devolver la temperatura a dicho rango. De esta manera, los comportamientos de la temperatura en estos momentos se expresan con gráficas a trozos, es decir *comportamientos discontinuos.* No obstante, la reproducción de estos comportamientos se interpreta de manera continua; esto porque el comportamiento de la temperatura del agua se está controlando siempre, tanto en los momentos m_1, m_2, m_3, como también en todo momento.

Es preciso resaltar que en estos momentos *el comportamiento continuo tiende a los comportamientos discontinuos*. Es decir, el comportamiento de la señal de salida —que se expresa de manera continua— es una reproducción que deviene de los comportamientos discontinuos. Esto se debe a que, en los momentos donde el sistema *marca señal de error,* la temperatura del agua que se reproduce posee un comportamiento dentro del rango de tolerancia, antes de regresar al rango deseado. Es así como este comportamiento reproducido en la salida tiende a los comportamientos discontinuos de los momentos m_1, m_2, y m_3.

Figura 5.
Comportamiento continuo a partir de comportamientos discontinuos.



Fuente: Giacoleti-Castillo (2020, p. 94)

Usos de la transformada de Laplace en la situación específica de diseño del sistema de control

Los usos de la Transformada de Laplace que se presentan en la tabla 1 están en consonancia con la reproducción continua de comportamientos discontinuos y, por ende, con los dos factores funcionales que la resignifican: la *temporalización* y la *tendencia en un rango*. Estos usos se presentan a continuación:

Tabla 1
Primer uso de la Transformada de Laplace

Determinar un comportamiento al temporalizar	
Funcionamiento del uso	*Forma del uso*
Detectar el comportamiento de la temperatura reproducida a través del tiempo	Identificación de la temperatura del agua en el recipiente, y comparación con la temperatura deseada

Fuente: Giacoleti-Castillo (2020, p. 99)

La temperatura del agua del recipiente se compara con el rango de temperatura deseada para la cosecha de las algas. El propósito de comparar las temperaturas es que la *señal de salida* (temperatura obtenida) se comporte, en el *tiempo*, como la *señal de entrada* (temperatura deseada); es decir, reproducir la temperatura deseada para la óptima cosecha de las algas.

> *Es un control retroalimentado; <u>siempre está comparando</u>. Una <u>comparación de lo que se quiere contra lo que se tiene en la señal de salida</u>, determinar si hay un error; en función de esa determinación de si existe un error, tomar una acción.* (Transcripción de entrevista a la comunidad, 2019)

Tabla 2.
Segundo uso de la Transformada de Laplace

Organizar un comportamiento con tendencia en un rango	
Funcionamiento del uso	*Forma del uso*
Mantener el comportamiento de la temperatura con tendencia en un rango en todo tiempo	Modificar la temperatura del agua en el recipiente, mediante la recirculación

Fuente: Giacoleti-Castillo (2020, p. 100)

La temperatura del agua que la comunidad reproduce en el sistema de control posee una tendencia en un rango, el rango de temperatura deseado para la cosecha de algas. Como ya se ha dicho, la forma cómo el sistema logra devolver la temperatura del agua al rango deseado, es recirculando agua de otro recipiente, hasta lograr que la temperatura del agua se devuelva al rango deseado.

> *Lo que* nosotros *controlamos en este proyecto es la temperatura, y necesitamos tener siempre la temperatura del agua en ese rango porque el Fitoplancton (lo que generan las algas) viven en un rango de temperatura de 33 a 37 grados centígrados… Si la temperatura se sale del rango que deseamos que esté, inmediatamente el sistema activa una señal de error y se activan las bombas de recirculación del agua; agua fría o caliente, según la que se necesite* (Transcripción de entrevista a la comunidad, 2019)

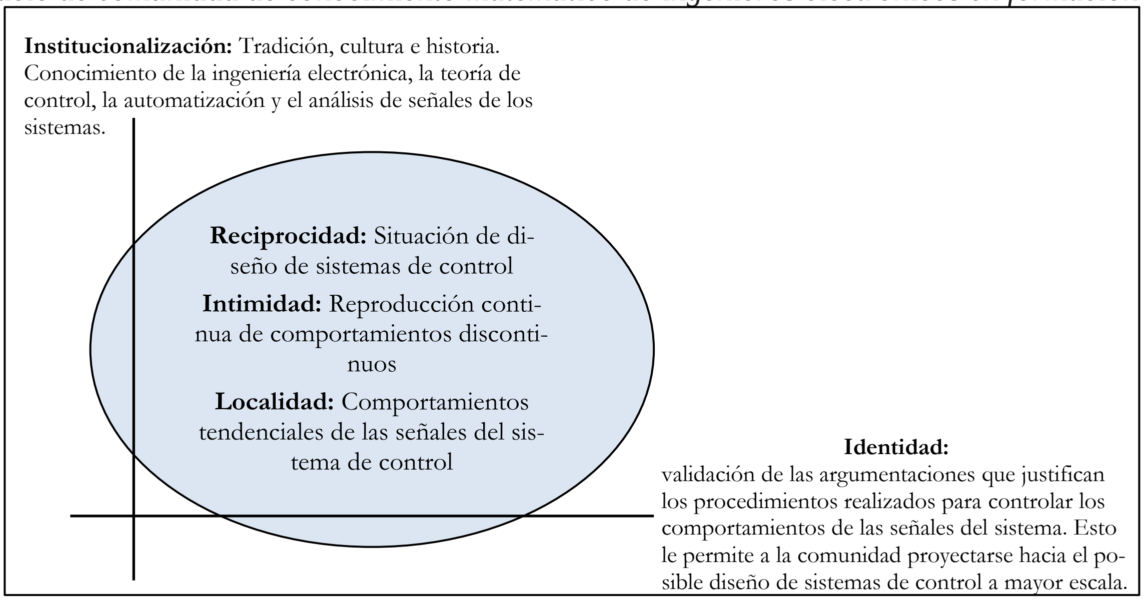
Modelo de comunidad de conocimiento matemático

A continuación, se presenta el modelo de comunidad de conocimiento matemático compuesto por tres elementos que constituyen a la comunidad: reciprocidad, localidad e intimidad. Además de los ejes transversales que distinguen a la comunidad: la institucionalización e identidad.

Este ejemplo muestra la emergencia de la Categoría de Modelación en una comunidad de ingenieros electrónicos en la situación específica de diseño del sistema de control, de tal manera que resignifican los usos de la Transformada de Laplace como una ***instrucción que organiza un comportamiento continuo*** y la permean de justificaciones funcionales**.**

Figura 6.

Modelo de comunidad de conocimiento matemático de ingenieros electrónicos en formación



Fuente: Giacoleti-Castillo (2020, p. 89)

CONCLUSIONES

El contraste entre la enseñanza de la Transformada de Laplace y su argumentación funcional

El ejemplo de la Categoría de Modelación que se presentó compone una epistemología de usos de la Transformada de Laplace en la situación específica de la ingeniería electrónica, la cual se confronta con el tratamiento escolar en sus cursos de matemáticas, donde se privilegia su carácter algorítmico y utilitario como método para resolver ecuaciones diferenciales lineales; por ejemplo, esta transformada se presenta como útil para resolver ecuaciones diferenciales de la forma $ay'' + by' + cy = f(t)$, donde $f(t)$ es discontinua. Particularmente cuando $f(t)$ es escalonada la mayoría de los textos definen primero la Función Escalón Unitario, para después presentar la propiedad de traslación de la Transformada de Laplace que se aplica para este tipo de funciones. Pero este tratamiento no favorece reflexionar sobre los comportamientos presentes en este tipo de ecuaciones diferenciales, en las cuales la solución de y tiende al comportamiento de $f(t)$, y la solución siempre es continua a pesar de que $f(t)$ es discontinua. Generalmente, en los libros de texto y cursos de matemáticas para ingeniería no aparece ninguna justificación matemática acerca de esta propiedad de continuidad de la solución de una ecuación diferencial, mucho menos una justificación funcional. Al respecto, Giacoleti-Castillo (2020) muestra una justificación matemática donde el *Teorema Fundamental del Cálculo* tiene un rol central, ya que la solución de una ecuación diferencial es una primitiva, y esta es siempre continua.

La Transformada de Laplace en su definición se presenta mediante una integral y la integral connota continuidad, así, lo que se genera con esta transformada siempre es continuo (por ejemplo: fluidos, área, acumulación, entre otros). Por lo tanto, la argumentación funcional que expresa la Transformada de Laplace es la *continuidad del comportamiento que se reproduce en el tiempo*. Esta argumentación funcional es la que está presente en la comunidad de ingenieros que se estudió.

Categoría de modelación: un marco de referencia para el docente de ingeniería

La *categoría de modelación* ζ(Mod) es un proceso que acompaña a la pluralidad epistemológica y a la transversalidad de saberes que definen la funcionalidad matemática de las comunidades de conocimiento matemático que suceden en la escuela, en el trabajo y en la ciudad (Cordero et. al, 2022). Sin embargo, como indican Mendoza y Cordero (2018), la categoría de modelación no aparece en la matemática escolar habitual para la formación de ingenieros, aun cuando si aparece en situaciones del cotidiano de estas comunidades de conocimiento matemático, por ejemplo, de estudiantes de ingeniería biónica o electrónica.

Esta categoría de modelación es un marco de referencia conformada por una epistemología de usos, la cual es la base para que el docente de matemáticas diseñe situaciones escolares que atiendan las realidades del quehacer de la ingeniería. De esta manera se trastocaría y transformaría la matemática escolar de la ingeniería para crear la relación recíproca con el cotidiano del ingeniero. Dentro de algunas investigaciones se han realizado diseños de situación escolar de socialización considerando el marco de referencia de la categoría de modelación y se ha dado evidencia del uso del conocimiento en comunidades de estudiantes de ingeniería y estudiantes de profesorado en matemáticas (Chávez, 2022; Marcía-Rodríguez, 2020; Morales, 2020)

Otra característica de la categoría de modelación es su transversalidad en los niveles educativos, por ejemplo, la ecuación diferencial no es transversal a diferentes niveles educativos, sin embargo, las ideas concernientes a la reproducción de un comportamiento si lo son, este es un argumento matemático que aparece en distintas situaciones de uso del conocimiento matemático y favorecido en la matemática escolar. Por ejemplo, desde los libros de texto de los primeros años de primaria se ofrece una imagen y una cuadricula para reproducir el comportamiento de la imagen de referencia (Cordero y Flores, 2007); la gráfica que representa el movimiento oscilatorio de un resorte; la expresión $x^2 + ax + b$ es decir, una parábola que se le suma una expresión lineal, en Rosado y Cordero (2006) los argumentos de los estudiantes estuvieron dados por la parte lineal de la expresión cuadrática que es la recta tangente cuando cruza el eje de las y y tiene que ver con su comportamiento. Con esa característica, la categoría de modelación es un marco de referencia para el sistema educativo en general.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar-Sánchez, J. (2002). *Un estudio sobre el desarrollo histórico y epistemológico de la transformada de Laplace y sus aplicaciones* [Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN].

Alsina, Claudi (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? *Revista Iberoamericana de Educación*, *43*, 85-10.

Artigue, M. (2016). Mathematics education research at university level: achievements and challenges. En E. Nardi y C. Winsløw (Eds.), *Proceedings of the first conference of INDRUM* (pp. 11-22). Université de Montpellier and INDRUM.

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance objective.* Presses Universitaires de France.

Barrios Borges, E. y Cordero, F. (en prensa). Una categoría de modelación matemática y la ingeniería. Contribuciones y aspectos metodológicos. En A. Solares-Rojas y A. Paulino Preciado-Babb, (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España*. SOMIDEM.

Bissell, C. y Dillon, C. (2012). *Ways of Thinking, Ways of Seeing. Mathematical and Other Modelling in Engineering and Technology*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-25209-9

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A. y Rasmussen, C. (2017). Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level: state of the art and looking ahead. *In Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level. ICME-13 Topical Surveys* (pp. 1-32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-41814-8_1

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education-

Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1-2), 149-171.

Blum, W. (2011). Can Modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM*, *38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Diprima, R. y Boyce, W. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Limusa.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in Mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Kluwer Academic Publishers.

Cantoral, R. (2013) *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Castro, J., Hernández, A., Natarén, A., y Solís, G. (2019). *Automatización de un sistema de control de temperatura para la cosecha de algas por el método de hidroponía* [Informe de proyecto interno, Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez].

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. Hernández (Eds.), *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. Re-pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377-399). Gedisa.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Gedisa.

Cordero, F (2023). *Matemáticas, sus usos y significados. Un programa socioepistemológico de la Matemática Educativa*. Gedisa.

Cordero, F., Carranza, P., Rosa, M. y Orey, D. (2022). *La modelación en la vida de la gente. Un programa alternativo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Gedisa.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista*

Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *10*(1), 7-38.

Cordero, F., Mendoza-Higuera, E.J., Pérez-Oxté, I. Huincahue, J. y Mena-Lorca, J. (2022). A category of modelling: the uses of mathematical knowledge in different scenarios and the learning of mathematics. En M. Rosa, F. Cordero, D. Orey y P. Carranza (Eds.), *Mathematical Modelling Programs in Latin America. A Collaborative Context for Social Construction of Knowledge for Educational Change* (pp. 247-267). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3_12

Cordero, F. y Miranda, E. (2002). El Entendimiento de la transformada de Laplace: Una Epistemología como Base de una Descomposición Genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *5*(2), 133-168.

Cordero, F., Rosa, M. Orey, D. y Carranza, P. (2022). Modelling in the Life of People: An Alternative Program for Teaching and Learning of Mathematics. En M. Rosa, F. Cordero, D. Orey y P. Carranza (Eds.), *Mathematical Modelling Programs in Latin America. A Collaborative Context for Social Construction of Knowledge for Educational Change* (pp. 3-28). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-31

Cordero, F. y Solís, M. (2022). Un cambio educativo. ¿Matemática para la ingeniería? o ¿Matemática de la ingeniería? En F. Cordero, M. Solís y C. Opazo-Arellano (Eds.), *La matemática en la ingeniería. Modelación y transversalidad de saberes. Situaciones de aprendizaje* (pp. 27-44). Gedisa.

Chavez, H. (2022). *Un diseño de situación escolar con perspectiva de socialización: Una resignificación de la asíntota en estudiantes de docencia de la matemática* [Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN].

Edwards, H. y Penney, D. (1986). *Ecuaciones diferenciales elementales, con aplicaciones.* Prentice Hall Hispanoamericana.

Giacoleti-Castillo, F. (2020). *La temporalización y la tendencia como factores funcionales de la reproducción de un comportamiento continuo a partir de discontinuos. Una resignificación de la Transformada de Laplace en un sistema de control* [Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN].

Giacoleti-Castillo, F. y Cordero, F. (2020). Reproducción continua de comportamientos discontinuos. De la Transformada de Laplace a la continuidad de la reproducción de comportamientos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(2), 615-626.

González-Martín, A., Gueudet, G., Barquero, B. y Romo-Vázquez, A. (2021). Mathematics and other disciplines, and the role of modelling: advances and challenges. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi y C. Winsløw (Eds.), *Research and Development in University Mathematics Education* (pp. 169-189). Routledge ERME Series.

Guber, R. (2011). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad.* Siglo Veintiuno Editores.

Harris, D., Black, L., Hernandez-Martinez, P., Pepin, B., Williams, J. y With the Trans Maths Team (2015). Mathematics and its value for engineering students: What are the implications for teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(3), 321-336.

Hernández, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: Conceptos, aplicaciones y simulación con MATLAB.* Pearson Educación.

Jaworski, B., Robinson, C., Matthews, J. y Croft, T. (2012). An activity theory analysis of teaching goals versus student epistemological positions. *International Journal of Technologyin Mathematics Education*, *19*(4), 147-152.

Kane, R., Sandretto, S. y Heath, C. (2002). Telling half the story: a critical review of research on the teaching beliefs and practices of university academics. *Review of Educational Research*, *72*(1), 77-228. https://doi.org/10.3102/00346543072002177

Kant, I. (1998). *Crítica de la razón práctica*, (Emilio Miñana y Manuel García, Trad.). Tecnos editores (Obra original publicada en 1788).

Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automático* (7ma. ed.). Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Martínez, M. (2007). *La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Manual Teórico-Práctico.* Editorial Trillas.

Marcía-Rodríguez, S. (2020). *Resignificación de la integral en una comunidad de estudiantes de docencia de la matemática: una categoría de acumulación y la perspectiva de identidad disciplinar* [Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN].

Mendoza-Higuera, E.J. (2020). *El uso de la matemática en la Ingeniería Biónica. De la estabilidad a la reproducción de comportamientos en un sistema de control. Una categoría de Modelación* [Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN].

Mendoza-Higuera, E.J. y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 36-61.

Mendoza-Higuera, E.J., Cordero, F., Solís, M., y Gómez, K. (2018). El Uso del conocimiento matemático en las comunidades de ingenieros. Del objeto a la funcionalidad matemática. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1219-1243. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a23

Morales, J.L. (2020). *Resignificación de los usos de la derivada en un diseño escolar con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión: predicción, comportamiento tendencial y analiticidad* [Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN].

Nardi, E., Jaworski, B. y Hegedus, S. (2005). A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: from “tricks” to “techniques”. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 284-316. https://www.jstor.org/stable/30035042

Nardi, E. y Rasmussen, C. (2020). Teaching practices at university level. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 840-844). Springer.

Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna* (5ta. ed.). Pearson Educación S.A.

Pérez-Oxté, I. y Cordero, F. (2022). Modelling and anticipation of graphical behaviors in industrial chemical engineering: the role of transversality of knowledge in learning mathematics. En M. Rosa, F. Cordero, D. Orey y P. Carranza (Eds.), *Mathematical Modelling Programs in Latin America. A Collaborative Context for Social Construction of Knowledge for Educational Change* (pp.269-290). Springer.

Pollak, H. (1979). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. En UNESCO (Ed.), *New Trends in Mathematic Teaching IV* (pp. 232-248). UNESCO.

Rasmussen, C. y Kwon, O.N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 189-194.

Rosa, M. Cordero, F. Orey, D. y Carranza, P. (2022). *Mathematical Modelling Programs in Latin America. A Collaborative Context for Social Construction of Knowledge for Educational Change.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3

Rosado, M. y Cordero, F. (2006). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19* (pp. 793-799). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Spiegel, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas* (3ra. ed.). Prentice Hall Hispanoamericana.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Kluwer.

Toro, I. y Parra, R. (2010). *Fundamentos epistemológicos de la investigación y la metodología de la investigación. Cualitativa/cuantitativa.* Fondo Editorial Universidad EAFIT.

Winsløw, C. y Rasmussen, C. (2020). University Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 881-890) Springer.

Zill, D. y Cullen, M. (2006). *Matemáticas avanzadas para ingeniería: Ecuaciones diferenciales* (3ra. ed.). McGraw-Hill.

USES OF MATHEMATICAL MODELING IN ENGINEERING. ALTERNATIVE FRAME OF REFERENCE FOR THE TEACHER

ABSTRACT

In higher education we recognize that for mathematics teachers there are no frames of reference that allow them to teach mathematics courses with a vision of the real use of mathematics in the disciplines. In order to address this problem, a frame of reference for the teaching and learning of mathematics is formed from a modeling category revealed by analyzing the uses and meanings of mathematical knowledge of electronic engineering in a control system, based on the Socioepistemological Theory and ethnographic methodical aspects. In particular, the Laplace transform offers the temporalization of the continuous reproduction of a discontinuous behavior, this is contrasted with the usual teaching of differential equations and their presentation in textbooks. It is concluded that forming an epistemology of uses of mathematical knowledge proper to the professions should be the basis for designing school situations and providing an environment of uses and meanings of mathematics to be taught and learned, this disrupts and transforms the status quo of school mathematics to create a reciprocal relationship with the daily life realities.

Keywords: Signification, Behavior reproduction; Differential equations; Laplace transform.

USOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA ENGENHARIA. QUADRO DE REFERÊNCIA ALTERNATIVO PARA O PROFESSOR

RESUMO

No ensino superior reconhecemos que para os professores de matemática não existem estruturas que lhes permitam ensinar cursos de matemática com uma visão do uso real da matemática nas disciplinas. Para abordar este problema, um quadro de referência para o ensino e aprendizagem da matemática é formado a partir de uma categoria de modelagem revelada pela análise dos usos e significados dos conhecimentos matemáticos da engenharia eletrônica em um sistema de controle, baseado em Teoria Socioepistemológica e aspectos metódicos etnográficos. Em particular, a transformação de Laplace oferece a temporalização da reprodução contínua de um comportamento descontínuo, isto é contrastado com o ensino usual de equações diferenciais e sua apresentação em livros didáticos. Conclui-se que moldar uma epistemologia de usos do conhecimento matemático específico das profissões deve ser a base para projetar situações escolares e fornecer um ambiente de usos e significados da matemática a ser ensinada e aprendida, isto perturba e transforma o status quo da matemática escolar para criar uma relação recíproca com as realidades cotidianas.

Palavras-chave: Significado, Reprodução de comportamento; Equações diferenciais; Transformação de Laplace.

Falconery Giacoleti-Castillo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
falconery.giacoleti@cinvestav.mx
https://orcid.org/0000-0002-1998-2134
Falconery M. Giacoleti Castillo obtuvo el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN), en México. Es profesor de matemáticas, egresado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, en Honduras. Se ha desempeñado como docente de matemáticas en el nivel universitario y bachillerato. Ha sido ponente y tallerista en eventos académicos sobre Matemática Educativa en varios países de Latinoamérica. Es coautor de varios capítulos de libros sobre los usos de la matemática en la ingeniería (en editoriales Gedisa y Springer). Actualmente cursa el doctorado en Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN. Sus intereses de investigación se refieren a los usos y significados del conocimiento matemático en diversas disciplinas, como la ingeniería, la docencia de matemáticas, entre otras.

Francisco Cordero
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
fcordero@cinvestav.mx
https://orcid.org/0000-0002-7891-7498
Francisco Cordero es investigador titular y jefe del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN). Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN y posdoctorado en la Universidad de Purdue, Indiana, Estados Unidos. Los temas de investigación del doctor Cordero son la teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa, las categorías de uso del conocimiento matemático de la gente, la modelización y la transversalidad del conocimiento matemático en la matemática y en la ingeniería, la formación y profesionalización del profesorado en matemáticas, y la socialización de la ciencia. Coordinador del programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (Soltsa). Es miembro del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores (SNII-II), de la Academia Mexicana de Ciencias (AMC) y del Comité Latinoamericano de la Matemática Educativa (Clame).

Eleany Barrios Borges
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
eleany.barrios@cinvestav.mx
https://orcid.org/0000-0002-5212-6663

Eleany Barrios Borges es Máster en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, México y Licenciada en Matemática por la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Cuba. Es coautora de artículos y capítulos de libros. Ha participado como ponente y tallerista en eventos nacionales e internacionales. Es profesora de matemáticas. Sus intereses de investigación están ligados a la educación para el desarrollo sostenible; la alfabetización científica; la complejidad; y, la problematización de los usos y significados del conocimiento matemático en la realidad para su incorporación mediante diseños escolares al sistema educativo.

Sindi Marcía-Rodríguez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
sindi.marcia@cinvestav.mx
http://orcid.org/0000-0003-1998-8277
Sindi Marcía-Rodríguez es Maestra en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, por el Departamento de Matemática Educativa en el Cinvestav, México. Profesora en Matemáticas en el grado de licenciatura por la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras. Es coautora de un artículo y varios capítulos de libros (de las editoriales Gedisa y Springer). que tratan sobre los usos de la matemática en la formación inicial docente y la ingeniería. Actualmente es estudiante de doctorado en el departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Ha participado como ponente y tallerista en eventos académicos de la Matemática Educativa en varios países. Los temas de investigación de la M. en C. Marcía-Rodríguez se refieren a los usos y significados del conocimiento matemático, particularmente del Cálculo Integral en diferentes comunidades.

Capítulo 6

PROGRAMAS EFECTIVOS DE DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE. UN ESTUDIO DE CASO CENTRADO EN PROMOVER EN EL PROFESORADO EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD DE MODELAR EN SUS ESTUDIANTES[12]

Elisabeth Ramos-Rodríguez

Natividad Adamuz-Povedano

Elvira Fernández de Ahumada

RESUMEN

En Educación Matemática, un ámbito importante es el desarrollo profesional docente y, particularmente, la generación de programas de desarrollo profesional que sean efectivos y que impacten en la enseñanza del profesorado. Los principios de diseño de programas efectivos ofrecidos por la literatura han sido considerados en la configuración de un Diplomado que tenía como objetivo fortalecer la práctica del profesorado en relación al desarrollo de habilidades matemáticas en su alumnado. El objetivo de este estudio es analizar si el programa diseñado fue efectivo, desde el punto de vista del docente participante en relación al desarrollo de una habilidad matemática, indagando las propuestas de enseñanza presentadas por uno de los grupos de profesores, el que se centró en la habilidad de modelar, estudiando cómo estás planeaciones evolucionan en términos de las características de las tareas de modelación que formulan, en tres momentos claves: antes, durante y después del Diplomado. En un estudio de caso de un grupo de profesorado centrado en la habilidad de modelación matemática, se analizan las características de las tareas que propone el profesorado en tres momentos claves: antes, durante y después del diplomado. Los resultados ponen de manifiesto que el profesorado inicia el proceso desde una caracterización de la tarea con poca presencia de contextos reales y cercanos al alumnado. Sin embargo, conforme avanza el Diplomado, las propuestas van evolucionando, incluyendo dichos elementos. Además, el profesorado va otorgando mayor relevancia en el diseño de la clase una

[12] **Como citar:** Ramos-Rodríguez, E., Adamuz-Povedano, N. y Fernández de Ahumada, E. (2024). Programas efectivos de desarrollo profesional docente. Un estudio de caso centrado en promover en el profesorado el desarrollo de la habilidad de modelar en sus estudiantes. En M.D. Aravena-Díaz y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Modelación matemática y resolución de problemas: Retos y oportunidades* (pp. 131-154). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

propuesta significativa para los estudiantes y acorde a sus diferentes niveles de habilidad matemática y, en general, a sus conocimientos.

Palabras clave: Modelación matemática; Programas de desarrollo profesional; Efectividad; Características de una tarea.

INTRODUCCIÓN

Hay diversas aceptaciones de lo que implica el concepto de desarrollo profesional docente (DPD). En este estudio, se entiende como un proceso de aprendizaje y crecimiento personal y continuo que experimenta el docente, en el que participa por voluntad, alcanzando gradualmente confianza, autonomía, profundización en sus conocimientos y habilidades para mejorar su práctica de enseñanza de forma que pueda enfrentar desafíos de aprendizaje que surgen en el aula (Ávalos, 2011; Bautista y Ortega-Ruíz, 2015; Mizwell, 2010). Los programas de formación que se le ofrecen al profesorado juegan un rol importante a la hora de identificar cómo este evoluciona en su DPD (Ramos-Rodríguez, 2014). Desgraciadamente, la formación continua de profesores lleva tres décadas entregando resultados poco alentadores (cualitativa y cuantitativamente) con respecto a propuestas formativas exitosas, en cuanto a que propicien que los profesores mejoren sus prácticas y aún más decepcionantes en relación con el impacto en el aprendizaje de los alumnos de esos profesores (Darling-Hammond et al., 2017; Desimone y Pak, 2017; Montecinos, 2003; Vaillant, 2016).

Esto lleva a fomentar programas efectivos de DPD, definidos según el nivel de mejora de la enseñanza del docente participante y del nivel de mejora de los aprendizajes de sus estudiantes (Desimoney Pak, 2017; Montecinos, 2003), elementos clave del DPD.

Son numerosas las investigaciones centradas en identificar principios para programas efectivos de DPD (Loucks-Horsley et al., 1996; Korthagen et al., 2006; Reitzug, 2002). Ramos-Rodríguez et al. (2021) proponen principios de programas efectivos exclusivos para el ámbito de la Educación Matemática. Con este trabajo se pretende avanzar en esta línea, presentando evidencia de cómo estos principios se operativizan en un contexto específico. En concreto, en el año 2020, se diseñó, bajo la mirada de los principios para programas efectivos de DPD de matemáticas (Ramos-Rodríguez et al., 2021), un Diplomado realizado en Chile, cuyo propósito era fortalecer la práctica del profesor con relación al desarrollo de habilidades matemáticas en el estudiantado, que promueve el Ministerio de Educación de este país (resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar). Al implementar dicho programa de DPD en modalidad virtual, surgieron las preguntas ¿el programa fue efectivo?, es decir, ¿logró impactar en la enseñanza de sus profesores participantes? Estas cuestiones llevan a proponer como objetivo estudiar si el programa diseñado fue efectivo. Dada la complejidad de la enseñanza, indagar en ella implica observar una amplia gama de aspectos de los docentes, como su conocimiento, su forma de interactuar con los estudiantes, o su reflexión sobre la práctica. Para este trabajo, concretamos el objetivo de estudio analizando las propuestas de enseñanza presentadas por uno de los grupos de profesores, el que se centró en la habilidad de modelar, estudiando cómo estás evolucionan en términos de las características de las tareas de modelación que proponen, en tres momentos claves: antes, durante y después del Diplomado.

Se ha escogido al grupo que trabajó con la habilidad de modelar por diversos motivos. Autores como Chan (2013) y Borromeo-Ferri (2018) señalan que, aunque esta existe desde hace tiempo, los esfuerzos centrados en el profesorado a través de programas de DPD se han producido sólo en los últimos años. Por su parte, Cai et al. (2014) señalan que, en comparación con el profesorado en formación inicial, los programas de DPD para aquellos que están en ejercicio han recibido más atención desde el ámbito de la investigación ya que suelen formar parte de un proyecto financiado que contempla un estudio de investigación y evaluación vinculado a su finalización con éxito en un plazo previsto. En el ámbito de la formación inicial destaca el rol de la incorporación de material concreto para favorecer que futuros profesores puedan matematizar de mejor manera (Guerrero-Ortiz et al., 2018; Huincahue et al., 2018), donde se observa la necesidad de clarificar la ubicación de la modelación matemática (MM) en la formación inicial de profesores de manera explícita y la necesidad de que los profesores en formación experimenten situaciones de modelación y las resuelvan para poder adecuarlas y llevarlas al aula. En la misma línea, Zaldívar et al. (2017) declaran la importancia de que los profesores en formación y en ejercicio se enfrenten a este tipo de situaciones basadas en MM para que, a través de lo que puedan experimentar, reflexionen sobre las características y dificultades que se pueden dar en el aula, para buscar anticipadamente estrategias adecuadas de cómo enfrentarlas.

Existen dos retos principales entre los profesores a la hora de promover el uso de prácticas y actividades de MM en las aulas (Chan, 2013; Lesh y Doerr, 2003). En primer lugar, parece haber ideas erróneas o confusión entre los profesores respecto a lo que es la MM y sus prácticas (Blum, 2015; Cirillo et al., 2016). El modelado suele percibirse o interpretarse erróneamente como el dibujo de un modelo o la representación paso a paso de la resolución de un problema matemático (Chan, 2013; Lesh y Doerr, 2003). En segundo lugar, la mayoría del profesorado en ejercicio está limitado por los sistemas tradicionales de evaluación, lo que se traduce en limitaciones para la gestión del tiempo y el aprendizaje de las actividades de MM en el aula (Lesh y Doerr, 2003).

Estos desafíos y problemáticas motivaron a organizar este estudio en torno al impacto que tuvo un programa específico de DPD en un grupo de docentes en ejercicio, cuyo propósito fue apoyarlos en el desarrollo de habilidades matemática en sus estudiantes. En específico, el objetivo de este estudio es analizar si el programa diseñado fue efectivo, desde el punto de vista del docente participante en relación al desarrollo de una habilidad matemática en los aprendices, indagando las propuestas de enseñanza presentadas por uno de los grupos de profesores, el que se centró en la habilidad de modelar, estudiando cómo estás planeaciones evolucionan en términos de las características de las tareas de modelación que formulan, en tres momentos claves: antes, durante y después del Diplomado.

CARACTERÍSTICAS DE UNA TAREA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

El sustento teórico que apoya este estudio se basa en las características que debe tener una tarea de MM que debe diseñar e implementar el docente. Para ello, primero se debe dejar claro que se entiende por tarea escolar o tarea matemática, donde la literatura ofrece diversas perspectivas. Por ejemplo, Kuzniak et al. (2016) distinguen dos enfoques: el praxeológico, centrado en el conjunto de técnicas y saberes teóricos que permiten desentrañar la estructuración del dominio matemático; y el ergonómico y didáctico, que se refiere a la separación entre lo que se espera del alumno y lo que realiza efectivamente. Para este estudio, se ha adoptado la concepción de tarea matemática definida por Stein y Smith (1998) como "un segmento de actividad en el aula que se dedica al desarrollo de una idea matemática particular. Una tarea puede involucrar varios problemas relacionados o un trabajo extenso, hasta un período de clase completo en un solo problema complejo" (p. 268). Esta definición se ha elegido porque es consistente con la definición de tareas de modelación matemática presentada a continuación.

Dada la complejidad de procesos que involucran las actividades de modelación, primero que todo, se definirá que posición se tiene en este estudio respecto a la MM. La postura del estudio va en concordancia con Niss y Blum (2020), quienes manifiestan que quien se involucra en una tarea de MM debe ser capaz de resolver problemas, situaciones y fenómenos presentes en áreas, disciplinas o prácticas distintas, es decir, en dominios o situaciones ajenas a las matemáticas, mediante la creación de un modelo matemático que representa los elementos principales de dicha situación con elementos matemáticos.

Ahora bien, se plantea la interrogante acerca de qué características debe tener una tarea de MM. Lesh et al. (2000), para el diseño de actividades que estimulan la modelación, centraron su atención en dos dimensiones: las características de las tareas y de sus soluciones.

Respecto a las características de la tarea, señalan que de acuerdo con el principio de realidad la tarea debe ser significativa para los estudiantes y estar acorde a sus diferentes niveles de habilidad matemática y en general, a sus conocimientos. Según el principio de prototipo efectivo, la actividad debe ser lo más sencilla posible. Según establecen los principios de autoevaluación y de documentación, también es necesario que incluya criterios que los estudiantes puedan usar para revisar sus modelos y crear documentación para revelar cómo resolvieron la tarea, respectivamente. Respecto a las características de las soluciones que deben fomentarse, el principio de construcción del modelo afirma que los estudiantes deben proporcionar una explicación o modelo explícito. Por último, el principio de habilidad compartida y reutilización establece que debe estimularse la producción de soluciones compartibles y reutilizables.

Por otro lado, también hay autores que consideran que las tareas que plantean problemas de estimación de grandes cantidades, o los llamados problemas de Fermi, son muy adecuados para introducir elementos de MM en los escolares (Ferrando et al., 2017). Estas tareas presentan una pregunta abierta, con poca información sobre la posible resolución, se consideran problemas no estándar que requieren que los estudiantes hagan suposiciones sobre la situación del problema y estimen las cantidades relevantes antes de realizar, a menudo, cálculos sencillos (Ärlebäck, 2009). Otras características atribuidas a los problemas de Fermi por algunos autores son su accesibilidad y/o autodiferenciación, lo que significa que el problema puede ser trabajado y resuelto en diferentes grados escolares, así como en diferentes niveles de complejidad (Kittel y Marxer, 2005). Además, como expresa Sowder (1992), no debe existir una respuesta exacta, sino que estos problemas deben ser contestados con una estimación, ya que la respuesta exacta no está disponible.

METODOLOGÍA

Se realiza una investigación de carácter cualitativo, en donde se lleva a cabo un estudio de caso, analizando las características de las tareas propuestas en un plan de clases que va sufriendo modificaciones a medida que avanza un grupo de profesores en un programa de DPD, es decir, cuando diseña, implementa y evalúa una clase centrada en la habilidad de MM dentro de un Diplomado centrado en el desarrollo de habilidades matemática en el alumnado. Se escoge como diseño metodológico el estudio de caso, dado que el objetivo apunta a ver lo particular por sobre lo general, capturando los elementos esenciales de un caso para comprender la complejidad de la práctica de enseñanza de la matemática, en este caso, sobre el desarrollo de habilidades matemáticas en el alumnado.

Contexto del estudio

El contexto del estudio se encuadra en un Diplomado denominado "Desarrollo profesional desde el Estudio de Clases con foco en las habilidades matemáticas" implementado en una universidad de Chile. Este Diplomado se elaboró considerando los principios de programas efectivos para profesores de matemáticas (Ramos-Rodríguez et al., 2021) (Figura 1).

Figura 1.
Principios para programas efectivos de desarrollo profesional para profesores de matemática

Principio 1. Enseñanza para el aprendizaje: se centra en la mejora de las prácticas educativas en pro del aprendizaje de la matemática de los estudiantes. Principio 2. Foco en el conocimiento: se centra en el conocimiento especializado del profesor de matemática y una visión de para qué enseñar matemática y cuál es la enseñanza efectiva de ella. Principio 3. Indagación y reflexión: requiere la indagación continua de la propia práctica, promoviendo reflexión sobre ella, sobre lo que aprenden los profesores y sobre cómo llevarlo al aula. Principio 4. Vínculos externos: proporciona un equilibrio y coherencia entre la matemática y el currículo, proveyendo de vínculos entre otros estamentos del sistema educativo, escuela, universidades y estudiantes/docentes. Los líderes directivos ofrecen apoyo proactivo para el DPD. Principio 5. Tiempo: involucra un tiempo suficiente para lograr apropiación y cambio (en las creencias, por ejemplo) de los docentes. Principio 6. Comunidades de práctica: se centra en las comunidades de práctica a través del intercambio de opiniones y trabajo colaborativo, en lugar de maestros individuales. Principio 7. Recogida de datos del aula: cuenta con instancia de recogida de datos del aula, incluir experimentación en el aula –investigación acción, por ejemplo. Principio 8. Facilitación de expertos: considera la participación de expertos (en lo posible que sean parte de los formadores) que ayuden a modelar la enseñanza efectiva de la matemática, valorando la autoridad de la experiencia como fuente de aprendizaje profesional.

Fuente: Ramos-Rodríguez et al. (2021)

Antes de las intervenciones de las formadoras en el Diplomado, se formar cuatro grupos, cada uno focalizado en una de las habilidades que se promueve desde el Ministerio de Educación de Chile. Luego, cada grupo diseña un plan de clase centrado en la habilidad escogida, para posteriormente socializar con pares y formadoras. El grupo que se estudia es el que elige la habilidad de modelar. Esto da origen al plan de clases P1.

Posterior a ello, el programa formativo tuvo dos Etapas (Figura 2). En la primera de ellas, denominada "Etapa de profundización y diseño" (una semana de duración), las formadoras profundizaron en las habilidades para lograr que los docentes adquirieran sustento teórico-didáctico para su implementación en el aula. Con ello, los grupos reformularon el plan de clases, manteniendo la habilidad seleccionada con anterioridad, dando origen a la planificación P2.

El programa de DPD continuó promoviendo a cada grupo que llevara a cabo el análisis didáctico (Rico, 2013) asociado a la clase diseñada, el que fue posteriormente socializado con sus pares y formadoras. Al finalizar esta semana, los grupos presentaron un informe con el análisis didáctico realizado y el plan de clases reformulado. De este informe se extrae el plan de clases P_3.

La segunda Etapa del programa formativo, llamada "Etapa de Estudios de Clases" se basó en la metodología de Estudios de Clases, en la que, cada grupo, a partir de la clase diseñada en la primera Etapa, llevó a cabo ciclos de Estudios de Clases, donde se grabaron las implementaciones para ser analizadas con sus pares y formadores en el Diplomado, de manera que el grupo posteriormente se reúna para analizar y reflexionar los elementos que necesitan modificarse, lo que da origen a un plan de clases reformulado. Este proceso duró 6 meses, culminando con la entrega de un informe final donde cada grupo presentó sus reflexiones en torno a los ciclos de Estudio de Clases, las reformulaciones de las clases y el análisis de sus implementaciones. Aquí surge el plan de clases P_4.

Estas dos Etapas que estructuran al Diplomado, es decir, la "Etapa de profundización y diseño" y la "Etapa de Estudios de Clases", permiten que esté presente el principio 3 (indagación y reflexión), en especial a través de la metodología de Estudio de Clases, que además favorece la presencia del principio 6 (comunidades de práctica), donde se insta al intercambio de opiniones y trabajo colaborativo. Además, como se puede apreciar, el Diplomado consideró un tiempo suficiente para la apropiación de los temas a abordar, tanto disciplinarios como didácticos. Esto provoca que esté presente en el diseño del DPD el principio 5 (tiempo).

Dado que el propósito del Diplomado era fortalecer la práctica y el conocimiento especializado del profesor respecto a las habilidades matemáticas, este consideró en su diseño el principio 1 (foco en la enseñanza) y el principio 2 (foco en el conocimiento).

Como se ha mencionado, el Diplomado gira en torno a las cuatro habilidades matemáticas que promueve el currículum nacional chileno. Este énfasis en un elemento del currículum provoca que esté presente en el diseño del programa formativo el principio 4 (vínculos externos), proporcionando un equilibrio y coherencia entre la matemática y el currículo.

Por otro lado, se aprecia en la Etapa 2 la importancia de la recogida de datos en el aula, proporcionando presencia al principio 7.

Por último, en su diseño, se consideró el principio 8: facilitación de expertos, es decir, se tomó en cuenta que el Diplomado fuese dirigido por formadoras expertas en didáctica de la matemática y en las habilidades matemáticas. Fue dictado inicialmente por tres especialistas en didáctica de la matemática, una de ellas, especialista en la habilidad de argumentar, otra de ellas, en la habilidad de resolver problemas y modelar y la tercera en la habilidad de representar. Posteriormente se incorporan otras dos formadoras, una de ellas especialista en la habilidad de modelar y la otra en la de resolver problemas.

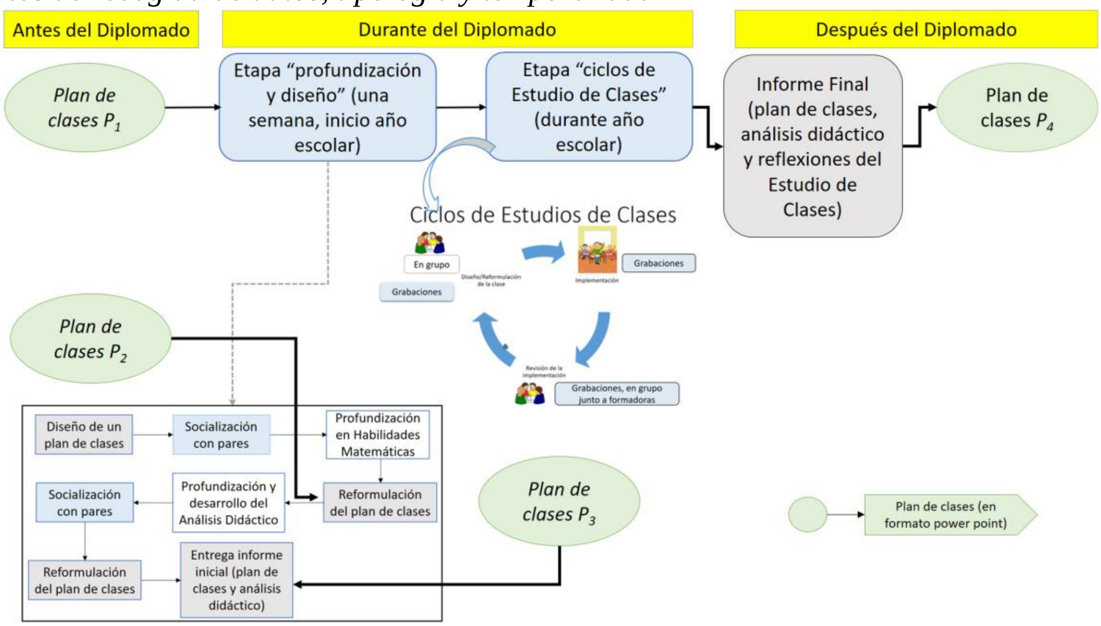
Sujetos del estudio

Participaron 22 profesores de primaria en ejercicio que realizan clases principalmente en colegios vulnerables de la V región de Valparaíso. Estos se inscribieron en el programa formativo por propia voluntad. De estos 22 profesores, este estudio se centra en un grupo compuesto por cuatro de ellos que se focalizaron en la habilidad de modelar, dejando para posteriores estudios el análisis de los otros grupos. La edad de los profesores del grupo fluctúa entre los 38 y 43 años, tienen entre 11 y 15 años de docencia. Tres de los cuatro profesores tiene como formación inicial el título de profesor de matemáticas de secundaria y han realizado un postgrado en alguna especialidad relacionada con la didáctica de la matemática.

Recogida de datos

Para la recogida de datos, se tiene como fuente cuatro documentos en powerpoint que contiene, el primero de ellos el plan de clases diseñado, y los tres siguientes, la reformulación realizada por el grupo antes, durante y después del Diplomado, como se indicó en la sección anterior. En la Figura 2, se ilustran los instrumentos de recogida de datos según el momento donde se aplica (antes, durante o después del Diplomado).

Figura 2.
Instrumentos de recogida de datos, tipología y temporalidad



Fuente: Elaboración propia

Análisis de datos

Para el análisis de datos, se considera el método de análisis de contenido, considerando como unidades de análisis las tareas propuestas en el plan de clases para cada momento del Diplomado. Las categorías de análisis, que emergen de las características de una tarea de modelación, planteadas por Lesh et al. (2000), se detallan en la Tabla 1. Se escogen estas categorías dado que aportan una mirada sistémica de una tarea de MM.

Tabla 1.
Categorías de análisis empleadas en el estudio

Categoría	Sub-categoría	Descripción
Características de las tareas	PR: principio de realidad la tarea	La tarea debe ser significativa para los estudiantes y estar acorde a sus diferentes niveles de habilidad matemática y en general, a sus conocimientos.
	PP: principio de prototipo efectivo	La tarea debe estar planteada de la forma más sencilla posible.

	PA: principios de autoevaluación	La tarea debe incluir criterios que los estudiantes puedan usar para revisar sus modelos
	PD: principio de documentación	La tarea debe promover en los estudiantes la creación de documentación para revelar cómo la resolvieron.
Características de las soluciones	PC: principio de construcción del modelo	La tarea debe permitir que los estudiantes puedan proporcionar una explicación o modelo explícito.
	PH: principio de habilidad compartida y reutilización	La tarea debe estimular la producción de soluciones compartibles y reutilizables.

Fuente: Elaboración propia.

Para la categorización de las producciones, se contempló una validación de contenido, considerando 9 expertos en didáctica de la matemática, con demostrados conocimientos en MM, tres doctores de Chile, dos estudiantes de doctorado de Chile, tres doctores de España y un Doctor de México. A cada uno de ellos se les envió un cuestionario que contenía las cuatro planificaciones propuestas por el grupo de docentes. Cada experto debía indicar, según una escala Likert de 1 a 5, el grado de presencia de cada uno de los principios propuestos por Lesh et al. (2000) en la formulación del plan de clases. La Figura 3 ejemplifica el modelo de cuestionario a responder por los expertos.

Figura 3.
Ejemplo de instrumento de validación aplicado

Fuente: Elaboración propia

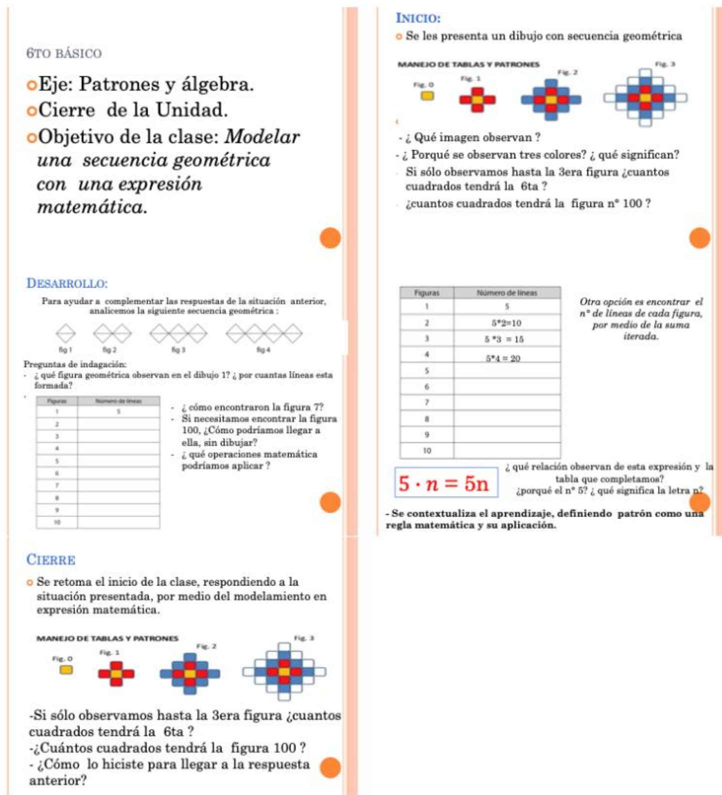
ANÁLISIS

Los resultados se presentan de acuerdo con las características de las tareas propuestas por los docentes antes, durante y después del Diplomado.

Antes del Diplomado

En esta Etapa se cuenta con un plan de clases ilustrado en la Figura 4.

Figura 4.
Plan de clases inicial, P_1



Los resultados de la validación de expertos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2
Resumen de las apreciaciones de expertos sobre el plan de clases en cuanto a las características de la tarea y su solución

Categoría	Principio	Promedio (escala 1 a 5)	Desviación estándar	Moda
Características de la tarea	Principio de realidad de la tarea	2,11	1,17	1
	Principio de prototipo efectivo	3,67	1,41	4 y 5
	Principio de autoevaluación	2,33	1,32	1
	Principio de documentación	2,33	1	2 y 3
Características de la	Principio de construcción del	3,11	1,36	3 y 4

Categoría	Principio	Promedio (escala 1 a 5)	Desviación estándar	Moda
solución	modelo			
	Principio de habilidad compartida y reutilización	2,11	1,167	1

Fuente: Elaboración propia.

Respecto a las características de una tarea de modelación, se puede apreciar que el plan de clases tiene poca presencia de los principios: de realidad de la tarea, de autoevaluación, de documentación. En este sentido, la tarea propuesta tiene poca valoración estén cuanto a estar planteada en un contexto real y significativo para los estudiantes. Además, incluye ligeramente criterios que los estudiantes puedan usar para revisar sus modelos matemáticos. Por último, en esta categoría, se puede apreciar que el plan de clases no promueve en los estudiantes la creación de documentación para revelar cómo la resolvieron. Aun así, en esta categoría, el principio de prototipo efectivo parece estar mejor posicionado, lo que implica que el plan de clases y, en especial, la tarea central, contiene la información esencial para resolver la situación problema, sin distractores.

Por su parte, en relación con las características de la solución de la tarea, hay poca presencia del principio de habilidad compartida y reutilización, es decir, hay poca estimulación a la producción de soluciones compartibles y reutilizables. Además, se observan atisbos de que el plan de clases permite que los estudiantes puedan proporcionar una explicación o modelo explícito.

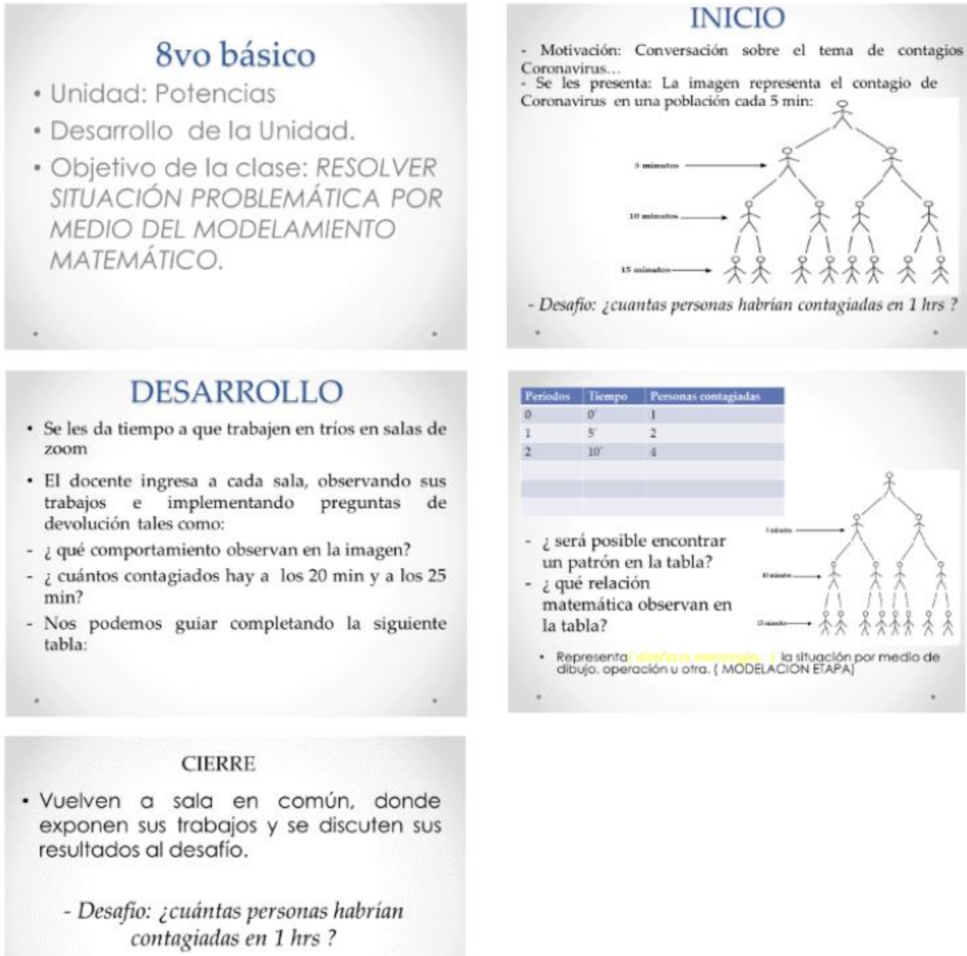
Durante el Diplomado

Se muestran los resultados en las dos etapas del Diplomado: la etapa de profundización y diseño al inicio del programa y la etapa de Estudios de Clases, donde hubo una reunión mensual con los docentes.

Etapa de profundización y diseño

Después que los profesores exponen su plan de clases, las formadoras profundizan en cada habilidad matemática. Esto lleva a los grupos a rediseñar su plan de clases, surgiendo el plan P_2. La Figura 5 muestra el plan reformulado por el grupo estudiado.

Figura 5.
Plan de clases P2 reformulado a partir de la profundización.



La indagación con los expertos en las características de la tarea y la solución, dio como resultado la Tabla 3.

Respecto de las características de la tarea, se aprecia que solo uno de los cuatro principios está débilmente presente: el de documentación, donde el plan de clases y, en especial, la tarea central no incluye criterios que los estudiantes puedan usar para revisar sus modelos matemáticos. Sin embargo, en contraste con el plan anterior, van cobrando más presencia los principios de realidad y de documentación. En otras palabras, el plan de clases y, en particular la tarea involucrada en él, se acercan a la realidad de los estudiantes, resultandos significativos para ellos, manteniéndose acorde a los niveles de habilidad matemática y en general, a sus conocimientos. Además, se observa mayor preocupación por promover en los estudiantes la creación de documentación para revelar cómo resolvieron la tarea.

Tabla 3.
Indicadores para el plan de clases P_2

Categoría	Principio	Promedio (escala 1 a 5)	Desviación estándar	Moda
Características de la tarea	Principio de realidad de la tarea	3,67	1,12	4
	Principio de prototipo efectivo	3,67	1,22	4
	Principio de autoevaluación	2,33	1,58	1
	Principio de documentación	3	1,32	2 y 4
Características de la solución	Principio de construcción del modelo	3,33	1,32	4
	Principio de habilidad compartida y reutilización	2,33	1,66	1

Fuente: Elaboración propia.

Sobre las características de la solución, se aprecia que obtuvo apreciaciones similares a la versión inicial presentada, lo que puede mostrar que los docentes aun no son conscientes de la relevancia de este elemento en un plan de clases enfocado en la MM.

Antes de llevar los ciclos de Estudios de Clases

Al avanzar en la Etapa de Profundización y Diseño, los grupos van socializando ideas y las formadoras entregan nuevas herramientas. Estas herramientas tienen que ver con la didáctica, lo que lleva a los grupos a diseñar el análisis didáctico (Rico, 2013) asociado a la clase a implementar. Esto provoca al grupo a redefinir elementos del plan de clases antes de su implementación, el cual se ilustra en la Figura 6.

La revisión de expertos de este plan de clases en términos de las características de la tarea nos plantea la Tabla 4.

En esta nueva versión del plan de clases, se puede observar que el grupo considera una tarea donde tiene alta presencia el principio de realidad y de prototipo efectivo, es decir, la clase (y en especial la tarea involucrada en ella) es más significativa para los estudiantes y está acorde a sus diferentes niveles de habilidad matemática y en general, a sus conocimientos. Además, hay una preocupación por presentar una tarea que contiene la información esencial para resolver, sin distractores.

Por otro lado, respecto a las características de la solución de la tarea, siguen manteniéndose apreciaciones similares a los planes de clases presentados anteriormente

Figura 6.

Plan de clases P3 antes de llevar los ciclos de Estudios de Clases

El video del inicio está en: https://www.youtube.com/watch?v=szmxbpJM24M

Tabla 4.

Indicadores para el plan de clases P$_3$

Categoría	Principio	Promedio (escala 1 a 5)	Desviación estándar	Moda
Características de la tarea	Principio de realidad de la tarea	4	1,32	5
	Principio de prototipo efectivo	4,22	1,30	5
	Principio de autoevaluación	2,44	1,74	1
	Principio de documentación	2,22	1,39	2
Características de la solución	Principio de construcción del modelo	3,33	1,32	4
	Principio de habilidad compartida y reutilización	2	1,58	1

Fuente: Elaboración propia.

Después del diplomado

Al término del Diplomado los grupos entregan un informe final, donde exponen un plan de clases refinado, que considera las ideas principales del proceso llevado a cabo y responde al proceso de maduración del grupo frente a las tareas matemáticas de modelación puestas en juego en sus clases. El plan de clases de este informe se ilustra en la Figura 7.

Figura 7.

Plan de clases P_4 al finalizar los ciclos de Estudios de Clases y el Diplomado.

De la validación de expertos se obtiene la Tabla 5.

Tabla 5

Indicadores para el plan de clases P_4

Categoría	Principio	Promedio (escala 1 a 5)	Desviación estándar	Moda
Características de la tarea	Principio de realidad de la tarea	4,11	1,27	4 y 5
	Principio de prototipo	4,33	1	5

Categoría	Principio	Promedio (escala 1 a 5)	Desviación estándar	Moda
	efectivo			
Características de la solución	Principio de autoevaluación	3,33	1,58	4
	Principio de documentación	3,44	1,24	2 y 4
	Principio de construcción del modelo	4	1	4
	Principio de habilidad compartida y reutilización	3,33	1,66	5

Fuente: Elaboración propia.

Se puede apreciar que el grupo de profesores propone en esta etapa final un plan de clases cuya tarea central satisface varias de las características de una tarea de modelación. En específico, se tiene que el principio de realidad y el de prototipo efectivo están fuertemente presentes. En concreto, la tarea propuesta parece ser significativa para los estudiantes y acorde a los diferentes niveles de habilidad matemática de ellos y, en general, a sus conocimientos. Es una propuesta que se plantea de forma sencilla, donde contiene la información esencial para resolver, sin distractores. Por otro lado, los principios de evaluación y de documentación están medianamente presentes, en donde, por un lado, el plan de clases y, en especial, la tarea central de él, incluye criterios que los estudiantes puedan usar para revisar sus modelos matemáticos y por otro, se promueve en los estudiantes la creación de documentación para revelar cómo resolvieron la tarea de modelación.

En contraste a las versiones del plan de clases anteriores, se puede valorar que el grupo de docentes pudo avanzar en explicitar las características de la solución de la tarea matemática. Es decir, fueron conscientes de incluir en él instancias para que los estudiantes puedan proporcionar una explicación o modelo explícito y además estimular la producción de soluciones compartibles y reutilizables.

A MODO DE SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS

Una síntesis de cómo van evolucionando las tareas de modelación propuestas por los docentes a medida que transcurre el diplomado se ilustra en la Tabla 6.

Tabla 6.

Resumen de los indicadores en cada etapa del Diplomado

Categoría	Principio	Antes del Diplomado		Durante el Diplomado (después de profundización matemática)		Durante el Diplomado (antes de ciclos de Estudios de Clases)		Después del Diplomado	
		$\bar{x}$	moda	$\bar{x}$	moda	$\bar{x}$	moda	$\bar{x}$	moda
Características de la tarea	Principio de realidad de la tarea	2,11	1	3,67	4	4	5	4,11	4 y 5
	Principio de prototipo efectivo	3,67	4 y 5	3,67	4	4,22	5	4,33	5
	Principio de autoevaluación	2,33	1	2,33	1	2,44	1	3,33	4
	Principio de documentación	2,33	2 y 3	3	2 y 4	2,22	2	3,44	2 y 4
Características de la solución	Principio de construcción del modelo	3,11	3 y 4	3,33	4	3,33	4	4	4
	Principio de habilidad compartida y reutilización	2,11	1	2,33	1	2	1	3,33	5

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 6, se puede apreciar que los docentes inician el proceso desde una caracterización de la tarea con poca presencia de los principios de diseño, lo que va evolucionando hacia una tarea con mayor presencia de todos los principios, lo que puede dar luces que el programa fue efectivo en término de la mejora en la planeación de la enseñanza realizada por los profesores, objetivo de este estudio.

Llama la atención el principio de realidad de la tarea que, si bien se inicia con muy baja presencia, termina estando muy evidente en la versión final de plan de clases. En otras palabras, los docentes van otorgando mayor relevancia en el diseño de la clase a una propuesta significativa para los estudiantes y acorde a sus diferentes niveles de habilidad matemática y en general, a sus conocimientos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Avalos, B. (2011). Teacher professional development in Teaching and Teacher Education over ten years. *Teaching and Teacher Education, 27*(1), 10-20. https://doi.org/10.1016/j.tate.2010.08.007

Ärlebäck, J.B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *6*(3), 331-364.

Barbosa, J.C. (2004). Modelagem matemática: o que é? Por qué? Cómo? *Veritati*, *1*(4), 73-80.

Bautista, A. y Ortega-Ruiz, R. (2015). Desarrollo profesional docente: perspectivas y enfoques internacionales. *Psychology, Society y Education, 7*(3), 343. https://doi.org/10.25115/psye.v7i3.514

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? En S. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer.

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Springer.

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J., Bommero Ferri, R., Borba, M., Geiger, V., ... y Kaiser, G. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher educational perspectives. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterie y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)(38th) and the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education (PME-NA) (36th)*. Springer.

Cirillo, M., Pelesko, J.A., Felton-Koestler, M.D. y Rubel, L. (2016). Perspectives on modeling in school mathematics. En C.R. Hirsch, y A.R. McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in mathematics education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 3-16). National Council of Teachers of Mathematics.

Chan, C.M.E. (2013). Initial perspectives of teacher professional development on mathematical modelling in Singapore: Conceptions of mathematical modelling. En G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 405-413). Springer.

Darling-hammond, L., Hyler, M.E. y Gardner, M. (2017). *Efective Teacher Professional Development*. Learning Policy Institute.

Desimone, L.M. y Pak, K. (2017). Instructional coaching as high-quality professional development. *Theory Into Practice*, *56*(1), 3-12. https://doi.org/10.1080/00405841.2016.1241947

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L.M. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 220-242.

Guerrero-Ortiz, C., Mena-Lorca, J. y Morales, A. (2018). Fostering transit between real world and mathematical world: some phases on the modelling cycle. *International Journal of Science and Mathematics Education 16*(8), 1605-1628. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9856-9

Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 99-115.

Kittel, A. y Marxer, M. (2005). Wie viele Menschen passen auf ein Fussballfeld. *Mit Fermiaufgaben individuell fördern. Mathematik Lehren, 131*, 14-18.

Korthagen, F., Loughran, J. y Russell, T. (2006). Developing fundamental principles for teacher education programs and practices. *Teaching and Teacher Education, 22*(8), 1020-1041. https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.04.022

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 237-251.

Lesh, R.A. y Doerr, H.M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Routledge.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Lawrence Erlbaum Associates.

Loucks-Horsley, S. (1996). Principles of effective professional development for mathematics and science education: A synthesis of standards. *NISE brief, 1*(1), 1-6.

Mizwell, H. (2010). *Why professional development matters. Learning forward*. Learning Forward.

Montecinos, C. (2003). Desarrollo profesional docente y aprendizaje colectivo. *Psicoperspectivas. Individuo y Sociedad, 2*(1), 105-128. https://doi.org/10.5027/psicoperspectivas-Vol2-Issue1-fulltext-6

Niss, M. y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge.

Ramos-Rodríguez, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del algebra, en un curso de formación continua*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada].

Ramos-Rodríguez, E., Bustos, B. y Morales, A. (2021). Identification of the principles of effective professional development programs and their impact: an investigation of the guidelines of a mathematics didactic graduate program and a case study focused on teacher training. *The*

International Journal of Science, Mathematics and Technology Learning, *29*(1), 1-16. https://doi.org/10.18848/2327-7971/CGP/v29i01/1-16

Reitzug, U.C. (2002). Professional development. En A. Molnar (Ed.), *School reform proposals: The research evidence* (pp. 289-316). EPSL.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *33*, 11-27.

Sowder, J. (1992). Estimation and Number Sense. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). Macmillan Publishing Company y NCTM.

Stein, M.K. y Smith, M.S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268.

Stender, P. (2018). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 315-326. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0901-5.

Vaillant, D. (2016). El desarrollo profesional y su incidencia en la tarea del maestro. *Revista Internacional de Magisterio. Educación y Pedagogía*, *79*, 3-7.

Zaldívar, J., Quiroz, S. y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, *8*(15), 87-110.

EFFECTIVE TEACHER PROFESSIONAL DEVELOPMENT PROGRAMS. A CASE STUDY FOCUSED ON PROMOTING TEACHERS' DEVELOPMENT OF MODELING SKILLS IN THEIR STUDENTS

ABSTRACT

In Mathematics Education, an important area is teacher professional development and, particularly, the generation of professional development programs that are effective and impact teacher teaching. The principles of designing effective programs offered by the literature have been considered in the configuration of a Diploma that aimed to strengthen the practice of teachers in relation to the development of mathematical skills in their students. The objective of this study is to analyse whether the designed program was effective, from the point of view of the participating teacher in relation to the development of a mathematical skill, investigating the teaching proposals presented by one of the groups of teachers, which focused on the ability to model, studying how these plans evolve in terms of the characteristics of the modelling tasks they formulate, in three key moments: before, during and after the Diploma. In a case study of a group of teachers focused on the skill of mathematical modelling, the characteristics of the tasks proposed by the teachers are analysed at three key moments: before, during and after the diploma. The results show that teachers begin the process from a characterization of the task with little presence of real contexts close to the students. However, as the Diploma progresses, the proposals evolve, including these elements. In addition, the teachers are giving greater relevance in the design of the class to a meaningful proposal for the students and according to their different levels of mathematical ability and, in general, their knowledge.

Keywords: Mathematical modeling; Professional development programs; Effectiveness; Characteristics of a task.

PROGRAMAS EFICAZES DE DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES. UM ESTUDO DE CASO FOCADO NA PROMOÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES DE MODELAGEM POR PROFESSORES EM SEUS ALUNOS

RESUMO

Na Educação Matemática, uma área importante é o desenvolvimento profissional de professores e, particularmente, a geração de programas de desenvolvimento profissional que sejam eficazes e tenham impacto no ensino de professores. Os princípios de concepção de programas eficazes oferecidos pela literatura foram considerados na configuração de um Diploma que visava fortalecer a prática dos professores em relação ao desenvolvimento de habilidades matemáticas em seus alunos. O objetivo deste estudo é analisar se o programa desenhado foi eficaz, do ponto de vista do professor participante em relação ao desenvolvimento de uma habilidade matemática, investigando as propostas de ensino apresentadas por um dos grupos de professores, que teve como

foco a capacidade de modelar, estudando a forma como estes planos evoluem em termos das características das tarefas de modelação que formulam, em três momentos chave: antes, durante e depois do Diploma. Num estudo de caso de um grupo de professores focado na habilidade de modelação matemática, são analisadas as características das tarefas propostas pelos professores em três momentos chave: antes, durante e depois do diploma. Os resultados mostram que os professores iniciam o processo a partir de uma caracterização da tarefa com pouca presença de contextos reais próximos aos alunos. Contudo, à medida que o Diploma avança, as propostas evoluem, incluindo estes elementos. Além disso, os professores estão dando maior relevância no desenho da aula a uma proposta significativa para os alunos e de acordo com seus diferentes níveis de habilidade matemática e, em geral, de seus conhecimentos.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Programas de desenvolvimento profissional; Eficácia; Características de uma tarefa.

Elisabeth Ramos-Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile
elisabeth.ramos@pucv.cl
https://orcid.org/0000-0002-8409-4125
Doctora en Ciencia de la Educación de la Universidad de Granada, España. Actualmente se desempeña como profesora en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso como académica e investigadora en las líneas de investigación de la formación del profesorado y la modelación matemática. En su actual línea de Investigación, formación de profesores, en particular, el desarrollo profesional del docente, tiene diversas publicaciones en revistas, como Bolema y Reflextive practice, Mathematics y International and Multidisciplinary Perspectives. También ha publicado varios capítulos de libros y ha participado en diversos proyectos de investigación, en los que destaca el proyecto de Cooperación Internacional DAAD, teoría y práctica para la mejora de la formación inicial y el proyecto FONDECYT 11190553 (2020-2023), Programas efectivos de Desarrollo profesional para profesores de matemática.

Natividad Adamuz-Povedano
Universidad de Córdoba, Córdoba, España.
nadamuz@uco.es
https://orcid.org/0000-0003-2941-2618
Doctora por la Universidad de Córdoba en el año 2016. Actualmente, es profesora del Departamento de Matemáticas de dicha Universidad, en el área de Didáctica de las Matemáticas. Sus líneas de investigación están dirigidas (i) al desarrollo del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje, (ii) a la mejora de la competencia matemática de los futuros docentes, especialmente, en lo relacionado con la resolución de problemas en situaciones contextualizadas y procedimientos de modelización matemática, (iii) a la dimensión social y cultural de las matemáticas y (iv) a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en lengua no materna. Esto se ha reflejado en publicaciones en revistas de impacto internacional, capítulos de libro y participación en proyectos de investigación a nivel nacional e internacional.

Elvira Fernández de Ahumada
Universidad de Córdoba, Córdoba, España.
g82feahe@uco.es
https://orcid.org/0000-0002-3371-5382
Doctora por la Universidad de Córdoba en el año 2008. Actualmente, es profesora del Departamento de Matemáticas de dicha Universidad, en el área de Didáctica de las Matemáticas. Sus líneas de investigación están dirigidas (i) al desarrollo del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje, (ii) a la mejora de la competencia matemática de los futuros docentes, especialmente, en lo relacionado con la resolución de problemas en situaciones contextualizadas y procedimientos de modelización matemática, (iii) al uso de los mundos virtuales inmersivos con fines educativos y (iv) a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en lengua no materna. Esto se ha reflejado en publicaciones en revistas de impacto internacional, capítulos de libro y participación en proyectos de investigación a nivel nacional e internacional.

UCM
UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Facultad
de Ciencias
Básicas