



**CiemaE UCM**

Centro de Investigación en  
Educación Matemática y Estadística  
Universidad Católica del Maule

# Formación del profesorado para enseñar estadística: retos y oportunidades



Editores:

**Audy Salcedo - Danilo Díaz-Levicoy**



FORMACIÓN DEL PROFESORADO PARA ENSEÑAR  
ESTADÍSTICA: RETOS Y OPORTUNIDADES



AUDY SALCEDO • DANILO DÍAZ-LEVICOY

EDITORES

FORMACIÓN DEL PROFESORADO PARA ENSEÑAR  
ESTADÍSTICA: RETOS Y OPORTUNIDADES



Facultad  
de Ciencias  
Básicas



**CiemaeUCM**  
Centro de Investigación en  
Educación Matemática y Estadística  
Universidad Católica del Maule

## CRÉDITOS

**Publicación del Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística.**

Directora: Dra. María Aravena Díaz.

**Formación del profesorado para enseñar estadística: retos y oportunidades.**

Editores: Audy Salcedo • Danilo Díaz-Levicoy.

ISBN: 978-956-6067-45-0

**Todos los capítulos que conforman el libro fueron seleccionados por arbitraje externo, mediante el sistema doble ciego.**

Diseño y diagramación: Audy Salcedo

Diseño de portada y contraportada: Luis A. Espinoza Sepulveda ([lespinoz@ucm.cl](mailto:lespinoz@ucm.cl))

Libro de acceso libre. Diciembre 2022

Este libro se distribuye bajo los términos de Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 - <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>), que permite cualquier uso no comercial, duplicación, adaptación, distribución y reproducción en cualquier medio o formato, siempre que dé el crédito apropiado al autor(es) original(es) y a la fuente.

Publicado por: Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística

Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Católica del Maule.

Campus San Miguel, Avenida San Miguel 3605, Talca, Chile.

Teléfono: +56 71 298 6000



# Contenido

Capítulo 0. La formación del profesorado que enseña estadística: una meta, diversos caminos ...	3
<i>Audy Salcedo, Danilo Díaz-Levicoy</i>	
Capítulo 1. Estadística cívica en la formación de profesores de matemáticas .....	21
<i>Joachim Engel, Achim Schiller, Laura Martignon</i>	
Capítulo 2. Estadística con proyectos: una propuesta para la formación del profesorado .....	47
<i>Jesús E. Pinto Sosa</i>	
Capítulo 3. Analysis of probabilistic tasks proposed in didactic resources for elementary and secondary education: some implications for teacher education .....	77
<i>Vincent Martin, Mathieu Thibault, Marianne Homier</i>	
Capítulo 4. Análisis factorial de una escala de actitudes hacia la estadística para profesores ....	105
<i>J. Alexandre Martins, Assumpta Estrada, Maria M. Nascimento</i>	
Capítulo 5. Enseñanza de la estadística en Chile con Lesson Study: innovaciones y buenas prácticas.....	137
<i>Soledad Estrella, Pedro Vidal-Szabó, Sergio Morales</i>	
Capítulo 6. Design ideas on primary teacher Education for teaching statistics – Exploratory insights from Germany.....	165
<i>Daniel Frischemeier</i>	
Capítulo 7. La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria: implicaciones para la formación del profesorado .....	189
<i>Claudia Vásquez, Ángel Alsina</i>	
Capítulo 8. La idoneidad didáctica como recurso en la formación del profesorado para enseñar estadística .....	215
<i>Carmen Batanero, María M. Gea, Pedro Arteaga, Gustavo R. Cañadas</i>	
Capítulo 9. Alfabetización estadística y evaluación: puntos de encuentro en la formación inicial docente .....	239
<i>Francisco Rodríguez Alveal, Ana Carolina Maldonado Fuentes</i>	

Capítulo 10. Propuesta evaluativa orientada a la formación del pensamiento estadístico en futuros profesores de matemática .....	265
<i>Liliana Tauber, Silvana Santellán</i>	
Capítulo 11. Conocimientos de profesores de bachillerato sobre un acercamiento informal a las pruebas de significación estadística .....	297
<i>Francisco Sepúlveda Vega, Ernesto A. Sánchez Sánchez</i>	
Capítulo 12. La conceptualización de la variable aleatoria en la formación de profesores de Uruguay .....	321
<i>Federico de Olivera, Luciana Olesker, Daniela Pagés</i>	
Capítulo 13. O raciocínio de professores de matemática sobre amostragem e argumentos persuasivos nas redes sociais .....	349
<i>Leandro de Oliveira Souza, Lorraine Silva Gonçalves, João Vitor Pires Vieira</i>	
Capítulo 14. Formación inicial de profesores de estadística en una perspectiva crítica .....	367
<i>Cindy Alejandra Martínez-Castro, Lucía Zapata-Cardona</i>	
Capítulo 15. Aulas de combinatória no ensino médio: trajetórias didáticas implementadas por um professor .....	385
<i>Cristiane de Arimatéa Rocha, Rute Elizbete de Souza Rosa Borba</i>	
Capítulo 16. La enseñanza de la estadística en el profesorado en matemática: algunos aportes para la formación .....	413
<i>Claudia Noemí Ferrari, Ana Rosa Corica</i>	
Capítulo 17. Dificultades de los profesores al resolver una situación problema de estadística .....	433
<i>Elizabeth Advincola, Augusta Osorio, Miluska Osorio</i>	
Capítulo 18. El uso curricular del programa tratamiento de la información en la formación estadística de futuros profesores de matemáticas .....	457
<i>Damian Alejandro Clemente Olague, Ana Luisa Gómez-Blancarte</i>	
Capítulo 19. Formación de profesores que enseñan estadística en Brasil: nuevos desafíos en el escenario pospandémico .....	483
<i>Cassio Cristiano Giordano, Fabiano dos Santos Souza, Paulo César Oliveira, Reinaldo Feio Lima</i>	

# LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO QUE ENSEÑA ESTADÍSTICA: UNA META, DIVERSOS CAMINOS

AUDY SALCEDO  
DANILO DÍAZ-LEVICOY

## RESUMEN

En este capítulo se presenta un panorama general respecto de la importancia de la estadística y de la probabilidad en la formación de los futuros ciudadanos, su incorporación en las directrices curriculares de diferentes países y, con ello, la necesidad de contar con profesores que posean sólidos conocimientos didácticos y disciplinares que aseguren el logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes. Además, se resumen marcos teóricos utilizados en Didáctica de la Estadística para estudiar el conocimiento de los profesores en formación y en activo. Se finaliza con la descripción de los 19 capítulos que conforman este libro.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento, estadística, probabilidad.

## LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD INGRESA A LA MATEMÁTICA ESCOLAR

La mayoría de los países incluyen contenidos de estadística y probabilidad como parte de la educación general que recibe todo futuro ciudadano. Batanero y Borovcnik (2016) señalan tres razones por la que esas áreas deben incluirse en la formación del ciudadano: (a) son esenciales para el razonamiento crítico; (b) tienen un rol instrumental en otras disciplinas, y (c) son fundamentales para la planificación y la toma de decisiones en muchas profesiones. La amplia variedad de aplicaciones de la estadística y su uso frecuente en la vida cotidiana, así como el desarrollo constante de las tecnologías de la información y la comunicación, ha llevado a que la mayoría de los países la incorporaren como parte de la educación general que recibe todo futuro ciudadano.

Además, Engel et al. (2021) señalan que las sociedades democráticas necesitan de ciudadanos que conozcan y comprendan críticamente la evidencia cuantitativa sobre temas como el bienestar social, económico, sanitario y los derechos civiles. Entonces, la estadística puede coadyuvar a la comprensión de los problemas de la sociedad moderna. La recomendación es que se enseñe desde los primeros grados de la educación básica obligatoria ya que se desea que el ciudadano alcance la alfabetización estadística (Ben-Zvi y Makar, 2016; Crites y St. Laurent, 2015).

Salcedo, A. y Díaz-Levicoy, D. (2022). La formación del profesorado que enseña estadística: una meta, diversos caminos. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 3-20). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

En la mayoría de los países, la estadística se encuentra en el currículo de matemática de primaria y secundaria, por lo cual maestros y profesores de esa área son los responsables de impartir los contenidos de probabilidad y estadística. Si bien la inclusión en el currículo de tópicos de estadística es más notoria en los últimos 20 años, desde hace varias décadas se ha recomendado su estudio en la secundaria y la primaria. Por ejemplo, de acuerdo con Barrantes y Ruiz (1998) durante la Segunda Conferencia Interamericana para la Enseñanza de la Matemática, realizada en 1966, se sugirió la inclusión de probabilidad y estadística elemental en los programas de matemática para la formación de los jóvenes de 15 a 18 años. Esa recomendación se ratificó en 1972, durante la Tercera Conferencia Interamericana para la Enseñanza de la Matemática, ampliándola con la incorporación de la inferencia estadística.

La recomendación fue acogida y la estadística comenzó a incluirse en los programas y planes de estudio de matemáticas de algunos países latinoamericanos, tal como lo reporta Santaló (1982) en el caso de la Educación Secundaria Argentina, desde 1967. Respecto de esa experiencia, indica que la enseñanza de la estadística en las escuelas secundarias no fue satisfactoria. La enseñanza se centra en el cálculo, aislados, sin la necesaria integración con otras partes del currículo y el resto del contenido de los cursos de matemáticas. Considera que hay acuerdo en la necesidad de enseñar estadística desde una etapa bastante temprana de la Educación Primaria. La duda es cómo y en qué medida deben presentarse a los estudiantes los conceptos y métodos estadísticos.

También en esos años, se incorporó a la estadística y la probabilidad en dos últimos años de la Educación Secundaria de Venezuela (Ministerio de Educación, 1972). Barrantes y Ruiz (1998) señalan que, durante la Tercera Conferencia Interamericana para la Enseñanza de la Matemática, la delegación venezolana indicó que los fines de la enseñanza de las matemáticas en esa etapa eran: el desarrollo de la capacidad de abstracción, comprensión de los fenómenos científicos e interpretación de sus efectos tecnológicos, preparación para la vida cotidiana y preparación para los estudios universitarios. Para lograrlo era necesario el estudio de: sucesiones, progresiones, funciones exponencial y logarítmica, vectores, funciones trigonométricas, números complejos, inducción, polinomios, inecuaciones, cónicas, matrices, determinantes, estadística, combinatoria, probabilidad. Como se puede apreciar, ya la estadística y la probabilidad se tenía como un instrumento útil para que el ciudadano comprendiera la sociedad donde le tocaría vivir. No se encontraron evaluación de la inclusión de la estadística en Venezuela, pero no es de extrañar que haya sido semejante al caso de Argentina, ya que, el enfoque en el cálculo era el predominante en esa época en la enseñanza de la matemática.

Antes de eso intentos de inclusión de la estadística y la probabilidad en la educación primaria y secundaria en Latinoamérica, otros países ya lo habían iniciado. Holmes (2002) reporta que la probabilidad y estadística se introdujo en el sistema escolar en Inglaterra en 1961 para estudiantes de 16 a 19 años que se especializaban en matemáticas. Era un curso opcional, casi siempre dictados por matemáticos y con frecuencia hacían hincapié en matemáticas y no en estadística, no desarrollaban un proceso de investigación estadística; por lo que los estudiantes lo encontraban poco útil. Holmes (2002) señala que, en esa década, también se llevó la estadística y la probabilidad a la Educación Primaria, donde se le recomendaba a los maestros hacer énfasis en la recopilación directa de datos, su representación gráfica y la elaboración de inferencias (elementales) a partir de los datos. Reporta que esas experiencias sugirieron que era posible comenzar a desarrollar ideas tempranas de probabilidad e inferencia, que los niños podían disfrutar y aprender la probabilidad la estadística y que la aprendían mejor si se estudiaba desde la práctica.

Sin embargo, al parecer hay indicios de que antes de Inglaterra, el estudio de la probabilidad y la estadística se introdujo en Francia y España. Meusnier (2006) afirma que en 1942 la probabilidad se estudió en la escuela secundaria francesa, mientras que Martín-Pliego y Santos Del Cerro (2006) indican que en 1945 se introdujeron temas de estadística en el currículo de matemática en la enseñanza primaria de España. Previa a esas referencias se encuentra, la de Nemetz (1982), quien señala que la teoría de las probabilidades se estudió en la escuela secundaria (Gymnasium) en Hungría. No obstante, Meusnier (2006) señala al Marqués de Condorcet (1743-1794) como el primero en proponer el estudio de la probabilidad. Condorcet, matemático, filósofo y politólogo francés, incluyó el estudio de las tablas de mortalidad, el azar, la teoría combinatoria y cálculo de probabilidades en una institución privada de Francia denominada *Le Lycée*. De acuerdo con Condorcet, la toma de decisiones en la práctica política está vinculada a la probabilidad, por lo tanto, si un ciudadano desea participar en política, es necesario que se inicie en ella. Dada su formación en probabilidad (por ejemplo, de 1795 es su *Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de las decisiones sometidas a la pluralidad de voces*), no es de extrañar que propusiera su estudio para todo ciudadano.

Son varias las personas e instituciones que, directa e indirectamente, han colaborado en la inclusión de la estadística como parte de la educación general y al desarrollo de la Educación Estadística. Por ejemplo, los trabajos de Piaget e Inhelder, Fischbein, Kahneman y Tversky, así como el aporte del grupo de estocástica del *Psychology of Mathematics Education*, la *International Statistical Institute*, la *American Statistical Association* y la *International Association for Statistical Education*, con sus conferencias sobre enseñanza de la estadística (*International Conference on Teaching Statistics*). No obstante, un punto

de inflexión fue recomendación de incorporar contenidos de probabilidad y estadística a la matemática de la Educación Primaria y Secundaria por parte del *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] en el documento *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics* (NCTM, 1989).

Ese documento presentó una visión completa de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas desde pre-escolar hasta el grado 12. En él se ratificaba a la resolución de problemas como el punto central de las Matemáticas escolares que apareció en documento *An Agenda for Action*, publicado en 1980 por el NCTM. No obstante, en el nuevo documento lo incluía como parte de los estándares de proceso, a saber: Resolución de problemas, Razonamiento y demostración, Comunicación, Conexiones y Representación. Además, definía los estándares de contenido, que especificaban los bloques que debían estudiarse durante toda la escuela: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad (NCTM, 1989). Sí bien, en los EUA no existe un sistema federal de Educación Primaria y Secundaria, este documento tuvo un fuerte impacto en el currículum oficial de muchos estados y presentó una visión que se siente hasta el presente (Scott, 2018). En particular, la aparición de *Análisis de datos y Probabilidad*, provocó su inclusión contenidos de estadística y probabilidad en el currículum de varios estados de EUA, pero también otros países comenzaron a considerarlo e incluirlo, ya no tan tímidamente como en décadas anteriores.

Shaugnessy (1992) señaló que la inclusión de estadística y probabilidad en los *Standards* del NCTM permitió concretar recomendaciones que se habían formulado en los diez años anteriores y que respaldaban por la introducción de temas de estocástica en las escuelas de EUA. Además, indicó que antes de ese documento, era poca la probabilidad o la estadística que se enseñaba en las escuelas, en consecuencia, poco era el interés por hacer la investigación sobre los problemas que los estudiantes tienen en aprenderlas. La investigación en educación matemática, en parte, está definida por lo que se enseña en las escuelas, por lo que al incorporar contenidos de estadística y probabilidad aumentó el interés por el aprendizaje y luego por la enseñanza de la estadística en distintas edades, como ha podido apreciar en las últimas décadas.

Apenas unos años después, se publicó el primer *Handbook* de investigación Educación Matemática, el *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Grows, 1992), donde se incluyó el capítulo Investigación en Probabilidad y Estadística: Reflexiones y Orientaciones (Shaugnessy, 1992). Allí se ofrece una visión global de los avances de la investigación en el aprendizaje y la enseñanza de la estocástica, así como algunas orientaciones de la investigación a desarrollar. Cuatro años después, se publicó el *International Handbook of Mathematics Education* (Bishop et al., 1996), que incluía los capítulos Manejo de datos (Shaugnessy et al., 1996) y Probabilidad (Borovcnik y Peard,

1996). La inclusión de estadística y probabilidad en el currículum de matemáticas desde pre-escolar hasta el grado 12, fue ratificado y ampliado en *Principles and standards for school Mathematics* (NCTM, 2000). Todo lo anterior es muestra de la aceptación de la probabilidad y la estadística como parte de la Educación Matemática y más específicamente de la matemática escolar. Es lo que Batanero (2001), denomina la especificidad de la estadística dentro de la Educación Matemática, aunque posteriormente la Educación Estadística logró su propio espacio como campo de producción de conocimientos, formalizado con la publicación del *International Handbook of Research in Statistics Education* (Ben-Zvi et al., 2018).

Tal como indicó Shaughnessy (1992) auguró, aumentó la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad, pero también cómo los estudiantes aprenden a pensar y razonar en estocástica, surgieron propuestas didácticas desde distintos referentes teóricos, se discutieron constructos como cultura, razonamiento y pensamiento estadístico, entre muchos temas de investigación. Pero también creció el interés por el profesor de matemática, tanto en activo como en formación, por ser el responsable de la enseñanza de la estadística en la primaria y secundaria.

### **EL PROFESOR DE MATEMÁTICA QUE ENSEÑA ESTADÍSTICA**

El éxito de cualquier cambio en la educación depende de manera importante de los profesores, su formación, sus concepciones, actitudes y disposición a llevar adelante dichos cambios. Eso le otorga un papel relevante a la formación y actualización de profesores ante, por ejemplo, el reto de enseñar estadística.

Cuando se habla de formación de profesores, los trabajos de Shulman (1986, 1987) son un referente. Para caracterizar el conocimiento del profesor, inicialmente recurrió a tres categoría (Shulman, 1986), que luego amplió a siete: (a) conocimiento del contenido; (b) conocimiento pedagógico general, con énfasis en los principios generales y estrategias de gestión de aula y organización; (c) conocimiento del currículum, especialmente lo referido a la comprensión, de materiales y programas que sirven como “herramientas del oficio” para los profesores; (d) conocimiento pedagógico del contenido; (e) conocimiento de los estudiantes y sus características; (f) conocimiento de los contextos educativos, que va desde el trabajo del grupo o clase, hasta la administración y financiamiento escolar en distintas comunidades y culturas; (g) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación, así como de sus fundamentos históricos y filosóficos (Shulman, 1987, p. 8). Es lo que se conoce como Modelo Pedagogical Content Knowledge (PCK). Investigadores interesados en la formación de profesores prestaron atención a los trabajos de Shulman, no obstante, pronto observaron que el PCK no es un modelo único e igual para todas las áreas de conocimiento,

ni para todos los docentes de un área temática determinada. Surgió la necesidad de desarrollar sus propios modelos.

En el caso de la formación del profesor de matemáticas, un grupo de investigadores (Ball, 2000; Ball et al., 2001; Ball et al., 2008; Hill et al., 2008) proponen el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching, MKT*), el cual definen como el “conocimiento matemático necesario para llevar a cabo las tareas recurrentes de enseñar matemáticas a los estudiantes” (Ball et al., 2008, p. 399). El MKT está compuesto por el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, cada uno de ellos tienen tres subcomponentes.

Los trabajos de Ball y colaboradores, fue continuada por otros investigadores. Por ejemplo, Schoenfeld y Kilpatrick (2008), quienes proponen la noción de proficiencia (*proficiency*) en la enseñanza de las matemáticas. Esta noción es entendida como la competencia profesional del profesor de matemáticas para ejercer una enseñanza de calidad. Por su parte, Godino (2009) se apoya en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) para proponer el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). El modelo incluye seis facetas para analizar los conocimientos que el profesor de matemática debe poner en juego como organizador y gestor de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK) es una propuesta de otro grupo de investigadores (Carrillo et al., 2013; Flores et al., 2013; Montes et al., 2013, Carrillo et al., 2022). Este modelo está compuesto por tres categorías: conocimiento del contenido matemático, conocimiento pedagógico del contenido y las creencias de los profesores acerca de las matemáticas y su enseñanza.

Por otra parte, Zopf (2010) y Kim (2012) han llamado la atención sobre la necesidad de investigar sobre la tarea de enseñar el conocimiento matemático para la enseñanza a futuros profesores. Por ejemplo, Zopf (2010) introduce el constructo Conocimiento Matemático en la Formación de Profesores de Matemática (*Mathematical Knowledge for Teaching Teachers*) y lo define como el conocimiento matemático utilizado en el trabajo de enseñar matemática a los futuros profesores.

Todos estos modelos reconocen la importancia de la matemática en la formación del profesorado que enseña esa disciplina, pero al agregar otros componentes, dejan claro que solo el conocimiento de la matemática no basta para que lograr la competencia profesional. El propósito de estos modelos es tener un marco que pueda ser usado en la formación de los profesores de matemática, lo cual incluye la preparación para la enseñanza de la estadística, que tiene unas características distintas al resto de los tópicos que le corresponde enseñar. Al respecto, Groth (2007) señala que los

investigadores deben ser cuidadosos en distinguir entre los conocimientos profesionales necesarios para enseñar matemática y los que se necesitan para la enseñanza de la estadística, ya que la matemática y la estadística son disciplinas distintas. Por razones como esas ha llevado a los investigadores a preguntarse ¿cuáles conocimientos necesitan los profesores de matemática para enseñar estadística?

La investigación sobre el conocimiento del profesor de matemática para enseñar estadística todavía incipiente y la mayoría sobre la base de los trabajos desarrollados desde la Educación Matemática, aunque también consideran trabajos propios de la Educación Estadística. Por ejemplo, sobre la base del *MKT* de Ball y sus colaboradores y el marco de pensamiento estadístico propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), Burgess (2006) propone un modelo sobre conocimiento estadístico para la enseñanza (Statistical Knowledge for Teaching - SKT). Señala que el trabajo cotidiano del docente cuando enseña estadística a través de investigaciones es esencialmente estadístico, por lo que lo considera una vía plausible para desarrollar el SKT.

Con base en el CDM y el EOS, Godino et al. (2011) proponen seis facetas para definir el conocimiento profesional de la enseñanza de la estadística. Indican que el profesorado debe desarrollar deben estar en capacidad de reconocer los objetos estadísticos, los procesos que intervienen en las prácticas estadísticas de los estudiantes, conocer las normas que apoyan y condicionan su aprendizaje, los recursos y las interacciones en el aula. Destacan la especificidad de la estadística y la necesidad del conocimiento del estudiante, sus actitudes, emociones y motivaciones en relación con el contenido. Sugieren el uso de Proyectos estadísticos para desarrollar el SKT.

Groth (2013, 2017) también recurrió a marcos conceptuales de la matemática y los combinó con datos empíricos para teorizar sobre los procesos que intervienen en la transformación de los conocimientos de estadística en los individuos en formas útiles para la enseñanza. Señala que los profesores necesitan saber cómo hacer que la estadística sea comprensible para los estudiantes, así como también comprenderla para ellos mismos. En ese sentido, el conocimiento de la estadística y de los estudiantes es un predecesor del desarrollo del conocimiento estadístico para la enseñanza. En consecuencia, los profesores deben comprender las necesidades de aprendizaje de los alumnos para diseñar y seleccionar los métodos de enseñanza adecuados para abordarlas. Al igual que Burgess (2006), sugiere involucrar a los maestros en la investigación, participando en su diseño, implementación y análisis. Recalca que, en este proceso, los formadores del profesorado deben tener el tiempo necesario para involucrarse profundamente con los docentes durante la experiencia.

Vidal-Szabó y Estrella (2020) destacan la independencia de la Educación Estadística frente a la Educación Matemática por lo que consideran pertinente precisar un modelo que extienda el modelo

MTSK a la estadística. Proponen el constructo Conocimiento Especializado del Profesor de Estadística (STSK, Statistics Teachers Specialised Knowledge), el cual debe considerar las “concepciones que posee el profesorado, respecto a la estadística, a su enseñanza y su aprendizaje en el ámbito de la educación primaria, pues esto permitiría progresar en el conocimiento especializado del profesorado en el área de la estadística escolar en tanto se aborden ciertas dificultades de índole epistemológica, cognitiva o didáctica” (p. 7). Vidal-Szabó y Estrella (2021) vinculan el MTSK con la taxonomía SOLO con el ánimo de seguir profundizando en el STSK.

Los trabajos antes mencionados son solo algunos de los que se dedican esfuerzos para definir el conocimiento estadístico para la enseñanza, sus relaciones y los mecanismos mediante los cuales se puede desarrollar (Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018). Para Batanero et al. (2011) la formación de los profesores para enseñar estadística es un tema fundamental de investigación en Educación Estadística. Es por ello que en este libro se plantea compilar diversas perspectivas sobre la formación de profesores para enseñar estadística.

## LOS CAPÍTULOS

El libro *Formación del profesorado para enseñar estadística: Retos y Oportunidades*, tiene por objetivo compilar investigaciones de autores, de diversos países, sobre los problemas en la formación de profesores para enseñar estadística y probabilidad, así como propuesta solventar las dificultades identificadas. Son 19 los capítulos que conforman el libro y ofrecen distintas miradas al tema de la formación de profesores para enseñar estadística. A continuación, se encuentra una breve descripción de cada capítulo.

El [Capítulo 1](#) fue escrito por Joaquín Engel, Achim Schiller y Laura Martignon, quienes presentan una propuesta de formación estadística de profesores desde la Estadística Cívica. Los autores parten un curso de introducción a la estadística para futuros profesores de secundaria logren la comprensión de esta, apoyándose el estudio de situaciones de la sociedad actual. La idea es desarrollar el conocimiento del contenido estadístico y pedagógico y aprendan a procesar y reflexionar sobre la información estadística que los circunda, a partir del estudio de temas actuales y relevantes. El estudio de situaciones reales desde interdisciplinariedad, debe ayudar al pensamiento crítico, la tomar decisiones informadas sobre la base de la evidencia, como ciudadanos responsables. Todo ello aprovechando las posibilidades que brinda la tecnología para centrarse en conceptos estadísticos y no en los cálculos. En el capítulo, los autores ofrecen destalles del curso, así como indicaciones para desarrollar que los formadores de profesores puedan desarrollar sus propios recursos de enseñanza desde la Estadística Cívica.

El [Capítulo 2](#) también es una propuesta de formación de profesores, esta vez desde la enseñanza por proyectos. Jesús Pinto, de la Universidad Autónoma de Yucatán, México, parte de la idea del pensamiento estadístico, así como otras propuestas desarrolladas de la Educación Estadística para presentar un taller que podría servir como estrategia didáctica en la profesionalización docente. La propuesta se fundamenta en cuatro principios curriculares que guiaron tanto el diseño como su implementación: (a) Reflexión de la práctica, (b) Enfoque de profesionalización basado en la modalidad de taller (c) Comunidad de práctica y (d) Perspectiva crítica. En el capítulo se relata parte de la experiencia acumulada hasta ahora en el desarrollo del taller *Enseñar estadística en la escuela a través de proyectos*.

El [Capítulo 3](#) fue escrito por los profesores Vincent Martin, Mathieu Thibault y Marianne Homier de Canadá y donde abordan la enseñanza de la probabilidad. Ellos analizan las actividades propuestas en libros de texto y cuadernos de trabajo, así como actividades en línea, con el objetivo de caracterizarlas. Destacan el uso de los libros de texto tanto en primaria como en secundaria al momento de enseñar matemáticas y particularmente probabilidad. Es por ello que se plantean establecer las características de las tareas probabilísticas propuestas en los recursos didácticos utilizados en Québec, sobre la base de cuatro unidades de análisis: los enfoques probabilísticos, las representaciones matemáticas, los manipulativos y los tipos de contextos. Desde la perspectiva del análisis realizado, los autores exponen algunas implicaciones para la formación del profesorado en la enseñanza de la probabilidad.

La medición y caracterización de la actitud de los profesores hacia la estadística es el tema del [Capítulo 4](#). Los profesores J. Alexandre Martins (Portugal), Assumpta Estrada (España) y Maria M. Nascimento (Portugal), presenta el análisis factorial de la Escala de Actitudes hacia la Estadística sobre la base de una muestra de 1098 profesores del 1º y 2º ciclo de la Educación Básica portuguesa. Señalan que es necesario conocer las actitudes de los profesores, así como los factores que influyen en ellas, ya que ese conocimiento puede ser de ayuda para planificar acciones la formación estadística de manera más específica, asertiva y adecuada.

En el [Capítulo 5](#) se presenta un modelo de Lesson Study para la enseñanza de la estadística. En particular, en este trabajo escrito por los profesores Soledad Estrella, Pedro Vidal-Szabó y Sergio Morales de Chile, busca analizar los ciclos de anticipación, acción y reflexión que manifiestan los profesores en grupos de Lesson Study, al trabajar temas de análisis exploratorio de datos e inferencia estadística. Se trata de una investigación cualitativa desarrollada desde el Instituto de Matemática de la

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, que reporta evidencias sobre las potencialidades del Estudio de Clase para una mayor comprensión del contenido estadístico y su didáctica.

Desde Alemania, Daniel Frischemeier, relata su experiencia en la formación de futuros profesores de primaria. Este [Capítulo 6](#), se presentan los diferentes conceptos en los que se basan estos cursos y su justificación, así como el diseño de ideas específicas para desarrollar el pensamiento estadístico de los futuros profesores, pero a la vez prepararlos para la enseñanza de la estadística. Expone la experiencia lograda con dos grupos, no comparables, cuyas enseñanzas pueden ser de utilidad para comprender cómo desarrollar un curso de estadística para futuros maestros de primaria de tal manera que puedan desarrollar y mejorar la comprensión de la estadística, pero, además, comprendan cómo los planes de estudio, la tecnología y las secuencias de actividades contribuyen a la construcción de los conceptos de los estudiantes.

En el [Capítulo 7](#), Claudia Vásquez (Chile) y Ángel Alsina (España), caracterizan las orientaciones curriculares para el abordaje de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil y Educación Primaria en Chile y España. Indagan sobre la presencia de las ideas fundamentales de la estocástica en los currículos de los dos niveles considerados, específicamente, cómo se desarrollan y profundizan. A partir de este análisis, reflexionan sobre los conocimientos didácticos y disciplinares deben tener el profesorado de manera que pueda diseñar tareas que propicien el desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde la Educación Infantil.

El [Capítulo 8](#) fue escrito por Carmen Batanero, María M. Gea, Pedro Arteaga y Gustavo R. Cañadas, de la Universidad de Granada de España. En él presentan la experiencia de la formación de un grupo de profesores de Máster en temas de estadística descriptiva, sobre la base del proyecto estadístico. A los estudiantes se le pide analizar la idoneidad didáctica del proceso de estudio de la estadística, además de evaluar y desarrollar su conocimiento especializado de la estadística. Los autores analizan las respuestas de los estudiantes y definen los niveles alcanzados en su trabajo, así como evaluar la faceta epistémica de su conocimiento. Señalan que, el modelo trabajado podría ser utilizados por los participantes con sus futuros estudiantes para mejorar su cultura estadística. Así mismo, el análisis de la idoneidad didáctica puede ser usado por el profesorado como un recurso de apoyo en la planificación y mejora de su propia enseñanza futura.

Desde Chile, llega el [Capítulo 9](#) escrito por Francisco Rodríguez Alveal y Ana Carolina Maldonado Fuentes y su objetivo fue indagar sobre las habilidades, conceptos y procedimientos usados para evaluar los conocimientos de las asignaturas de Estadística, que se dictan en la carrera de

Pedagogía en Educación Matemática. Encuentran limitaciones en los instrumentos de evaluación utilizados e invitan a seguir indagando en este importante aspecto de la Educación Estadística.

Las profesoras Liliana Tauber y Silvana Santellán, de la Universidad Nacional del Litoral de Argentina, escriben el [Capítulo 10](#) y presentan la implementación de una propuesta evaluativa centrada en el desarrollo de investigaciones estadísticas. Es una propuesta diseñada específicamente para la formación estadística del profesorado en matemáticas y para apoyarla, presentan la experiencia de su utilización en un curso de estadística. El análisis de contenido de las producciones de los estudiantes sugiere la presencia de relaciones entre distintos elementos de alfabetización estadística y las dimensiones del pensamiento estadístico; además de desarrollar investigaciones estadísticas con coherencia metodológica, donde muestran diferentes habilidades de pensamiento crítico.

El [Capítulo 11](#) fue escrito por los profesores Francisco Sepúlveda Vega y Ernesto A. Sánchez Sánchez, de México, y en él presentan una experiencia de actualización de profesores activos, mediante un curso en línea. En ese curso se aborda las pruebas de significación, un tema de poca presencia en investigaciones sobre el profesorado de Educación Primaria y Secundaria. El grupo de profesores participantes mostraron deficiencias tanto en el conocimiento del contenido, como en el pedagógico, además de dificultades para adoptar el enfoque con tecnología. A partir de la experiencia, los autores reflexionan sobre el curso y a propia formación estadística de profesores.

Los profesores Federico De Olivera, Luciana Olesker y Daniela Pagés de Uruguay, son los autores del [Capítulo 12](#) y en él exponen los resultados de una investigación sobre el concepto de variable aleatoria. A un grupo de futuros profesores de matemática se les pidió responder un cuestionario diseñado sobre la base de las dificultades reportadas por la investigación sobre la comprensión del concepto de variable aleatoria. Los resultados encontrados son insumos para la enseñanza sobre el concepto de variable aleatoria, que a su vez sirva de apoyo en su futuro desempeño profesional.

El razonamiento de profesores de matemática sobre muestreo lo abordan en el [Capítulo 13](#) los profesores Leandro de Oliveira Souza, Lorraine Silva Gonçalves y João Vítor Pires Vieira (Brasil). Conociendo que los medios de comunicación social tradicionales, así como las redes sociales, son utilizadas para difundir informaciones que en ocasiones son manipuladas, los autores plantean un estudio para identificar la forma en que los docentes razonan sobre el muestreo, el azar, la aleatoriedad y la ley de los grandes números. Los resultados plantean diversas interrogantes para la Educación Estadística en cuanto a la formación del profesorado.

En el [Capítulo 14](#) se presenta otra experiencia de formación de profesores de matemáticas para la enseñanza de la estadística. Desde Colombia, las profesoras Cindy Alejandra Martínez-Castro y Lucía Zapata-Cardona, se apoyan en temas como: calentamiento global, valor adquisitivo del salario mínimo en Colombia, desnutrición y obesidad en América Latina y el Caribe, e inequidad de género en Colombia; para proponer investigaciones estadísticas que estimulen el desarrollo de la conciencia crítica de los futuros profesores. Ellas relatan la experiencia y analizan las producciones de los participantes en la realización de las tareas propuestas. Consideran que la experiencia es positiva, que puede ser de ayuda para el desarrollo del razonamiento estadístico y con ello reconocer el carácter político de la estadística y al asumirla como una poderosa herramienta para la participación y transformación social

Las profesoras Cristiane de Arimatéa Rocha y Rute Elizbete de Souza Rosa Borba, de Brasil, escriben el [Capítulo 15](#), donde se aborda el tema de la combinatoria en la escuela secundaria. Apoyadas en el Enfoque Ontosemiótico, se analizan las trayectorias didácticas seguidas en seis lecciones sobre combinatoria en la Educación Secundaria, para clasificar las dimensiones epistémica, docente y estudiantil. Consideran que el desarrollo del razonamiento combinatorio requiere de prácticas que prioricen el uso y la comparación de diferentes procedimientos, no centrarse en tipos de problemas y técnicas de conteo. Llamam la atención sobre la importancia de la argumentación en situaciones de combinatoria.

Apoyadas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, las profesoras Claudia Noemí Ferrari y Ana Rosa Corica (Argentina), analizan el diseño curricular y el trabajo de profesores que enseñan estadística a estudiantes de profesorado en matemática. Reportan que lo analizado las lleva a pensar que se ofrece una visión acotada de la estadística, centrada en el análisis univariado y con ausencia de tareas fundamentales en el trabajo estadístico. Cierran el [Capítulo 16](#) con un ejemplo de problema para el estudio de la estadística, donde es necesario transitar las distintas fases de una investigación estadística y recorrer diversas praxeologías estadísticas según las necesidades del estudio, que podría usarse en la formación de profesores.

En esa misma vía de los problemas de estadística, las profesoras Elizabeth Advincula, Augusta Osorio y Miluska Osorio, de Perú, estudian las dificultades que experimentan los profesores de matemática al resolver una situación problema de estadística. El [Capítulo 17](#), las autoras exponen una experiencia que formó parte del trabajo de formación continua propuesto para profesores de educación secundaria. En particular, se presenta el período donde los profesores tuvieron un primer contacto con la estrategia del ciclo PPDAC, para posteriormente aplicarlo en la resolución de una

situación problema. Desde el análisis de la producción de los profesores participantes, identifican las principales dificultades, posibles referencias para la formación de profesores para la enseñanza de la estadística.

El [Capítulo 18](#) presenta un análisis curricular de una de asignatura donde se estudiaba estadística en una Escuela Normal de México. Se trata de un estudio reportado por los profesores Damián Alejandro Clemente Olague y Ana Luisa Gómez-Blancarte y buscan ofrecer una perspectiva de la formación estadística que reciben los futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Se apoyan en una investigación documental y en la observación, para analizar las cuatro fases de uso del programa: currículo escrito, currículo intencionado, currículo ejecutado y aprendizaje de los alumnos. Apoyados en los resultados del análisis, los autores hacen recomendaciones respecto a la formación estadística de los futuros profesores.

Por último, en el [Capítulo 19](#), los profesores Cassio Cristiano Giordano, Fabiano Dos Santos Souza, Paulo César Oliveira y Reinaldo Feio Lima, analizan los desafíos que ha planeado el escenario pospandémico para la formación de profesores que enseñan estadística en Brasil. Con el objetivo de evaluar la de cómo perciben los docentes en formación y en activo, su formación para enseñar Estadística, considerando el contexto pandemia/post-pandemia. Reportan las diversas fortalezas y debilidades que distinguen los docentes en su formación para enseñar estadística. Todos insumos que se pueden considerar los formadores de formadores.

### **A MODO DE CIERRE**

Uno de los factores que atenta contra la enseñanza efectiva de la estadística es la preparación de los profesores de matemáticas (Garfield, 1988; Shaughnessy, 1992; Shaughnessy et al., 1996). Esa sospecha aún se mantiene, diversas investigaciones reportan las dificultades que tiene el profesorado para la comprensión de las ideas estadísticas fundamentales. Por ejemplo, Batanero et al. (2011) hacen un balance de esas dificultades, las cuales no excluyen prácticamente ningún tema de estadística o probabilidad. Investigaciones más recientes dan cuenta de problemas en inferencia (López-Martin et al., 2019), probabilidad (Rodríguez-Alveal y Díaz-Levicoy, 2020), gráficos estadísticos (Díaz-Levicoy et al., 2021, Souza y Monteiro, 2020), por solo nombrar tres tópicos.

No hay duda que a nivel internacional ha aumentado la investigación sobre la formación estadística de los profesores, no obstante, el tema aún prioritario y uno de los aspectos a considerar es el análisis de las propuestas instruccionales, en sus diferentes facetas (Batanero, 2019), si se desea mejorar la Educación Estadística en los próximos años.

Este libro fue pensado para ser útil a los investigadores en Educación Estadística, con la esperanza de generar más investigación sobre la formación de profesores de matemáticas que enseñan estadística en diferentes niveles de educación. Pero también puede ser de utilidad para los formadores de profesores, de tal manera que los ayuden a desarrollar los conocimientos necesarios para enseñar estadística en el momento que le corresponda. Es importante cerrar agradeciendo a los autores, quienes apoyaron la idea del libro con sus trabajos.

### Agradecimientos

Audy Salcedo agradece el apoyo del Institute of International Education's Scholar Rescue Fund (IIE-SRF).

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). American Educational Research Association.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it so special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Barrantes, H. y Ruiz, Á. (1998). *Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática*. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2019). Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-15). Grupo FMQ126.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam, Sense Publishers.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/LASE study*. Springer.
- Ben-Zvi, D. y Makar, K. (2016). International perspectives on the teaching and learning of statistics. En: D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.). *The Teaching and Learning of Statistics. International Perspectives* (pp. 1-10). Springer.
- Ben-Zvi, D., Makar, K. y Garfield, J. (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education* Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_4)
- Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Springer.
- Borovcnik, M. y Peard, R. (1996). Probability. En: A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, Colette Laborde. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer.
- Burgess, T. A. (2006). A framework for examining teacher knowledge as used in action while teaching statistics. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings*

*of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, IASE.  
[www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications) .

- Díaz-Levicoy, D., Samuel, M. y Rodríguez-Alveal, F. (2021). Conocimiento especializado sobre gráficos estadísticos de futuras maestras de educación infantil. *Formación Universitaria*, 14(5), 29-38.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of CERME8* (pp. 2985–2994). Middle East Technical University.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2022). Una trayectoria de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas: del grupo SIDM a la Red Iberoamericana MTSK. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 2(2), e202204. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.41>
- Crites, T. y St. Laurent, R. (2015). *Putting essential understanding of statistics into practice in grades 9–12*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Engel, J., Ridgway, J. y Weber Stein, F. (2021). Educación Estadística, Democracia y Empoderamiento de los Ciudadanos. *Paradigma*, 41(e1), 01-31. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p01-31.id1016>
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive source of probability thinking in children*. Reidel.
- Flores, E., Escudero, D. I. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialized content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of CERME8* (pp. 3055–3064). Middle East Technical University
- Garfield, J. B. (1988). *Obstacles to effective teaching of probability and statistics*. National Council of Teachers of Mathematics 66th Annual Meeting.
- Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2011). Models for Statistical Pedagogical Knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*, (pp. 271- 282), Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_27)
- Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 20, 13-31.
- Groth, R. E. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 427-437.
- Groth, R. E. (2013). Characterizing key developmental understandings and pedagogically powerful ideas within a statistical knowledge for teaching framework. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(2), 121-145. <https://doi.org/10.1080/10986065.2013.770718>
- Groth, R. E. (2017). Developing statistical knowledge for teaching during design-based research. *Statistics Education Research Journal*, 16(2), 376-396. [https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ16\(2\)\\_Groth.pdf](https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ16(2)_Groth.pdf)
- Groth, R. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on Statistics Teachers' Cognitive and Affective Characteristics. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 327-355). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_4)
- Grows, D.A (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Mc Millan.

- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: an exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Holmes, P. (2002). Some lessons to be learned from curriculum developments in statistics. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*. ISI. <https://n9.cl/pj2iq>
- Kim, Y. (2013). *Teaching mathematical knowledge for teaching: Curriculum and challenges*. Tesis doctoral University of Michigan. [https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/97937/kimyeon\\_1.pdf](https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/97937/kimyeon_1.pdf)
- López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(64), 672-693. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a11>
- Martín-Pliego, F.J. y Santos Del Cerro, J. (2006). A historical approach to statistics teaching in Spain. En: *Journ@l'électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique* 2(2), 1-13.
- Meusnier, N. (2006). Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques. En: *Journ@l'électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique* 2(2), 1-20.
- Ministerio de Educación (1972). *Programas de estudio de 1º y 2º año de Ciencias*. Ministerio de Educación.
- Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MSTK: from common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of CERME8* (pp. 3185–3194). Middle East Technical University.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. NCTM.
- Nemetz, T. (1982) Pre-University Stochastics Teaching in Hungary. En V. Barnett, (Ed.). *Teaching Statistics in Schools throughout the World* (pp. 85-112). ISI.
- Rodríguez-Alveal, F. y Díaz-Levicoy, D. (2021). Análisis de resultados de futuros profesores de matemática en los contenidos estadísticos y probabilísticos de la evaluación nacional diagnóstica. *Paradigma*, 41(e1), 142-164. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p142-164.id1021>
- Santaló, L.A. (1982) Teaching Statistics in Schools in Argentina. En V. Barnett (Ed.). *Teaching Statistics in Schools throughout the World* (pp. 225-227). ISI.
- Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.). *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers.
- Scott, P. (2018). Reformas de los currículos escolares en Matemáticas en las Américas: el caso de los Estados Unidos de América. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 13 (17), 143-151. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/34370>
- Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. En D.A Grows (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 315-426). Mc Millan.

- Shaughnessy, J.M., Garfield, J. y Greer B. (1996). Data Handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, (v.1, pp. 205-237). Springer.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Souza, J. de y Monteiro, C. E. F. (2020). Compreensões sobre gráficos por professores de escolas no campo. *Zetetike*, 28, e020005. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8657061>
- Vidal-Szabó, P. y Estrella, S. (2020). Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico. En y. Morales-López y á. Ruíz (Eds.). *Educación Matemática en las Américas 2019* (pp. 1036-1042). Comité Interamericano de Educación Matemática. <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/692/327>
- Vidal-Szabó, P. y Estrella, S. (2021). Conocimiento Estadístico Especializado en Profesores de Educación Básica, basado en la taxonomía SOLO. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(4), 134–148. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.81>
- Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.
- Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education*. Tesis doctoral University of Michigan. [https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/77702/dzopf\\_1.pdf](https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/77702/dzopf_1.pdf)

## STATISTICS TEACHER EDUCATION: ONE GOAL, DIFFERENT PATHS

### ABSTRACT

This chapter presents an overview of the importance of statistics and probability in the education of future citizens, its incorporation in the curricular guidelines of different countries and, thus, the need for teachers with solid didactic and disciplinary knowledge to ensure the achievement of learning by students. In addition, theoretical frameworks used in Statistics Didactics to study the knowledge of trainee and practicing teachers are summarized. It ends with a description of the 19 chapters that make up this book.

Keywords: teacher education, knowledge, statistics, probability.

## A FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINA ESTATÍSTICAS: UMA META, VÁRIOS CAMINHOS

### RESUMO

Este capítulo apresenta uma visão geral da importância da estatística e da probabilidade na educação dos futuros cidadãos, sua incorporação nas diretrizes curriculares de diferentes países e, com isso, a necessidade de professores com fortes conhecimentos didáticos e disciplinares para garantir a realização do aprendizado dos alunos. Além disso, são resumidas as estruturas teóricas utilizadas na Didática da Estatística para estudar os conhecimentos dos professores estagiários e praticantes. Ele termina com uma descrição dos 19 capítulos que compõem este livro.

Palavras-chave: formação de professores, conhecimento, estatística, probabilidade.

*AUDY SALCEDO*

*Univeridad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela*

*Universidad Católica del Maule, Talca, Chile*

[audy.salcedo@gmx.com](mailto:audy.salcedo@gmx.com)

<https://orcid.org/0000-0002-9783-8509>

Profesor Titular del Departamento de Estadística Aplicada a la Educación, Escuela de Educación, Universidad Central de Venezuela. Profesor invitado del Doctorado en Educación Universidad Andrés Bello, Venezuela. Profesor invitado del Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística; Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Católica del Maule (Talca, Chile), con el apoyo del Institute of International Education's Scholar Rescue Fund (IIE-SRF).

*DANILO DÍAZ-LEVICOY*

*Universidad Católica del Maule, Talca, Chile*

[ddiazl@ucm.cl](mailto:ddiazl@ucm.cl)

<https://orcid.org/0000-0001-8371-7899>

Profesor de Matemática y Computación (ULAGOS). Máster en Didáctica de la Matemática (UGR). Doctor en Ciencias de la Educación (UGR). Académico Departamento de Matemática, Física y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule. Miembro del Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule (UCM). Línea de Investigación: Didáctica de la Matemática y la Estadística.

# ESTADÍSTICA CÍVICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

JOACHIM ENGEL  
ACHIM SCHILLER  
LAURA MARTIGNON

## RESUMEN

En este capítulo se describe y se analiza un curso para futuros profesores de matemáticas de secundaria diseñado para proporcionar mayor habilidad y confianza en la comprensión de las estadísticas sobre las tendencias y los cambios actuales o previstos en la sociedad. Describe un nuevo tipo de curso de introducción a la estadística centrado en la Estadística Cívica. El curso tiene como objetivo desarrollar el conocimiento del contenido estadístico con respecto a la Estadística Cívica, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, el conocimiento contextual, así como las competencias pedagógicas relacionadas con la materia y las competencias tecnológicas. Un reto específico es conseguir que los estudiantes que se especializan en matemáticas, se comprometan con temas sensibles y controvertidos de un punto de vista sociopolítico, y que reflexionen sobre estos temas desde una perspectiva instructiva y educativa.

Palabras clave: Estadísticas cívicas, preparación del profesorado, SRLE, evaluación, desarrollo profesional, pensamiento crítico

## INTRODUCCIÓN

Pocos profesores de matemáticas o ciencias sociales adquieren una formación para enseñar estadística. Como resultado, cuando llegan a las partes de estadística siguiendo un plan de estudios nacional, los profesores se quedan en una zona confortable subrayando el uso de una limitada gama de técnicas y cálculos estadísticos (matemáticos) o no se comprometen con las ideas estadísticas en absoluto (ciencias sociales). En particular, prestan muy poca atención al trabajo y a la comprensión de datos multivariados característicos de las tendencias sociales, al análisis e interpretación de dichos datos y a la comunicación sobre su significado (Batanero et al., 2011, 2013; Ridgway, 2015). De ahí que este capítulo aborde cuestiones relativas a la preparación y el desarrollo profesional del profesorado. Este capítulo describe y analiza un nuevo tipo de curso, diseñado para futuros profesores de secundaria con el fin de proporcionar habilidad y confianza en la comprensión de las estadísticas sobre las tendencias, las brechas y los cambios actuales o proyectados en la sociedad, basado en el marco conceptual de la Estadística Cívica (Engel, 2019; Gal et al., 2022). El curso afronta el triple reto de combinar el aprendizaje estadístico y sociopolítico con el aporte de conocimientos sobre la

pedagogía de la enseñanza de la estadística. Ha sido probado con estudiantes que se preparan para ser profesores de matemáticas de secundaria y que no han tomado una clase de estadística antes. El curso no presupone ningún conocimiento en estadística más allá de la escuela secundaria, por lo que también puede ser adecuado para los estudiantes que se especializan en campos distintos de las matemáticas. De hecho, una variante de este curso se ha impartido en una clase interdisciplinar ofrecida conjuntamente a estudiantes que se preparan para ser profesores de matemáticas o de ciencias políticas.

### OBJETIVOS DEL CURSO

El curso tiene como objetivo desarrollar el conocimiento del contenido estadístico y pedagógico con respecto a la Estadística Cívica, el pensamiento crítico y el conocimiento del contexto interdisciplinar, así como las competencias pedagógicas relacionadas con la materia y las competencias tecnológicas. El objetivo primordial del curso es que los estudiantes aprendan a procesar y reflexionar sobre la información estadística acerca de temas relevantes para la sociedad y que desarrollen su capacidad para tomar decisiones informadas por la evidencia como ciudadanos responsables - en resumen, fomentar sus habilidades en Estadística Cívica. Un reto especial es conseguir que los estudiantes que se especializan en matemáticas se involucren en temas sociopolíticamente sensibles y controvertidos y reflexionen sobre estos temas desde una perspectiva instructiva y educativa.

Como futuros profesores, los estudiantes deben reflexionar sobre el uso de los materiales y el potencial de utilizar datos multivariados socialmente relevantes, en la educación secundaria. El interés por los temas socialmente relevantes (desigualdad económica, migración, cambio climático, ...) y, en particular, su uso en la enseñanza de las matemáticas no puede darse por supuesto y debe ser motivado. La enseñanza de Estadística debe asumir la tarea de transmitir los fundamentos técnicos y su aplicación para la verificación de las afirmaciones basadas en datos. Los componentes clave incluyen:

- *La lectura e interpretación de parámetros en contextos socialmente relevantes:* Los alumnos conocen los conceptos en los que se basan los parámetros comunes (por ejemplo, la media aritmética o la mediana, la desviación estándar, el rango intercuartílico, la correlación según Pearson), su definición y sus propiedades. Conocen sus puntos fuertes y débiles como medidas y, por tanto, pueden evaluar las conclusiones basadas en estos indicadores dentro del contexto social.
- *Leer e interpretar representaciones estadísticas en contextos socialmente relevantes:* Los alumnos conocen los puntos fuertes y débiles de las representaciones estadísticas más comunes

y son capaces de evaluar posibles conclusiones teniendo en cuenta que algunas representaciones pueden ser engañosas. Además, son capaces de aplicar estas competencias a representaciones interactivas dinámicas.

- *Comprender los conceptos asociados a los indicadores socialmente relevantes:* Para poder valorar y evaluar la evolución de la sociedad, es esencial el conocimiento de los indicadores socialmente relevantes, especialmente si hay diferentes operacionalizaciones posibles, como en la definición y medición de (por ejemplo) la pobreza o el desempleo.
- *Conocer conceptos estadísticos importantes:* Utilizando ejemplos motivantes, los alumnos aprenden conceptos estadísticos importantes para evaluar afirmaciones basadas en datos, caracterizados por "correlación no es causalidad", "¿porcentajes de qué?", así como posibles fuentes de error y de su importancia dentro de las argumentaciones basadas en datos.
- *Evaluar y reflexionar sobre los datos:* Son importantes para una evaluación basada en datos las preguntas claves no técnicas como: ¿De quién es la historia que se cuenta aquí? ¿Por quién y por qué se cuenta? ¿Qué pruebas se presentan? ¿Es creíble la fuente?
- *Evaluar las conclusiones estadísticas:* Mediante una revisión crítica de las conclusiones, los alumnos evalúan la adecuación del modelo subyacente, revisan la posibilidad de otras explicaciones alternativas para los fenómenos observados y deciden si las conclusiones obtenidas son coherentes con las pruebas.
- *Formular preguntas estadísticas pertinentes:* Una competencia importante para los ciudadanos con conocimientos de estadística es la de formular preguntas estadísticas pertinentes. Las cuestiones de Estadística Cívica rara vez tienen una respuesta clara de sí o no. A menudo, hacer buenas preguntas dentro del proceso de investigación puede ser más propicio para el éxito que obtener respuestas rápidas.
- *Investigar información relevante:* Los alumnos saben qué información relativa a las estadísticas o a las afirmaciones basadas en datos es relevante para una evaluación basada en pruebas y son capaces de adquirir más información con la ayuda del apoyo técnico.
- *Reflexionar sobre el uso de la tecnología y los medios de comunicación:* Los alumnos reflexionan sobre el valor añadido de la tecnología y otros medios de comunicación como herramientas para comunicar la información estadística al público.

- *Comunicar conceptos y resultados estadísticos a personas no expertas de forma clara y comprensible:* La comunicación sobre temas socialmente relevantes en las escuelas o en los discursos públicos puede requerir descomponer las ideas en sus elementos básicos (reducciones didácticas).

### ENFOQUE PEDAGÓGICO

El enfoque pedagógico adoptado al diseñar el curso aplica el concepto de Entorno de Aprendizaje del Razonamiento Estadístico (SRLE, Garfield & Ben-Zvi, 2009) para enseñar las ideas conceptuales clave y las recomendaciones para la Estadística Cívica (Engel, 2019; Gal et al., 2022). El enfoque SRLE puede caracterizarse como una investigación en la que el diseño de materiales educativos (como herramientas informáticas, actividades de aprendizaje o un programa de desarrollo profesional) es una parte crucial de la investigación. El diseño de entornos de aprendizaje se entrelaza con la comprobación o el desarrollo de la teoría (Bakker y van Eerde, 2015, p. 430). Los experimentos de diseño son actividades extendidas, iterativas, intervencionistas y orientadas a la teoría, cuyas "teorías" hacen un trabajo real en contextos educativos prácticos (Cobb et al., 2003). Se adopta un enfoque centrado en el alumno, que le ofrece diversas oportunidades para pensar, argumentar y reflexionar. Este entorno de aprendizaje ayuda a los alumnos a desarrollar una comprensión más profunda de la estadística, promoviendo el pensamiento y el razonamiento estadístico.

Las recomendaciones claves de ProCivic para el desarrollo de la estadística cívica concebidas por ProCivicStat Partners (2018) están dirigidas a la enseñanza de la estadística en las escuelas y universidades y corresponden a los puntos centrales de la SRLE, con un enfoque distinto en las consideraciones sociopolíticas y el contenido. Las características principales son: (1) temas estadísticos que abordan las características específicas de los datos sobre la sociedad, (2) uso de tecnologías digitales versátiles, (3) promoción de la evaluación crítica y (4) enfoques de evaluación alternativos. A continuación, las cinco recomendaciones clave de ProCivicStat, en breve PCS (ProCivicStat Partners, 2018) están relacionadas con las seis características de un SRLE (consulte la Tabla 1):

**Tabla 1:** *Comparación de las recomendaciones del PCS y del SRLE*

<b>Estadística cívica</b>	<b>SRLE</b>
PCS Recomendación 1: Desarrollar actividades que promuevan el compromiso con los problemas sociales y desarrollen la comprensión crítica de los estudiantes de estadística sobre fenómenos cívicos clave.	SRLE 1: Centrarse en desarrollar ideas estadísticas centrales, en lugar de presentar conjuntos de herramientas y procedimientos.
PCS Recomendación 2: Utilizar datos y textos relevantes, y resaltar la naturaleza multivariante, dinámica y agregada de los fenómenos sociales.	SRLE 2: Utilizar conjuntos de datos reales y motivadores para involucrar a los estudiantes en hacer y probar conjeturas.
PCS Recomendación 3: Adoptar tecnologías que permitan visualizaciones ricas, e interacciones con datos sobre fenómenos sociales relevantes.	SRLE 4: Integrar el uso de herramientas tecnológicas apropiadas, que permitan a los estudiantes poner a prueba sus conjeturas, explorar y analizar datos, y desarrollar su razonamiento estadístico.
PCS Recomendación 4: Adoptar métodos de enseñanza para desarrollar habilidades de interpretación crítica aplicables a una amplia variedad de datos y fuentes textuales.	SRLE 3: Usar actividades de clase para apoyar el desarrollo del razonamiento de los estudiantes.  SRLE 5: Promover un discurso en el aula que incluya argumentos estadísticos e intercambios sostenibles que se centren en ideas estadísticas significativas
PCS Recomendación 5: Implementar evaluaciones que examinen la capacidad de investigar y comprender críticamente datos, resultados estadísticos y mensajes sobre fenómenos sociales clave.	SRLE 6: Usar la evaluación para aprender lo que saben los estudiantes y monitorear el desarrollo de su aprendizaje estadístico, así como para evaluar los planes de instrucción y el progreso.

- Desarrollar actividades que promuevan el compromiso con los problemas sociales y desarrollen la comprensión crítica de los alumnos de las estadísticas sobre los fenómenos cívicos claves (Recomendación 1 del PCS) y se centren en el desarrollo de ideas estadísticas centrales (contenido; SRLE 1): Las personas necesitan adquirir competencias con las estadísticas para poder tratar de forma crítica los fenómenos socialmente relevantes. En particular, las ideas estadísticas centrales, como la distribución y la variabilidad, deben ser comprendidas por todos los estudiantes, incluyendo la forma en que se relacionan entre sí, si se quiere que los estudiantes logren una comprensión más profunda que facilite la aplicación en otros contextos. En

particular, las actividades basadas en temas socialmente relevantes requieren un amplio espectro de competencias estadísticas, por ejemplo, para que los ciudadanos puedan comprender el papel de las pruebas estadísticas en la toma de decisiones sobre políticas públicas.

- Utilizar datos reales e interesantes (SRLE 2) o datos y textos relevantes, y destacar la naturaleza multivariante, dinámica y agregada de los fenómenos sociales (Recomendación 2 del PCS): Los estudiantes son motivados por temas interesantes y aportan algunos conocimientos (y supuestos) antes de comenzar el análisis real. La comprensión de los fenómenos sociales y la toma de decisiones al respecto requieren el tratamiento de datos multivariantes. Por lo tanto, las actividades deben tener en cuenta los proveedores de datos importantes, y se deben utilizar fuentes de datos múltiples y novedosas para triangular los problemas. Para desarrollar la metacognición, se puede pedir a los alumnos que reflexionen sobre las características de los datos utilizados en diferentes áreas temáticas, así como en una variedad de argumentos políticos.
- Integrar herramientas tecnológicas apropiadas (SRLE 4) que permitan visualizaciones e interacciones ricas con datos sobre fenómenos sociales relevantes (Recomendación 3 del PCS): Existe una variedad de herramientas tecnológicas que ayudan a los alumnos a desarrollar la comprensión y el razonamiento. Alivian a los estudiantes de la sobrecarga cognitiva asociada a los cálculos detallados para que puedan concentrarse en tareas más importantes como la selección de métodos o la presentación, evaluación y discusión de los resultados. Los programas informáticos pertinentes e innovadores deben incluir visualizaciones dinámicas e interactivas de datos que animen a los alumnos a utilizar diversas herramientas.
- Los métodos de enseñanza deben desarrollar habilidades para la interpretación crítica de una amplia variedad de datos y fuentes de texto (Recomendación 4 del PCS), por ejemplo, desarrollar el razonamiento estadístico de los estudiantes (SRLE 3) y promover el discurso en el aula (SRLE 5): Una componente importante es el uso de actividades cuidadosamente diseñadas que promueven el aprendizaje a través de la colaboración, la interacción, la discusión y los problemas interesantes. Los debates son una parte fundamental del entorno de aprendizaje. Los alumnos deben hacerse preguntas entre ellos y, si es posible, responderlas colaborativamente entre ellos. Las

preguntas deben fomentar nuevas conjeturas y el pensamiento independiente. Las actividades se centran en el desarrollo de competencias en el ámbito del razonamiento estadístico. Deben utilizarse diferentes métodos de enseñanza, centrándose en la formulación de preguntas adecuadas, la búsqueda de respuestas y las interpretaciones razonadas, que utilizan métodos de análisis adecuados. El objetivo es desarrollar la capacidad de interpretación crítica y estimular la comunicación sobre cuestiones sociales, incluso mediante informes narrativos. A través de la argumentación temprana con datos no lineales y multivariados, también se pueden desarrollar las competencias de modelización para que los estudiantes puedan reconocer los respectivos puntos fuertes y débiles de la modelización en contextos sociales.

- Utilizar evaluaciones alternativas (SRLE 6) que examinen la capacidad de investigar y comprender críticamente los datos, los hallazgos estadísticos y los mensajes clave sobre fenómenos sociales (Recomendación 5 del PCS): El uso de diferentes formas para la evaluación de las competencias estadísticas permite centrarse en la comprensión de las ideas básicas. Además, las evaluaciones son una orientación importante para los alumnos en su progreso. Así, por ejemplo, debería evaluarse la capacidad de relacionar el análisis de datos con la relevancia social y política.

## **CONTENIDO Y ESTRUCTURA DEL CURSO**

A partir de las recomendaciones del PCS y de las características del SRLE, así como de los objetivos del curso, desarrollamos la siguiente estructura para una sesión típica de 90 minutos. Normalmente, al principio de una sesión, se introducen o se refrescan los conocimientos estadísticos necesarios para proporcionar una base de conocimientos adecuada a los alumnos. Cuando se introduce un nuevo tema sociopolítico, el instructor presenta información básica de fondo que se complementa con un breve vídeo, un dibujo animado o un texto breve. Los detalles y más información de fondo sobre el tema sociopolítico se proporcionan a través de las hojas de trabajo o los planes de la lección. Además, las hojas de trabajo contienen información sobre las variables relevantes (incluyendo su operacionalización y medición) y un enlace a una hoja de trabajo electrónica, basada, por ejemplo en la plataforma CODAP<sup>1</sup> o Gapminder<sup>2</sup>, que contiene un conjunto de datos completo. Una lista de tareas guía a los alumnos en sus investigaciones y análisis de datos. Los estudiantes trabajan en equipos

---

<sup>1</sup> <https://codap.concord.org>

<sup>2</sup> <https://www.gapminder.org>

de dos o tres personas. A continuación, hay un periodo de preguntas y respuestas y un debate en clase antes de que el instructor resuma la sesión. La Tabla 2 ofrece un resumen de la estructura de la sesión.

**Tabla 2.** Estructura de una sesión de clase típica de 90 minutos

	<b>Qué</b>	<b>Quién</b>	<b>Medios/ herramientos</b>	<b>Cuánto tiempo (en minutos)</b>
1	Conceptos estadísticos Introducción a CODAP y a Gapminder; Introducción al contexto social	Instructor	Pizarra aplicaciones, vídeos	20-25
2	Debate, preguntas Exploración de datos	Toda la clase		5-10
3		Equipos de 2-3 estudiantes	Hojas de trabajo; CODAP, Gapminder	45-50
4	Debate, preguntas	Toda la clase		15-20
5	Resumen	Instructor		5

ProCivicStat ha desarrollado alrededor de 40 planes para lecciones u hojas de trabajo detalladas (todos los planes están disponibles en versión para estudiantes y para profesores en inglés, y varios están también traducidos al alemán, húngaro y portugués, y hasta una al español en progreso) que están disponibles gratuitamente en "Lesson Plans" a través de la página web de ProCivicStat <https://iase-web.org/islp/pcs> o utilizando la herramienta CivicStatMap de la misma. El anexo presenta una de las hojas de trabajo del proyecto ProCivicStat con un enfoque en la temática del cambio climático. Utilizando el software gratuito CODAP o Gapminder, los alumnos analizan conjuntos de datos multivariados respondiendo a las preguntas de las hojas de trabajo mientras consolidan los contenidos previamente introducidos. En función de las necesidades de los respectivos grupos de aprendizaje, el profesor apoya, aconseja o retiene. Los grupos individuales se relacionan con el instructor en función de sus necesidades. Al final de la sesión se hace un breve resumen de las conclusiones de los alumnos, incluyendo la discusión y la evaluación.

La Tabla 3 brinda una descripción general del contenido estadístico que se aborda, cubriendo elementos estándar de estadísticas descriptivas, visualizaciones de datos y una introducción al manejo de datos multivariados.

**Tabla 3.** Posibles temas y conceptos estadísticos

Parámetros de dispersión	Rango intercuartil, varianza, desviación estándar, rango
Visualización de datos	Boxplot, histograma, comparación de distribuciones
Medición	Operacionalización de variables
Datos bivariados	Gráfico de dispersión, correlación, línea de regresión
Datos multivariados	Confusores, paradoja de Simpson
Visualización de datos multivariantes	Matriz de dispersión, gráficos de burbujas Gampinder

Durante varias iteraciones del curso, experimentamos con diversos temas sociopolíticos; el número de temas tratados en clase varió entre 2 y 3. La tabla xx.4. contiene una lista de los temas tratados, incluida una pregunta principal para investigar. Nuestros criterios de selección fueron la relevancia en el contexto (i) social (ii) económico (iii) ecológico

**Tabla 4.** Lista de temas sociopolíticos tratados en el curso

<b>Tema:</b>	<b>Pregunta Principal</b>
Distribución de la renta en Europa	<i>¿Por qué hay en algunos países grandes discrepancias entre ricos y pobres mientras que en otros la distribución de la renta es más equitativa?</i>
Explorar el mundo con datos	<i>¿Qué información sobre el estado del mundo y las diferencias en las condiciones de vida de las distintas regiones puedes obtener de este conjunto de datos?</i>
Índice de Desarrollo Humano	<i>¿Qué información sobre la calidad de vida en varios países del mundo puedes obtener de este conjunto de datos?</i>
Informe sobre la felicidad en el mundo	<i>¿Cuáles son las principales diferencias entre los países con respecto a la felicidad?</i>
Racismo en el fútbol europeo	<i>¿Tienen los jugadores con un tono de piel más oscuro en cuatro ligas de fútbol europeas más probabilidades de recibir una tarjeta roja o amarilla que los jugadores de piel más clara?</i>
Polvo fino: una amenaza para nuestra salud	<i>¿Existen correlaciones entre las condiciones meteorológicas y las mediciones de partículas en el centro de Stuttgart? ¿Tienen efecto las prohibiciones de conducir?</i>
Cambio Climático	<i>Es Deshielo de los Glaciares: ¿Qué diferencias en el desarrollo de los glaciares se pueden observar? ¿Puedes identificar un patrón?</i>
Calidad de la Democracia <sup>3</sup>	<i>¿Cómo se puede medir la calidad de la democracia? ¿Cuál es la evolución de la democracia en los distintos continentes a lo largo del tiempo?</i>

## EVALUACIÓN: EL PROYECTO DE VÍDEO

Tanto las recomendaciones del SRLE como las del PCS proponen evaluaciones alternativas para valorar el grado de adquisición de las competencias deseadas por parte de los estudiantes (recomendación 5 del PCS, SRLE 6). En nuestro curso, hemos optado por evaluar el aprendizaje de

<sup>3</sup> Tratado en el curso con los estudiantes de ciencias políticas

los estudiantes a través de la producción de un vídeo en lugar del más tradicional trabajo o presentación oral.

Se pide a los estudiantes que aborden una cuestión estadística interesante y relevante para la sociedad basada en datos y que presenten sus resultados en un vídeo (aproximadamente 10 minutos). Equipos de dos o tres estudiantes, tras consultar con el instructor, trabajan en un tema de Estadística Cívica que ellos mismos escogieron entre los propuestos por los docentes. Durante el proceso de producción del vídeo, el instructor está disponible para consultar y dar retroalimentación para proporcionar una evaluación formativa, mientras que el producto final del vídeo, junto con las tareas adicionales durante el curso, sirve como una evaluación sumativa que determina las calificaciones de los estudiantes.

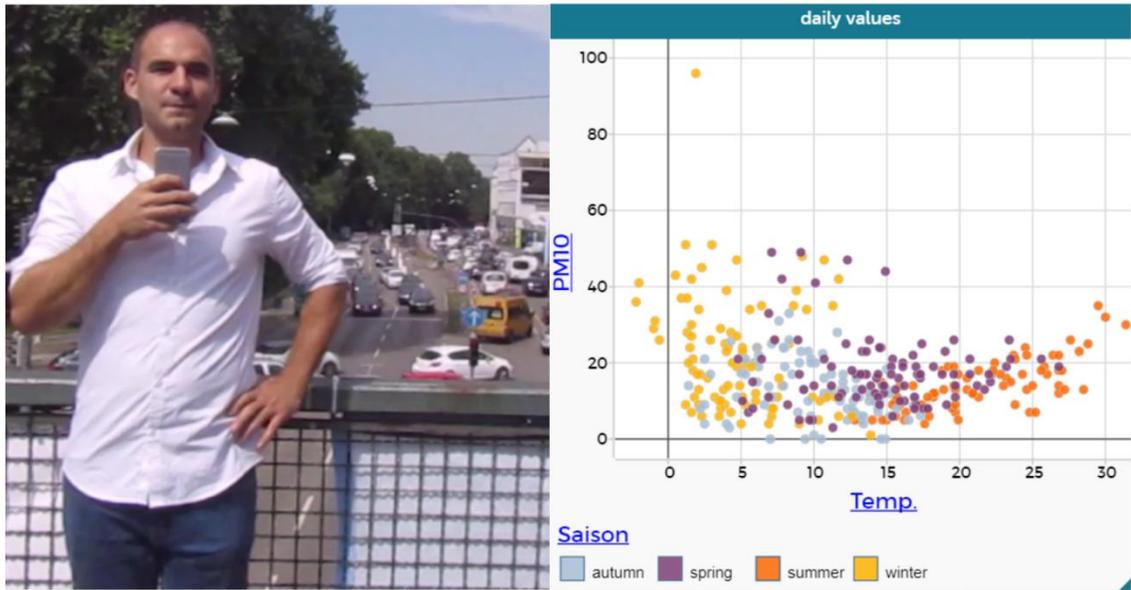
La producción del vídeo requiere que los estudiantes busquen un conjunto de datos adecuado e identifiquen preguntas para abordar el tema elegido y su relevancia, seguido de visualizaciones de datos, análisis y conclusiones finales. Los vídeos incluyen una introducción al contexto social y una caracterización de los datos, por ejemplo, describiendo la fuente de datos, los métodos de recogida de datos empleados y explicando las variables implicadas, de modo que el espectador reciba una visión general del tema y una impresión de la calidad del conjunto de datos. El análisis de los datos en torno a las preguntas elegidas se lleva a cabo con la ayuda de programas informáticos, especialmente CODAP, iNZight, Excel o Gapminder. Con estas herramientas elaboraron gráficos y tablas estadísticas. Los estudiantes documentan los descubrimientos interesantes dentro de los datos (por ejemplo, patrones llamativos) y los explican situándolos en su contexto. Sobre la base de los cálculos y las representaciones gráficas pertinentes, los estudiantes deben elaborar conclusiones bien fundadas en los análisis realizados. Al final del vídeo se aborda una revisión crítica, las limitaciones de las conclusiones y las posibles preguntas posteriores.

Como ejemplo, la figura 1 muestra una instantánea de un vídeo de estudiantes que analiza episodios de contaminación por polvo fino en la ciudad de Stuttgart. Para producir el vídeo, la mayoría de los equipos de estudiantes utilizaron únicamente el software disponible en sus ordenadores personales (Windows Movie Maker 2012, captura de pantalla), programas gratuitos como Captura 8.0, VSDC Free Video Editor o programas como Moovly o Da Vinci Resolve.

Para evaluar los vídeos, dos instructores asignaron de forma independiente una puntuación (suma total de 100) según siete criterios: motivación del estudio (15); comentario sobre la calidad y procedencia de los datos (5); corrección de los cálculos (5); calidad de las visualizaciones (15); calidad

del análisis de los datos, modelización, factores de confusión, etc. (30); interpretación (15); y revisión crítica y limitaciones (15).

**Figura 1.** Instantánea de un vídeo de un estudiante sobre la contaminación por polvo fino en la ciudad de Stuttgart, junto con algunas visualizaciones de análisis de datos (creadas con CODAP)



## CÓMO DESARROLLAR SUS PROPIOS RECURSOS DE ESTADÍSTICA CÍVICAS

Recomendamos que las tareas de aprendizaje de Estadística Cívica sigan en términos generales una estructura similar en la que haya una introducción a un contexto más amplio que aborde un tema de gran relevancia para la sociedad y una articulación clara de cuál será el enfoque de la tarea. La estadística se usa como herramienta para comprender mejor y arrojar luz sobre los asuntos tratados, no se enseña por sí misma. El propósito es obtener una visión más profunda de algunos contextos. El problema contextual y sus implicaciones para el mundo son la motivación principal para aplicar ideas estadísticas familiares o adquirir nuevas para una mejor comprensión del problema en cuestión. La interacción entre el contexto y la exploración estadística proporciona dos experiencias importantes para los estudiantes: consiguen una comprensión más profunda del contexto y, al mismo tiempo, adquieren experiencia de primera mano apreciando el poder y la utilidad del pensamiento y los métodos estadísticos.

Es importante identificar preguntas específicas que puedan abordarse con base en evidencia usando pensamiento y razonamiento estadístico. Una exploración estadística requiere datos confiables que informen aspectos centrales del problema. Se integran datos auténticos con un contexto y propósito, fomentando el aprendizaje activo, usando tecnología para explorar conceptos y analizar

datos, y usando evaluaciones para mejorar y evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Las lecciones deben proporcionar una descripción de los datos que se utilizarán, incluidos los metadatos de las variables en el conjunto de datos, junto con cualquier información complementaria necesaria para explicar nuevas ideas (p. ej., cómo se mide la felicidad). Las tareas comienzan con preguntas cerradas para garantizar que los estudiantes puedan orientarse en el conjunto de datos y luego pasan a actividades más abiertas donde los estudiantes toman decisiones sobre cómo abordar el problema. Damos algunas recomendaciones para el diseño de actividades aquí, y las desarrollamos a continuación.

Con su grupo objetivo en mente, especifique los requisitos previos y los objetivos de aprendizaje

### **Nueve recomendaciones para diseñar su propio material de Estadística Cívica**

1. Teniendo en cuenta su grupo objetivo, especificar los requisitos previos y los objetivos de aprendizaje
2. Identificar un tema adecuado de relevancia para la sociedad para ser explorado con datos
3. Sensibilizar y motivar a sus alumnos, relaciona el tema con las experiencias personales
4. Usar material de referencia (dibujos animados, videos de YouTube, textos, informes de los medios) para generar interés y brindar información
5. Buscar conjuntos de datos ricos y relevantes (incluidos los metadatos) y textos escritos con contenido estadístico
6. Seleccionar herramientas digitales adecuadas para la visualización y exploración de datos
7. Diseñar actividades, con tareas cerradas y abiertas, para promover el pensamiento crítico
8. Pedir un resumen y una revisión crítica, que debe incluir una descripción de las fortalezas y limitaciones de las conclusiones extraídas.
9. Usar formas alternativas de evaluación para mejorar y evaluar el aprendizaje de los estudiantes

### **1. Teniendo en cuenta su grupo objetivo, especifique los requisitos previos y los objetivos de aprendizaje**

Cada actividad de enseñanza es una intervención intencional dirigida a un grupo distinto de alumnos guiados por objetivos específicos. La Estadística Cívica se enfoca en temas candentes que afectan el bienestar económico o social y las condiciones de vida de los seres humanos. Las visualizaciones de datos y las representaciones estadísticas se utilizan como herramientas para obtener una visión más profunda de los problemas involucrados. Además, viceversa, el tema social sirve como

refuerzo de la motivación para aprender nuevos conceptos y técnicas para la visualización de datos y análisis estadísticos. Proporciona una experiencia valiosa: el conocimiento estadístico es útil para una comprensión más profunda de temas sociales actuales, y la relevancia del tema aumenta la motivación para adquirir nuevos conocimientos estadísticos. Al planificar una actividad de Estadística Cívica, es fundamental conocer el grupo objetivo (edad, requisitos cognitivos previos) y especificar objetivos de aprendizaje concretos.

## **2. Identificar un tema adecuado de relevancia para la sociedad para ser explorado con datos**

La Estadística Cívica trata sobre la comprensión de una problemática basada en la evidencia de las condiciones sociopolíticas, económicas y dimensiones ecológicas del mundo que nos rodea. El origen y destino de cualquier actividad de Estadística Cívica es un tema que se centra en un bien social común, el bienestar y la salud de las personas o sus libertades y derechos civiles. Un objetivo educativo importante es desarrollar disposiciones positivas de los estudiantes para apreciar el valor potencial de la evidencia estadística y para comprometerse con el mundo. El plan de estudios escolar ofrece muchos temas en muchas disciplinas que se pueden explorar con datos, lo que permite una base basada en evidencia para una comprensión, un razonamiento y una toma de decisiones más profundos. Se puede invitar a los estudiantes a proponer e investigar un tema de gran significado e importancia para ellos y su comunidad, o se les puede ofrecer elegir entre una variedad de preguntas o temas para estudiar. La estadística como disciplina es valiosa porque capacita a las personas para abordar problemas del mundo real y promueve el compromiso con fenómenos sociales complejos. También proporciona herramientas útiles para identificar afirmaciones falsas y datos inventados, difundidos a través de medios sociales o periodismo sin control. Estas ideas tienen relevancia en una amplia gama de áreas curriculares.

## **3. Sensibiliza y motiva a tus alumnos, relaciona el tema con las experiencias personales**

El diseño integral de tareas que conectan problemas de la vida real con la exploración de datos brinda a los estudiantes la oportunidad de adquirir una rica experiencia donde el conocimiento estadístico y el razonamiento estadístico realmente importa, ayuda a comprender fenómenos sobre temas importantes, guía en la evaluación de riesgos, y ayuda en la propia toma de decisiones. Sin embargo, abordar auténticos problemas en el aula requiere una cuidadosa reflexión y preparación. Los profesores deben asignar tiempo suficiente para solicitar las ideas de los estudiantes para la investigación y conectarlas con conjuntos de datos y herramientas para explorarlos, o para ayudar a los estudiantes a hacer conexiones con importantes temas que les son más nuevos o más distantes. Para ayudar a los estudiantes a relacionarse con un tema, considere encontrar maneras de hacer que el

tema sea personal para ellos. Por ejemplo, si el tema es el cambio climático, puede hacer que sus alumnos exploren su huella ecológica individual<sup>4</sup>, que es una medida de la superficie de tierra y agua biológicamente productiva que necesita una persona para producir todos los recursos que consume y absorber los residuos que genera. Si el tema aborda la calidad del desarrollo humano, puede comenzar preguntando: *¿Qué hace que una vida sea buena y feliz para usted? Discuta y clasifique el valor de los siguientes productos básicos para usted: comunidad y amigos; ingreso; salud; seguridad personal; acceso a la vida cultural y a la educación.*

#### **4. Usa material de referencia (dibujos animados, videos de YouTube, textos, informes de los medios) para generar interés y proporcionar información**

Involucrar a los estudiantes en contextos complejos puede requerir una inversión considerable de tiempo, especialmente si no es un área en la que tenga experiencia o conocimientos particulares. Hay una plétora de recursos basados en la web disponibles públicamente que podría considerar usar. Un ejemplo de esto es el recurso de las desigualdades<sup>5</sup> creado por el Instituto de Estudios Políticos de los Estados Unidos, donde los problemas de desigualdad de ingresos, riqueza, economía global, racial y económica son tratados a fondo. Textos, caricaturas, audio grabaciones o videos (por ejemplo, YouTube) y otros subprogramas multimedia son fuentes importantes para motivar a los estudiantes y proporcionar información. Un enfoque es buscar un punto de partida para establecer la escena, que pueden ser informes de los medios que cubren más de un aspecto de un contexto, o el uso de un recurso como Stats and Stories<sup>6</sup>, que tiene un gran conjunto de podcasts que exploran ideas cuantitativas en nuestra vida cotidiana y en el periodismo.

#### **5. Busca conjuntos de datos ricos (incluidos los metadatos) y relevantes y textos escritos con contenido estadístico**

Los contextos de Estadísticas Cívicas están en el centro del diálogo público y político, de mucho interés para el establecimiento de políticas y los tomadores de decisiones a nivel nacional, regional y local, y a menudo son discutido en los medios. Dependiendo de su tema específico, puede decidir centrarse más en textos escritos con mensajes estadísticos, la exploración de datos auténticos, o ambos. Los mensajes se pueden encontrar en artículos en medios impresos y digitales, en comunicados de prensa y otros productos de productores de estadísticas oficiales (por ejemplo, los sitios web de las agencias oficiales de estadísticas) u organizaciones no gubernamentales, en programas

---

<sup>4</sup> <https://www.footprintcalculator.org>

<sup>5</sup> <https://desigualdad.org>

<sup>6</sup> <https://www.npr.org/podcasts/530134710/stats-stories>

de televisión y sitios web de canales de noticias. Allí, los datos ya son analizados por los productores de estadísticas o por los medios de comunicación. También puede decidir pedirles a los estudiantes que analicen conjuntos de datos para desarrollar una comprensión más profunda de la Estadística Cívica. Encontrar los datos apropiados puede ser todo un desafío, a pesar de la disponibilidad y accesibilidad de grandes repositorios.

Comprender los fenómenos sociales y pensar en las implicaciones de las posibles decisiones políticas en el ámbito social requiere una comprensión y la capacidad de trabajar con datos multivariados. El conjunto de datos debe ser lo suficientemente rico como para permitir la exploración y el descubrimiento, pero aún manejable para sus alumnos y el software que utiliza. El nivel adecuado de complejidad de los datos debe elegirse de acuerdo con la experiencia de sus alumnos y la capacidad de su software. Muchos conjuntos de datos de Internet deben seleccionarse antes de que estén listos para importarse en el software de visualización y análisis. Además, es importante proporcionar metadatos (¿cómo se recopilaron los datos y por quién, exactamente cómo se midieron las variables y se operacionalizaron los constructos?). Se pueden encontrar fuentes ricas y útiles a través de los principales proveedores de datos como Eurostat, ONU, OCDE o portales como Gapminder, IPUMS o OurWorldinData<sup>7</sup>. Las Naciones Unidas proporcionan mucha información y datos sobre los objetivos de desarrollo sostenible de la ONU. Las oficinas nacionales de estadísticas proporcionan comunicados de prensa e informes de los medios en formato de texto, al igual que las organizaciones no gubernamentales que supervisan el cumplimiento de los derechos civiles internacionales o los problemas ambientales y de salud (Germanwatch<sup>8</sup>, etc.).

## **6. Elija herramientas digitales adecuadas para la visualización y exploración de datos**

El alcance de las herramientas digitales disponibles abarca desde software para visualizar conjuntos de datos específicos, pasando por software educativo para enseñar estadística, hasta herramientas profesionales para hacer estadísticas. Biehler et al. (2013) brindan una descripción general de las herramientas digitales en la Educación Estadística. Gapminder, OurWorldinData o pirámides dinámicas de población normalmente no requieren más que algunos conocimientos básicos de estadística descriptiva para explorar los datos que proporciona el software. Estos son productos innovadores para la representación visual de datos multivariados y pueden proporcionar más información sobre los patrones en los datos que cualquier análisis numérico. Sin exigir mucho

---

<sup>7</sup> <https://ourworldindata.org>

<sup>8</sup> <https://germanwatch.org/es>

introducción formal y técnica, facilitan el descubrimiento de patrones en los datos y conducen a importantes actividades estadísticas como la búsqueda de variables explicativas de confusión.

Productos como Fathom, CODAP o iNZight están diseñados como herramientas educativas para el análisis de datos sin necesidad de conocimientos de programación más allá de usar un editor de fórmulas. El software basado en navegador CODAP en particular tiene funciones fáciles de usar para reestructurar datos y subconjuntos - ambas características útiles cuando los datos son multivariados (CODAP ralentiza disminuir considerablemente si el número de casos supera varios miles). Actividades genéricas que puede ayudar a los estudiantes a ver patrones en los datos incluyen los temas en la tabla a seguir

- Comparación de distribuciones, como estudiar pirámides de población animadas en función del tiempo
- Agregación de datos, así como resumir los datos climáticos calculando el promedio mensual temperaturas a lo largo de varios años
- Desagregar e investigar subpoblaciones: Un ejemplo es la comparación de ingresos entre hombres y mujeres según su nivel de educación y ocupación.
- Creación de nuevas variables: Un ejemplo es definir la relación de participación en los ingresos del 10% más alto asalariados hasta el 10% de ingresos más bajos
- Reestructuración de datos, como al reorganizar datos sobre casos de Covid-19 según gravedad (leve - moderada - grave - mortal), según la prevalencia de factores de riesgo (diabetes, tabaquismo, cardiopatía, edad), hospitalización (no, sí)
- Búsqueda de terceras variables explicativas, como la alta correlación entre la vida, el valor esperado de vida y el producto nacional bruto por persona podrían explicarse por el número de médicos por cada 1000 habitantes
- Modelado de relaciones funcionales, como identificando los componentes estacionales y encontrar tendencias en el contenido de CO2 atmosférico

Sin embargo, la capacidad de muchas herramientas educativas para manejar grandes conjuntos de datos es bastante limitada. Para investigar conjuntos de datos muy grandes, tendrá que recurrir a paquetes profesionales (como como JMP, R, Python), que requieren un conocimiento profundo de las estadísticas (¡para comprender las opciones y la configuración predeterminada!), así como habilidades de programación.

## **7. Diseña actividades, con tareas cerradas y abiertas, para promover el pensamiento crítico**

En este punto presentan las características de las actividades de toda propuesta de enseñanza basada en la Estadística Cívica, pero la recomendación que dan es: “Diseñar actividades, con tareas cerradas y abiertas, para promover el pensamiento crítico”. Se debería dedicar un párrafo a fundamentar y ejemplificar (ampliando lo ya dicho más arriba) sobre la necesidad de considerar ambos tipos de tareas.

- emplear una variedad de estrategias de enseñanza, con énfasis en enfoques de aprendizaje activo donde los alumnos formalizan preguntas, encuentran evidencia y eligen métodos de análisis apropiados
- desarrollar la capacidad de interpretación crítica a través del análisis de una amplia variedad de fuentes (incluidos artículos de prensa y las afirmaciones sin fundamento)
- animar a los estudiantes y alumnos a comunicarse sobre temas sociales mediante la creación de relatos narrativos de situaciones complejas, basados en múltiples fuentes de evidencia estadística
- introducir el razonamiento con datos multivariados, relevantes para temas sociales importantes, al principio del curso, incluidos datos con relaciones no lineales entre variables
- desarrollar habilidades de modelado para que los alumnos sean conscientes de las fortalezas y debilidades de las herramientas utilizadas para modelar situaciones sociales
- involucrar a los alumnos y estudiantes con la variedad de formas en que se utiliza la evidencia para respaldar la teoría en diferentes disciplinas académicas
- fomentar la investigación de los estudiantes sobre las fuentes de datos y las reflexiones sobre la probable confiabilidad de los datos
- destacar la importancia de los metadatos: definir medidas y operacionalizar variables

## **8. Pide un resumen y una revisión crítica que debe incluir una descripción de las fortalezas y limitaciones de las conclusiones extraídas**

Los problemas de Estadística Cívica rara vez tienen una respuesta clara como sí o no. Cualquier conclusión se basa en suposiciones, y podría modificarse a la luz de pruebas adicionales. Muchas veces hacer buenas preguntas dentro del proceso de investigación puede ser más productivo que encontrar respuestas rápidas. Una buena pregunta de investigación es aquella que permite una rica exploración de los datos disponibles, el descubrimiento y el pensamiento estadístico. Una buena pregunta de investigación permite a los estudiantes participar en un trabajo interesante y tiene un elemento abierto

(Arnold, 2013). Es probable que la pregunta se base en datos que estarán disponibles dentro del marco de tiempo de la investigación y es específica, por lo que se puede responder a partir de los datos.

En este punto presentan las características de las actividades de toda propuesta de enseñanza basada en la Estadística Cívica, pero la recomendación que dan es: “Diseñar actividades, con tareas cerradas y abiertas, para promover el pensamiento crítico”. Se debería dedicar un párrafo a fundamentar y ejemplificar (ampliando lo ya dicho más arriba) sobre la necesidad de considerar ambos tipos de tareas.

Las conclusiones ganan fuerza y validez si los enfoques analíticos de datos respaldan las afirmaciones. Al final de las asignaciones, se debe alentar a los estudiantes a que regresen a su(s) pregunta(s) principal(es). Al realizar una revisión crítica de las conclusiones, los estudiantes evalúan la adecuación de los argumentos subyacentes, revisan la posibilidad de otras explicaciones alternativas para el fenómeno observado, establecen las limitaciones de sus conclusiones y si las conclusiones obtenidas son consistentes con la evidencia.

#### *9. Usa formas alternativas de evaluación para mejorar y evaluar el aprendizaje de los estudiantes*

Las evaluaciones a las que se enfrentan los alumnos durante y al final de cualquier curso son la guía más sólida para los alumnos sobre lo que se va a aprender y el grado en que están progresando. El uso de evaluaciones formativas y sumativas para mejorar y evaluar el aprendizaje de los estudiantes debería garantizar que los estudiantes desarrollen la capacidad de extraer de sus análisis de datos implicaciones para la sociedad y la política. La recomendación 5 de PCS defiende la necesidad de una variedad de evaluaciones y procesos de evaluación para examinar y promover la capacidad de los estudiantes para investigar y comprender críticamente los datos en un contexto social. Recomendamos formas de evaluación que examinen la capacidad de investigar y comprender críticamente datos, hallazgos estadísticos y mensajes sobre fenómenos sociales clave, como trabajos de proyectos o portafolios, creación de videos, presentaciones u otros medios no tradicionales, ya sea individualmente o en grupos.

### **REFLEXIONES Y LECCIONES APRENDIDAS DEL CURSO**

El curso en el formato descrito anteriormente fue impartido varias veces por dos instructores diferentes. El concepto del curso se desarrolló sobre una base teórica (recomendaciones de SRLE y PCS) y se modificó iterativamente sobre la base de la retroalimentación de los estudiantes, y la revisión de los productos de los estudiantes y las evaluaciones de los instructores, siguiendo el esquema de la investigación basada en el diseño. Además de evaluar las habilidades estadísticas de los estudiantes y sus actitudes hacia la estadística antes y después del curso, también se pidió a los estudiantes que dieran su opinión y evaluaran directamente después de cada unidad. Los estudiantes calificaron las

afirmaciones sobre la autoevaluación cognitiva, la actitud afectiva y el potencial didáctico de los materiales en una escala de Likert de 7 puntos y con preguntas abiertas para recabar una retroalimentación más detallada.

A través de los vídeos, los alumnos demostraron que eran capaces de conectar la presentación de resultados estadísticos en forma de gráficos y resúmenes numéricos con temas socialmente relevantes y de reflexionar de forma crítica sobre las limitaciones de sus conclusiones. Las herramientas y los métodos estadísticos aplicados no eran especialmente sofisticados (comparación de distribuciones, boxplots, análisis de subgrupos, búsqueda de terceras variables relevantes, gráficos de dispersión con algún ajuste de curvas, etc.). Los estudiantes se mostraron muy motivados a pesar de la gran carga de trabajo que suponía el aprendizaje de la tecnología de vídeo, además de todos los retos estadísticos y contextuales. En los formularios de opinión, la mayoría de los estudiantes describieron la producción de vídeo como una actividad divertida, pero también como un reto, ya que la mejora de sus competencias mediáticas requería muchas horas de trabajo.

Encontrar un tema relevante y factible para el proyecto no siempre fue fácil para los estudiantes. Además de ser relevante para la sociedad y las estadísticas cívicas, era esencial encontrar conjuntos de datos ricos, significativos y accesibles que pudieran descargarse de un sitio web e importarse a un software conocido (CODAP, iNZight). Un segundo reto fue para algunos de los estudiantes identificar preguntas estadísticas significativas y una interpretación adecuada de los resultados y conclusiones obtenidos.

Como instructores, aprendimos que para que un proyecto de vídeo tenga éxito es importante restringir la investigación a una pregunta bien definida y precisa y disponer de un conjunto de datos razonablemente rico en información relacionada con la pregunta investigada. Un conjunto de datos ideal tiene entre 5 y 20 variables de tipo mixto (numérico y categórico), y entre 200 y 2000 casos. Cuando empezaron a trabajar en los proyectos de vídeo, nuestros alumnos no tuvieron dificultades para manejar el software de análisis de datos que eligieron (CODAP, Excel, Gapminder o iNZight). Los métodos estadísticos aplicados no pasaban de un nivel elemental, pero las conclusiones estaban fundamentadas.

Este curso innovador que conecta la estadística introductoria con temas sociopolíticos y una recepción crítica de los informes de los medios de comunicación plantea exigencias específicas tanto a los estudiantes como al instructor. Cuidadosamente planificado e implementado, aborda un importante objetivo de la educación general, a saber, ayudar a los estudiantes a desarrollarse como ciudadanos autónomos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arnold, P M (2013). *Statistical investigative questions. An enquiry into posing and answering investigative questions from existing data* [Preguntas de investigación estadística: una investigación sobre la presentación y Responder preguntas de investigación a partir de datos existentes]. [Tesis doctoral, La Universidad de Auckland]. <https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/21305>
- Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods* (pp 429–466). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6\\_16](https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16)
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/LASE Study*. Springer
- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technology for Enhancing Statistical Reasoning at the School Level. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel- Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K.-S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-689). Springer Science + Business Media.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). *Design Experiments in Educational Research*. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad: ¿Qué es la estadística cívica? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-18). Universidad de Granada. [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html)
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping Students Develop Statistical Reasoning: Implementing a Statistical Reasoning Learning Environment. *Teaching Statistics*, 31 (3), 72–77. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9639.2009.00363.x>
- ProCivicStat Partners (2018). *Engaging Civic Statistics: A Call for Action and Recommendations. A product of the ProCivicStat Project*. <https://iase-web.org/islp/pcs>
- Ridgway, J. (2015). Implications of the Data Revolution for Statistics Education. *International Statistical Review*, 84 (3), 528–549.
- Gal, I., Nicholson, J., & Ridgway, J. (2022). A conceptual framework for Civic Statistics and its educational applications. En J. Ridgway, (Ed.), *Statistics for empowerment and social engagement: Teaching Civic Statistics to develop informed citizens*. Springer.

## **CIVIC STATISTICS IN MATHEMATICS TEACHER EDUCATION**

### **ABSTRACT**

This chapter describes and discusses a course for prospective high school mathematics teachers designed to provide increased skill and confidence in understanding statistics about current or anticipated trends and changes in society. It describes a new type of introductory statistics course focused on Civic Statistics. The course aims to develop statistical content knowledge regarding Civic Statistics, critical thinking, interdisciplinarity, contextual knowledge, as well as subject-related pedagogical competencies and technological competencies. A specific challenge is getting students majoring in mathematics to engage with sensitive and controversial issues from a sociopolitical point of view, and to reflect on these issues from an instructional and educational perspective.

Keywords: Civic statistics, teacher preparation, SRLE, assessment, professional development, critical thinking.

## **ESTATÍSTICAS CÍVICAS NA EDUCAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

### **RESUMO**

Este capítulo descreve e discute um curso para futuros professores de matemática do ensino médio concebido para fornecer maior habilidade e confiança na compreensão de estatísticas sobre tendências e mudanças atuais ou previstas na sociedade. Descreve um novo tipo de curso introdutório de estatística baseado em Estatística Cívica. O curso visa a desenvolver conhecimentos de conteúdos estatísticos sobre Estatística Cívica, pensamento crítico, interdisciplinaridade, conhecimento contextual, bem como competências pedagógicas relacionadas com a disciplina e com as competências tecnológicas. Um desafio específico é fazer com que os alunos formados em matemática se envolvam com questões sensíveis e controversas do ponto de vista sociopolítico e refletam sobre essas questões desde uma perspectiva instrucional e educacional.

Palavras-chave: Estatísticas cívicas, preparação de professores, SRLE, avaliação, desenvolvimento profissional, pensamento crítico.

JOACHIM ENGEL

*Ludwigsburg Universidad de Educación, Ludwigsburg, Alemania*

[engel@ph-ludwigsburg.de](mailto:engel@ph-ludwigsburg.de)

<https://orcid.org/0000-0002-8251-667>

Recibió el Diplom alemán en Matemáticas de la Universidad de Bonn y un Doctorado en Matemáticas Aplicadas de la Universidad del Sur de California. También se formó como profesor de secundaria. Desde 2004 es profesor de matemáticas y educación matemática, primero en la Universidad de Hannover y luego en la Universidad de Educación de Ludwigsburg. Es autor de dos libros de texto populares sobre matemáticas aplicadas. Sus intereses de investigación se encuentran en el área de alfabetización estadística, modelado matemático, estadística no paramétrica, estadística y sociedad y educación en ciencia de datos. Fue Presidente de la Asociación Internacional para la Educación Estadística (2019-2021); de 2015 a 2018 fue coordinador de la asociación estratégica ProCivicStat, financiada por el programa Erasmus+ de la UE.

ACHIM SCHILLER

[achimschiller01@gmail.com](mailto:achimschiller01@gmail.com)

Achim Schiller trabaja como *data scientist* en la industria privada. Se doctoró en educación matemática en la Universidad de Educación de Ludwigsburg, tras estudiar matemáticas, historia y ciencias políticas preparándose para ser profesor. Sus principales intereses son la alfabetización estadística y la capacitación de las personas a través de la educación estadística. Desarrolló e implementó entornos de aprendizaje para estudiantes, utilizando software educativo y datos multivariantes.

LAURA MARTIGNON

*Ludwigsburg Universidad de Educación, Ludwigsburg, Alemania*

[martignon@ph-ludwigsburg.de](mailto:martignon@ph-ludwigsburg.de)

<https://orcid.org/0000-0002-0318-2327>

Nació en Colombia de padres italianos. Estudió Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia obteniendo su título de Licenciada. Viajó a Tübingen, Alemania, con beca del DAAD, donde obtuvo su Diplom (Maestría) y, en 1978, su doctorado en Matemáticas. Trabajó en la Universidad de Carbondale, Illinois, así como siete años en la Universidad de Brasilia. Fue Visiting Scholar de la Universidad de Jerusalén por tres semestres. Fue miembro fundadora del Centro ABC (Adaptive Behavior and Cognition) dirigido por Gerd Gigerenzer dentro de la Sociedad Max Planck, antes en Munich y después en Berlín. Durante los últimos 19 años ha sido docente del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica de Ludwigsburg. Su actividad ha sido básicamente como modeladora matemática en ciencias aplicadas y como educadora de futuros profesores de Matemáticas, concentrándose sobre temas didácticos.

## ANEXO

ProCivicStat © - Hoja de trabajo del estudiante, 5.115

### Deshielo de los Glaciares

Joachim Engel | Dominik Kleinknecht  
[engel@ph-ludwigsburg.de](mailto:engel@ph-ludwigsburg.de) | [dominik.kleinknecht@stud.ph-ludwigsburg.de](mailto:dominik.kleinknecht@stud.ph-ludwigsburg.de)  
Ludwigsburg Universidad de Educación, Alemania

Los glaciares se consideran indicadores climáticos porque reaccionan con sensibilidad y rapidez a las condiciones climáticas cambiantes. ¿Qué desarrollos se pueden observar en los glaciares de América? El derretimiento de los glaciares es una de las consecuencias inmediatamente observables del cambio climático. Incluso en fotografías con solo unos pocos años de diferencia, a veces se pueden ver cambios aterradores.



Fotos de la deglaciación por efectos del calentamiento global el nevado Pastoruri en los Andes centrales de Perú entre 2001 y 2007  
<https://www.efeverde.com/noticias/deshielo-glaciares-andes-unesco-peru/>

Según el National Geographic<sup>9</sup>, desde 1961 los glaciares de nuestro planeta han perdido más de 9.625 gigatoneladas de hielo, propiciando un aumento del nivel del mar de 27 milímetros. O lo que es lo mismo, cada año se derrite en todo el mundo tres veces el hielo que cubre los Alpes. Un desastre ambiental con un claro culpable: el calentamiento global.

Los glaciares se consideran indicadores climáticos porque reaccionan con sensibilidad y rapidez a las condiciones climáticas cambiantes.

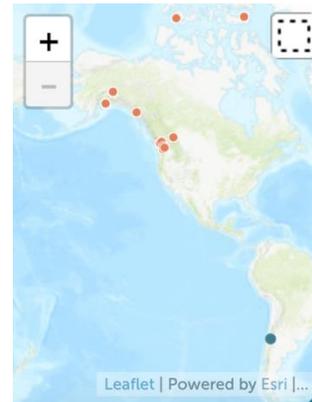
Implicaciones en los ecosistemas:

- Cambios en sistemas de hidrológicos y por ende en el abastecimiento de agua para los seres humanos y los ecosistemas
- Se esperan enormes aumentos en la cantidad de agua en invierno con una mayor sequía simultánea en verano.
- el aumento del riesgo de deslizamientos de tierra y desprendimientos de rocas
- el aumento del nivel del mar

<sup>9</sup> [https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/glaciares-han-perdido-96-billones-toneladas-hielo-50-anos\\_14140](https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/glaciares-han-perdido-96-billones-toneladas-hielo-50-anos_14140)

## Exploración de los datos

En el siguiente, se examinan los datos sobre el desarrollo de las masas glaciares. Los datos de los glaciares provienen de la base de datos de los llamados glaciares de referencia del World Glacier Monitoring Service. Para ser considerado un glaciar de referencia, los datos de medición deben estar disponibles durante al menos 30 años. Además, ningún evento como nieve artificial, avalanchas o medidas de protección podrá afectar el estado del glaciar. Los glaciares de referencia de América del Norte y del Sur fueron seleccionados para el estudio. Los conjuntos de datos consisten en las variables: país, nombre, año, longitud, latitud y balance de masa anual, así como el balance de masa acumulativo. La unidad de balance de masa se da en metros de agua equivalente (mWE) (ver la caja a la derecha).



ser

en

### Unidad de medida equivalente en agua

*Los glaciólogos expresan el balance de masa anual, es decir, el aumento o disminución del espesor de los glaciares en metros de agua equivalente (m WE).*

*El equivalente en agua indica el contenido de agua de los cambios de espesor medidos en el hielo. Un metro de hielo corresponde a aproximadamente 0,9 metros W.E.*



Setzen einer Messstange auf der Gletscherzunge.  
Bild: D. Vonder Mühl, Universität Zürich

La siguiente tabla muestra una sección del conjunto de datos.

Nombre	Pais	año	balance anual (en EA)	balance anual acumulado (en EA)	latitud	longitud
DEVON ICE CAP NW	CA	1980	-0.06	-0.92	75.42	-83.25
ECHAURREN NORTE	CL	1980	0.3	-1.07	-33.58	-70.13
GULKANA	US	1980	0.62	-5.78	63.28	-145.43
HELM	CA	1980	-0.94	-5.71	49.96	-122.99
LEMON CREEK	US	1980	-0.18	-4.95	58.39	-134.35
MEIGHEN ICE CAP	CA	1980	0	-2.15	79.95	-99.13
MELVILLE SOUTH ICE CAP	CA	1980	-0.07	-1.98	75.4	-115
PEYTO	CA	1980	-0.58	-4.16	51.66	-116.56
PLACE	CA	1980	-0.92	-8.21	50.43	-122.6
SOUTH CASCADE	US	1980	-0.99	-8.84	48.35	-121.06
WOLVERINE	US	1980	2.08	0.54	60.42	-148

Fuente: World Glacier Monitoring Service, [https://wgms.ch/products\\_ref\\_glaciers](https://wgms.ch/products_ref_glaciers)

Para la exploración de datos trabajamos con el software Common Online Data Analysis Platform CODAP



CODAP es un software educativo gratuito para el análisis de datos. Esta herramienta de ciencia de datos basada en la web está diseñada como una plataforma para desarrolladores y como una aplicación para estudiantes en los grados 6-14.

Para comenzar haga clic [aquí](#)<sup>10</sup>

### Preguntas claves de investigación

- ¿Cómo debe entenderse el indicador de balance de masa? ¿Qué dice su unidad "m WE"?
- ¿Cómo se puede interpretar el balance de masa acumulativo?
- ¿Por qué el valor del balance de masa acumulativo en el primer punto de datos de todos los glaciares es cero?
- ¿Qué diferencias en el desarrollo de los glaciares se pueden observar? ¿Puedes identificar un patrón?
- ¿Qué está causando el retroceso de los glaciares? ¿Cómo se desarrolla esta disminución en el transcurso de los datos de medición?
- ¿Cómo puede ser que el balance de masa acumulado de algunos glaciares sea positivo? ¿No hay cambio climático allí?
- ¿Cuáles son los efectos del retroceso de los glaciares (suministro de agua, niveles del mar, ecosistemas, turismo)?

### Refinamientos

El procesamiento de los registros de datos obviamente redujo la demanda de habilidades en tecnología de la información (faceta 9). No hay duda de que un enfoque más abierto, en el que inicialmente solo esté disponible la fuente de Internet de los conjuntos de datos, sería una posibilidad interesante para plantear la afirmación. La reducción se convierte así en parte del trabajo y hace necesario tratar más intensamente con los datos en bruto; De esta forma se pueden adquirir o aplicar conocimientos básicos del formato CSV. Los balances de masa acumulados ya no forman parte de los conjuntos de datos y primero deben calcularse como una forma de

<sup>10</sup> <https://bit.ly/3JPOMcT>

comparar los glaciares. ¡El cálculo se puede realizar en CODAP mismo con la ayuda del complemento Transformers! Suma acumulada que se implementará. El contenido del estudio también podría ampliarse con datos sobre la evolución de la temperatura media global, que ha ido aumentando significativamente desde la década de 1980 y está relacionada con la aceleración del retroceso de los glaciares. La NASA hace que estos datos estén fácilmente disponibles.

# ESTADÍSTICA CON PROYECTOS: UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

JESÚS E. PINTO SOSA

## RESUMEN

El desarrollo profesional docente, como proceso de transformación de la práctica docente, es una prioridad en la formación continua del profesorado que enseña estadística en diferentes niveles educativos, particularmente de aquellos docentes cuya formación inicial y experiencia no es la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En este sentido, pocas son las propuestas que existen en el campo de la educación estadística dirigidas a fortalecer la preparación de los docentes en ejercicio. El objetivo de este capítulo es presentar una propuesta de formación del profesorado sobre la estrategia de estadística con proyectos en el aula escolar, en una asignatura o curso, principalmente a nivel secundaria, bachillerato y universidad. Los fundamentos teóricos en que se sustenta la propuesta son principalmente el desarrollo del pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), las recomendaciones emitidas en la Guía para la Evaluación y la Enseñanza de la Educación Estadística (GAISE, por sus siglas en inglés) por Franklin et al. (2007), así como las orientaciones del Proyecto Internacional sobre Alfabetización Estadística (ISLP, por sus siglas en inglés), y desde un paradigma práctico y crítico del currículo. Como resultado del análisis, se presenta la propuesta de un taller organizado en diferentes partes y etapas, que, con apoyo de la guía para el diseño de proyectos en estadística, permite servir como estrategia didáctica en la profesionalización docente. Las experiencias compartidas por los docentes-participantes en el taller dan cuenta del cambio en las concepciones, creencias y prácticas del profesorado en la enseñanza de la estadística.

Palabras clave: Formación de profesores, Enseñanza de la estadística, Estadística, Proyectos de investigación, Talleres, Comunidad de práctica

## INTRODUCCIÓN

En los últimos 20 años, la literatura en educación estadística y sus tendencias marcan la necesidad de un cambio de enfoque en la didáctica de la estadística a nivel mundial, en los diferentes niveles educativos. Para hacer realidad este cambio se requiere trabajar y mejorar los programas de formación inicial y continua del profesorado. Diversos estudios revelan esta necesidad; por ejemplo, autores como Ruiz et al. (2009) identifican en los futuros profesores de primaria, la falta de familiaridad con proyectos estadísticos y actividades de modelización. Así también, Pinto et al. (2007) confirman la necesidad de una formación específica en la didáctica de la estadística en profesores universitarios, específicamente en el análisis de conceptos y el desarrollo de proyectos de investigación donde los

estudiantes experimenten las etapas o fases para llevar a cabo el análisis e interpretación de la información, a partir de datos reales y significativos.

Al respecto, desde 2009, Batanero expresó que uno de los retos o tareas pendientes que enfrenta la educación estadística es mejorar los programas de desarrollo profesional docente dado que el profesorado evidencia problemas al trabajar con proyectos estadísticos debido a que no poseen el suficiente conocimiento al respecto, y por consiguiente pierden la oportunidad de involucrar más a los estudiantes en la investigación y profundizar en su pensamiento estadístico, en lugar de cálculos rutinarios. Esto quedó igualmente confirmado por los estudios latinoamericanos citados en Hernández et al. (2013), quienes corroboran la necesidad de cambiar el enfoque de la enseñanza de la estadística, buscando un mayor énfasis en la introducción de esta disciplina con proyectos en el salón de clases.

Por lo tanto, se requiere un “cambio metodológico que incida en el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales y utilización de la simulación” (Ortiz et al. 2009, p. 112). No obstante, tal como lo afirman Batanero y Arteaga (2018), “pocos [son los docentes que] han seguido un curso completo de estadística durante su formación, menos aún han trabajado con proyectos estadísticos” (p. 1411).

¿Cuál es ese cambio metodológico?, o bien, ¿cuál es el cambio que se requiere en la didáctica de la estadística? Batanero (2009) sugiere la necesidad de incluir el trabajo con proyectos en la formación del profesorado de estadística. Autores como Batanero y Arteaga (2018), Islas y Pinto (2017) y Hernández et al. (2013) recomiendan que, a través de estrategias, como *Estadística con proyectos (EstPro)*, se mejoran los diferentes componentes del conocimiento estadístico para la enseñanza.

Recientemente, autores como Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz (2021) aseguran que es importante orientar los esfuerzos hacia la formación de ciudadanos alfabetizados estadísticamente y plantean como estrategia a emplear el trabajo con proyectos como metodología para promover el aprendizaje activo de manera colaborativa, lo que implica un reto para los profesores en ejercicio. Vázquez y García-Alonso (2020), por su parte, proponen una educación estadística para el desarrollo sostenible en la formación del profesorado, a partir de la inclusión de acciones y actividades en el análisis de los objetivos del desarrollo sostenible (ODS). Los autores manifiestan que “es necesario generar acciones formativas para el profesorado que permitan reorientar la enseñanza de la estadística a través de proyectos enfocados en contextos reales fundamentados en los ODS” (p. 125). Vázquez (2020) sugiere que para contribuir al desarrollo de la competencia clave de sostenibilidad de manera integral con los ODS es necesario alguna estrategia didáctica como: 1) abordar la educación para el

desarrollo sostenible a partir de la interdisciplinariedad, 2) trabajar con la metodología de aprendizaje basada en proyectos y 3) resolver situaciones problemáticas en entornos colaborativos.

## **MARCO DE REFERENCIA**

Lo anterior llevó a revisar distintos referentes que dan cuenta de la necesidad, los fundamentos y las características principales de la propuesta de formación que se propone. Primero, se muestran las investigaciones localizadas en las que se ha hecho uso de la estadística con proyectos. Segundo, se indagó sobre aquellos trabajos enfocados a programas de formación de profesores de estadística, y por último, se describe el marco conceptual sobre el significado y características de la EstPro.

### **Investigaciones sobre uso de la estadística con proyectos**

Los estudios encontrados sobre EstPro se pueden agrupar en tres categorías. Por un lado, aquellos en la que docentes de carreras distintas a las pedagogías implementan el trabajo con proyectos en alguna asignatura de Probabilidad y Estadística. En un segundo grupo están trabajos que investigan de qué manera llevar la estrategia en futuros profesores. Un tercer grupo es el análisis desde la mirada del currículo.

En el primer grupo, están trabajos como el de Rincón (2019) que se centró en el desarrollo de competencias estadísticas (ej. análisis exploratorio de datos) a partir del uso de proyectos, en una asignatura de Probabilidad y Estadística que se trabajó con futuros ingenieros civiles de 5° semestre de la Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja, en Boyacá Colombia. Se analizó de qué manera un docente trabaja con la estrategia de estadística con proyectos. Se identificó la necesidad de fortalecer la formación del docente respecto a las etapas del desarrollo con proyectos, como son la habilidad para orientar las fases de elección del tema y planteamiento de preguntas, así como la necesidad conocer sobre los intereses del estudiantado y mejorar la habilidad de manejo de diversos temas de investigación en la que los estudiantes intervienen.

Islas y Pinto (2017) llevaron a cabo una investigación para conocer, a través de una escala tipo Likert, la percepción de 310 estudiantes de bachillerato de una escuela pública en Mérida, México; respecto de la utilidad de la estrategia de EstPro en un curso introductorio de estadística. Encontraron que solo el 16.4% manifestó un nivel alto de conocimiento y uso de la estadística en su vida, y un 40% de los estudiantes reconocieron tener dificultad en utilizarla para resolver varias situaciones cotidianas o de su vida escolar, como resolver tareas de otras asignaturas en las que se requiere de la estadística y contestar correctamente las preguntas del examen para ingresar a la universidad. Los autores sugieren adecuar e implementar un repertorio de actividades de la EstPro con el propósito de lograr un verdadero significado intrínseco en el estudiantado.

En el segundo grupo están las investigaciones de Alsina et al. (2020) y Vázquez (2021). En el primero, se presentan algunas estrategias didácticas o experiencias contextualizadas con datos de la COVID-19, a modo de proyectos, dirigido a docentes para que implementen con alumnos de primaria e introduzcan la alfabetización estadística a través de temas de probabilidad y estadística. Cada experiencia de estadística contiene los siguientes elementos: denominación de la experiencia, edad a quien está dirigida, contenidos implícitos y descripción de la actividad. Por su parte, Vázquez (2021) propone un conjunto de experiencias de aula para promover competencias para la sustentabilidad, en la que cada una contiene: nombre de la experiencia, edad a quien está dirigida, contenidos implícitos, objetivo del desarrollo sostenible, competencia clave de sostenibilidad y descripción de la actividad.

Batanero y Arteaga (2018) utilizan la estrategia con proyectos con profesores en formación inicial de la Universidad de Granada. La secuencia de actividades que proponen se centra en la presentación del proyecto y la realización del experimento, recogida de datos, análisis de datos, conclusiones y análisis de los gráficos producidos por los estudiantes. Concluyen que, a través de la EstPro, los futuros docentes recogen sus propios datos para averiguar si sus intuiciones sobre la aleatoriedad eran o no correctas, aplican sus conocimientos estadísticos elementales y el trabajo con proyectos les proporcionó un ejemplo de cómo llevar a cabo la enseñanza de la estadística con esta estrategia.

Por último, un tercer grupo de estudios están asociados desde el campo del currículo. Marin y Pinto (2017) realizaron un análisis curricular del diseño de 39 programas de asignaturas relacionadas con probabilidad y estadística de distintas áreas disciplinares (ej. salud, ciencias sociales, humanidades, ingeniería y ciencias exactas y artes) de una universidad pública en México. Sólo 4 de 39 programas menciona la palabra “proyecto estadístico”. Cinco programas declaran solicitar algún tipo de proyecto como criterio o forma de evaluación, pero no se menciona como estrategia didáctica para implementar durante las clases. Encontraron que la estrategia de enseñanza más común en temas de estadística es la exposición. Concluyen que un alto porcentaje de las asignaturas propone un objetivo centrado a la “aplicación”, pero esto resulta inconsistente con las estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación, donde prevalece las exposiciones, los ejercicios y las pruebas escritas, respectivamente.

### **Programas de formación de profesores de estadística**

La elaboración y publicación de propuestas de diseños de programas de formación continua en docentes, desde el campo de la educación estadística es incipiente, particularmente en Latinoamérica. Uno de estos estudios es el de Tauber y Redondo (2016), quienes describen las características y resultados de formación, al incorporar el módulo de Enseñanza de la Probabilidad y

Estadística (de 46 horas, distribuidas en 8 sesiones), como parte del programa de formación virtual de la Especialización Docente de Nivel Superior en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria, en Argentina, dirigido a profesores de matemáticas de nivel secundario o formadores de profesores. Se basaron en lecturas de artículos y de videos del campo de la educación estadística, así como de *applets* en línea y la participación en foros de discusión y de consulta. Parte de su estrategia consistió en que al final del curso los profesores en formación continua elaboraron como trabajo final un análisis didáctico de un proyecto estadístico de algún curso del nivel secundario, basado en promover el sentido y la cultura estadística apoyándose en el ciclo investigativo y preguntas de investigación.

En España, Batanero y Arteaga (2018) llevaron a cabo una propuesta dirigida a futuros profesores de Educación Primaria que cursan en la Universidad de Granada, para enseñar estadística en ese nivel educativo como complemento de su formación inicial. La estrategia formativa consistió en tres sesiones de clase, de dos horas cada una, en donde los participantes realizaron proyectos estadísticos recogiendo sus propios datos, a través del ciclo de investigación estadística y el análisis de gráficos producidos.

A nivel latinoamericano, desde hace cerca de 20 años, en países como Argentina, Brasil, Costa Rica, Chile, Colombia y México, se ha reconocido la necesidad de incorporar tópicos estocásticos en su currículo escolar principalmente en educación primaria y secundaria (Cuevas y Ramírez, 2013). Esto ha representado un gran desafío para los docentes, quienes según Cuevas y Ramírez (2013):

Han observado la incorporación de temas estadísticos en los programas de estudio en todos los grados escolares, la incorporación de mecanismos novedosos para evaluar los aprendizajes estudiantiles en términos del cumplimiento de estándares, y un nuevo catálogo de recomendaciones para promover el desarrollo de una cultura estadística en sus aprendices. Luego, al parecer los artífices de los programas de estudio han pasado por alto aspectos esenciales para que los objetivos propuestos se alcancen. Algunos están estrechamente ligados a la formación profesional y pedagógica del profesorado (pp. 107-108).

En México, a partir de 2017 los planes de estudio de educación básica (preescolar, primaria y secundaria) declaran de manera explícita como objetivo el desarrollo del pensamiento estocástico en el estudiantado y como una estrategia el trabajo orientado a proyectos, aunque de este último no se ahonda o detalla suficiente información al respecto (Pinto, 2019). Sánchez y Hoyos (2013) afirman que en México “la agenda de elaboración de un currículo o programa de educación estadística para el desarrollo de competencias todavía está pendiente” (p. 244), lo que significa la necesidad de que todos los actores involucrados trabajen colaborativamente para garantizar mejoras reales en el desarrollo y evaluación del currículo en estadística.

Tanto en México, como en Latinoamérica, a nivel educación media superior y superior, no se encontró información publicada o evidencia, respecto de cambios en los planes y programas de estudios que se proponga desde el dominio de la educación estadística. Al parecer los esfuerzos se han encaminado más en la educación preescolar, primaria y secundaria.

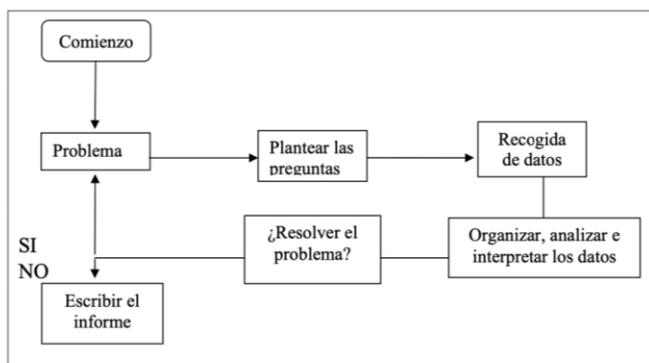
### Significado y características de la estadística con proyectos

La estadística con proyectos es una “propuesta didáctica que comprende un conjunto de tareas, organizadas y secuenciadas, llevadas a cabo mediante el trabajo colaborativo con el objetivo de obtener un resultado o producto determinado” (Gil, 2010, p. 122). Es una estrategia en la que los estudiantes trabajan colaborativamente, con la orientación del docente, eligen un tema a investigar, plantean una problemática, recolectan datos para dar respuesta a la pregunta, resumen y analizan esa información y comunican los resultados.

Andrade et al. (2017) reconocen la EstPro como un enfoque en el que se “recrean los procesos de investigación estadística y sugieren ideas para la enseñanza de la estadística” (p. 91), mientras que Vázquez (2020) la refiere como una metodología o estrategia de aprendizaje. Batanero y Díaz (2011), en su libro *Estadística con proyectos*, la conceptualizan como estrategia de enseñanza a través o basada en proyectos y como la mejor forma para desarrollar el pensamiento estadístico. Las autoras definen los proyectos como pequeñas y verdaderas investigaciones, donde se integra la estadística y afirman que su principal característica es que sean realistas.

La EstPro, según Batanero et al. (2011) se lleva cabo a partir de diferentes fases asociadas a una investigación estadística, como son: “planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado” (p. 13). La Figura 1 representa el esquema de desarrollo de un proyecto de acuerdo con estos autores.

**Figura 1.** Esquema del desarrollo de un proyecto en estadística



**Fuente:** Batanero et al. (2011, p. 23)

Los referentes presentados dan cuenta de que el fundamento de la EstPro recae en las investigaciones estadísticas, que como señala Zapata-Cardona (2016), es una estrategia de enseñanza que consiste en el desarrollo de “proyectos y exploraciones que incluyen el planteamiento de preguntas estadísticas, diseño de planes de recolección de información, análisis, interpretación y crítica de los datos, y argumentos e inferencias” (p. 75).

De igual manera, la EstPro se sustenta en el desarrollo del pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), la propuesta de Burgess (2008) sobre cómo el docente puede desarrollar este pensamiento en el salón de clases, las recomendaciones emitidas en la Guía para la Evaluación y la Enseñanza de la Educación Estadística (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*, GAISE por sus siglas en inglés) por Franklin et al. (2007), así como en las orientaciones del Proyecto Internacional sobre Alfabetización Estadística (*International Statistical Literacy Project*, ISLP, por sus siglas en inglés, ver <https://iase-web.org/islp/>). Por ejemplo, fueron claves las seis recomendaciones que emitió la GAISE respecto a los elementos que se sugieren incluir en todo curso de estadística:

1. Enfatizar la alfabetización estadística y el desarrollo del pensamiento estadístico.
2. Usar datos reales.
3. Centrarse en la comprensión conceptual
4. Sostener un aprendizaje activo en el aula.
5. Usar tecnología para desarrollar conceptos y analizar datos.
6. Usar evaluaciones que mejoren el aprendizaje de los estudiantes.

A partir de lo anterior, se conceptúa a la estadística como una herramienta para comprender y tomar decisiones sobre la realidad de los fenómenos que acontecen en la vida personal y profesional, centrándose en el pensamiento estadístico y los ciclos de investigación.

No obstante, como lo señalan Tauber et al. (2019), el reto es:

lograr una transición entre el paradigma del *tratamiento de la información* [marcado por el cálculo, la técnica, el concepto aislado, la elaboración de ejercicios descontextualizados] al paradigma del *desarrollo del pensamiento estocástico*, lo que llevará al profesor a confrontar sus creencias, concepciones y conocimientos sobre la estadística, su aprendizaje y enseñanza (p. 321)

Esto puede implicar un cambio en los roles o actuación tanto de los estudiantes como del docente al utilizar la estrategia de EstPro. La Tabla 1 ejemplifica estas acciones o conductas.

**Tabla 1.** *Acciones del rol de estudiantes y el docente al utilizar estrategia EstPro*

Acciones del rol de los estudiantes	Acciones del rol del docente
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Integrarse por equipos</li> <li>• Elegir un tema y necesidad de investigación</li> <li>• Definir los objetivos de investigación</li> <li>• Argumentar la necesidad de medición</li> <li>• Definir la naturaleza y alcance del proyecto</li> <li>• Definir y argumentar la población y muestra</li> <li>• Seleccionar y llevar a cabo técnicas de recolección (trabajo de campo)</li> <li>• Analizar datos reales con ayuda de herramientas tecnológicas</li> <li>• Presentar y difundir los resultados obtenidos</li> <li>• Autoevaluar su aprendizaje</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Motivar hacia el logro del aprendizaje</li> <li>• Orientar hacia el análisis y discusión</li> <li>• Monitorear el trabajo colaborativo</li> <li>• Contar con espacios de acompañamiento (asesoría) Conducir al estudiante hacia el <i>ciclo investigativo</i></li> <li>• Enfatizar hacia la comprensión, uso y significado (no hacia el cálculo, la técnica y fuera de contexto)</li> <li>• Desarrollar la cultura del “análisis exploratorio de datos” (AED)</li> <li>• Evitar caer en el “activismo”</li> <li>• Enfatizar en procesos de autoevaluación y coevaluación</li> <li>• Incorporación de la tecnología</li> </ul>

**Fuente:** Elaboración propia

Con base en el análisis de lo descrito hasta ahora, se reconoce la relevancia y necesidad de formar a los docentes en el desarrollo de la EstPro. A pesar de esto, como se expuso anteriormente, son incipientes los trabajos que existen, sobre todo en México y Latinoamérica y en idioma castellano, de propuestas o programas de formación continua del profesorado de estadística, específicamente dirigidos a docentes de educación secundaria, media superior y superior. Llama la atención, que no se encontró investigaciones y propuestas desde el ámbito del desarrollo curricular que permita a las instituciones formadoras de profesores contar con programas, cursos o talleres de manera permanente para el desarrollo de estrategias didácticas, como lo es la EstPro.

Consecuentemente se vislumbra la necesidad de desarrollar, publicar y compartir experiencias y programas de formación docente, diseñados desde un currículo fundamentado en la educación estadística. Es necesario reivindicar el valor de los estudios desde el ámbito del currículo, centrado en la formación continua o permanente del profesorado en ejercicio, dirigido para aquellos docentes que no cuentan con una preparación especializada en didáctica de la probabilidad y la estadística. La investigación en y sobre el desarrollo curricular aporta elementos para fundamentar el diseño de una propuesta, según fuentes y tendencias (en educación estadística), mismo que permiten identificar la

necesidad de dirigir la mirada hacia un sector que no cuenta con una alternativa de actualización y que le permita mejorar su enseñanza (Casarini, 2013).

Batanero (2009), sobre la base de Godino et al. (2008), describe la necesidad formativa de manera más concluyente:

Sobre todo cuando hay poco tiempo de enseñanza, se debiera implementar un ciclo formativo en que los profesores primero trabajan con un proyecto estadístico o una unidad didáctica y luego lo analizan desde el punto de vista didáctico como un medio de enriquecer simultáneamente el conocimiento estadístico y profesional del profesor (p. 13).

La pregunta de investigación que orientó este trabajo fue, desde el área del currículo en educación estadística, ¿cómo formar al profesorado para que enseñe estadística a través de proyectos? El propósito fue contar con una estrategia formativa, que les permita a los docentes reflexionar sobre su práctica y generar un cambio en la manera de enseñar, utilizando la EstPro. De la misma manera, se buscó que la propuesta sea una herramienta que le sirva a ajustar el programa de asignatura o curso, así como diseñe e implemente la EstPro según las necesidades y características de su contexto.

Este capítulo presenta una propuesta de formación del profesorado sobre la estrategia de estadística con proyectos (*EstPro*) en el aula escolar, en una asignatura o curso, principalmente del nivel secundaria, bachillerato y universidad. Adicionalmente a los fundamentos en que se basa la propuesta, se incluye la base conceptual y metodológica para el diseño, así como sus características pormenorizadas y la experiencia compartida por aquellos docentes-participantes quienes han tomado parte de la estrategia de formación.

## MATERIAL Y MÉTODOS

Dado que se trata de una propuesta de formación docente desde el campo del currículo en educación estadística, a continuación, se presentan las características del diseño que lo fundamentan, así como las etapas o procedimiento que se llevó a cabo.

### Principios curriculares

De acuerdo con los referentes antes expuestos, la propuesta se fundamenta en cuatro principios curriculares que guiaron tanto el diseño como su implementación. A continuación, se describen brevemente:

*Reflexión de la práctica.* Se trata de un programa que busca desarrollar formas de pensar a partir de la reflexión de la práctica docente, en diferentes escenarios y contextos. El propósito, como señala Llinares (2014), es proporcionar a los profesores diferentes oportunidades de desarrollar un aprendizaje colaborativo con el fin de potenciar la negociación de los significados dados a la

información teórica, de tal manera, que las experiencias dentro del taller sean instrumentos conceptuales que ayuden a mejorar la práctica docente.

*Enfoque de profesionalización basado en la modalidad de taller.* Tiene como característica el conocimiento en uso, es decir, parte del conocimiento y experiencia del profesor y de ahí se centra a generar la discusión y reflexión de la práctica tanto individual como grupal de los participantes, así como la puesta en común en escenarios reales de aprendizaje. El facilitador o responsable de cada taller tendrá el desafío de lograr que el aprendizaje esté centrado en el trabajo con los profesores y no en exposiciones magistrales en donde el instructor sea el protagonista del proceso.

*Comunidad de práctica.* Definida como un conjunto de personas (profesores) que, a través de un proceso colaborativo continuo, comparten la experiencia, la investigación y la reflexión sobre su docencia (acción), y tienen como finalidad mejorar sus competencias docentes para producir mejores resultados para sus alumnos. A través de una comunidad de práctica profesional los profesores vinculan cuestiones de contenido, gestión de la enseñanza en el aula asociada a dicho contenido, y particularidades sobre el aprendizaje pretendido en los estudiantes (Llinares, 2000).

*Perspectiva crítica.* Las investigaciones estadísticas a llevar a cabo a través de la EstPro se sustentan igual desde un paradigma sociocrítico de la educación matemática crítica, de tal manera que se deben favorecer estudios y proyectos que aporten a la reflexión, análisis y resolución de problemas en contextos de la sociedad que puedan aportar a la ciudadanía crítica (Zapata-Cardona, 2018).

Tal como lo afirma Batanero (2009), se trata de una propuesta en la que los docentes se involucren en los procesos formativos, en los que se familiaricen y se pongan en las mismas situaciones de aprendizaje que enfrentan los estudiantes, es decir, para que vivan y comprendan más lo que implica la EstPro.

### **Metodología del diseño**

La elaboración del programa se llevó a cabo en función de la metodología de diseño curricular de Díaz-Barriga et al. (1990) y de Díaz-Barriga (2004) para el diseño específico de los elementos del taller. En síntesis, el procedimiento fue el siguiente:

1. Búsquedas especializadas sobre investigaciones de estadística con proyectos, a nivel internacional y nacional. Se indagó referentes sobre el significado y características de la EstPro, así como investigaciones y experiencias didácticas que han utilizado la estrategia con proyectos.
2. Identificación de la necesidad y demanda de la propuesta. Consistió en el análisis de la literatura y de entrevistas a docentes de secundaria, bachillerato y universidad, así como de

la experiencia como facilitador (formador) en programas de actualización de docentes de estadística. A través de los estudios localizados igual se identificó las necesidades formativas y la demanda.

3. Selección y análisis de los referentes necesarios a considerar, desde la educación estadística. Consistió en la revisión de los avances y tendencias respecto a la didáctica de la estadística y de autores que han escrito sobre recomendaciones para tener en cuenta en los programas de formación de docentes.
4. Revisión y análisis de propuestas curriculares con características similares. Tuvo la finalidad de averiguar y revisar las características de programas de profesionalización o actualización docente en estadística, así como analizar sus fundamentos, elementos, organización y estructura.
5. Elaboración de la fundamentación de la propuesta, principios curriculares y características esenciales del diseño curricular, particulares a la propuesta que se presenta.
6. Definición de los tipos y características de los proyectos en estadística, que permitió los docentes contar con formas distintas de llevar a cabo la EstPro en función del programa de la asignatura que imparten.
7. Decisión y argumentación de la modalidad del programa formativo, que por los principios curriculares declarados se decidió que sean talleres de carácter vivencial y experiencial.
8. Diseño de la *Guía para el diseño de proyectos estadísticos*. Se trata de un documento para los docentes cuya finalidad fue apoyar el proceso de definición y planeación didáctica de su curso para llevar a cabo una enseñanza a través de proyectos estadísticos.
9. Definición, descripción y contenido de las características de la propuesta, organizado por:
  - Intencionalidades
  - Objetivos de aprendizaje
  - Contenidos
  - Tipos y características de los proyectos en estadística
  - Orientaciones didácticas importantes
  - Guía para el diseño de proyectos en estadística
  - Actividades sugeridas
  - Sesiones y momentos

10. Implementación del taller en diferentes escenarios y contextos, que consistió en poner en marcha la implementación de la EstPro con profesores en ejercicio.
11. Evaluación y recuperación de experiencias de los docentes-participantes sobre la utilidad del taller, a través de diarios de aprendizaje y encuestas, lo que dio cuenta de la utilidad del programa formativo, así como el reconocimiento e identificación de necesidades y retos que enfrentará el docente respecto de la EstPro.

Producto de esta metodología, a continuación, se describe el resultado obtenido, que consistió en una propuesta de formación continua docente donde se hace uso de la EstPro como estrategia de aprendizaje en las clases de estadística.

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

El diseño curricular consistió en una secuencia didáctica, en la modalidad de taller, el cual se le denominó “*Enseñar estadística en la escuela a través de proyectos*”, donde los docentes-participantes asumieron el rol de estudiantes para revolver preguntas que implicaba recogida de datos, organización, representación, interpretación y discusión de los resultados.

Una secuencia didáctica es un conjunto articulados de elementos del currículo, como son las intencionalidades, objetivos, contenidos, características, metodologías de enseñanza y actividades de aprendizaje y evaluación que, con el apoyo de una serie de recursos-herramientas, y la mediación de un docente, buscan el logro de los aprendizajes esperados (Tobón et al., 2010). Para fines de este trabajo, los componentes que constituyeron la secuencia didáctica fueron: características de la propuesta, intencionalidad, objetivos, contenidos, tipos y características de proyectos en estadística, orientaciones didácticas, guía para el diseño de proyectos en estadística, actividades de aprendizaje, sesiones y momentos.

### **Características de la propuesta**

Como se mencionó, se trata de un programa de formación y actualización, en la modalidad de taller, dirigido a docentes que imparten clases de estadística en cualquier nivel educativo. Es apropiado también para quienes desean incorporar la EstPro en algún momento o tema específico dentro de su programa de curso, que implica el aprendizaje de la estadística. La duración mínima y máxima recomendada del taller es de 4 y 8 horas, respectivamente. No obstante, la ampliación en el número de horas podría permitir contar con un espacio de prácticas con los docentes, lo que favorecería la apropiación y reflexión sobre la EstPro, así como diseñar de forma completa su propuesta didáctica de implementación. La duración ideal del taller es de 12 horas.

La Tabla 2 resume los elementos distintivos de la propuesta en términos de a quiénes está dirigida, el fundamento teórico, finalidad, características principales, resultados esperados e implicaciones de su implementación.

**Tabla 2.** *Finalidad, fundamento, características e implicaciones de la EstPro*

Elemento	Elementos principales
Dirigido a	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estudiantes de cursos de estadística</li> <li>• Estudiantes para profesores</li> <li>• Profesores en ejercicio o educación continua</li> </ul>
Fundamento teórico	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pensamiento estocástico</li> <li>• Alfabetización estadística</li> <li>• Investigación estadística</li> </ul>
Finalidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar y caracterizar, de acuerdo con cada contexto, las diferentes formas de utilizar la estadística a través de proyectos en la escuela</li> </ul>
Características	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Problemas, datos y contextos reales</li> <li>• Énfasis en el razonamiento</li> <li>• Aprendizaje inductivo y activo</li> <li>• Uso de las TIC</li> <li>• Análisis exploratorio de datos (AED)</li> </ul>
Resultados	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Centrado en el pensamiento estocástico</li> <li>• Vivenciar el aprendizaje del estudiante para profesor o profesor en ejercicio</li> <li>• Cambio de paradigma</li> </ul>
Implicaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisión de planes y programas de estudio</li> <li>• Necesidad de fortalecer la investigación sobre la práctica del docente</li> <li>• Caracterizar los tipos de proyectos en estadística</li> </ul>

**Fuente:** modificado de Tauber et al. (2019, p. 323-324)

### ***Intencionalidad***

La intencionalidad formativa del taller fue reflexionar en torno a la práctica docente de la enseñanza de la estadística en la escuela, por tal motivo, se partió del origen, importancia, significado y tipos proyectos a partir de las aportaciones de la literatura proveniente del campo de la educación estadística. Posteriormente, se revisaron diferentes ejemplos y pautas orientadoras para trabajar la EstPro en clases, así como una propuesta de diseño y desarrollo. Se trató de que el docente-participante defina y diseñe su propia secuencia didáctica para trabajar con sus estudiantes, tanto las estrategias como el proceso de seguimiento, la evaluación formativa y la presentación del proyecto final.

### ***Objetivos***

Dos fueron los objetivos principales del taller:

- a. Caracterizar, de acuerdo con cada contexto, las diferentes formas de utilizar la EstPro en la escuela.
- b. Diseñar una propuesta o guía para desarrollar e implementar la EstPro en la escuela.

### **Contenidos**

Los contenidos esenciales que se abordaron fueron:

- La enseñanza de la estadística en la escuela: avances, problemática y retos.
- Origen, significado y característica de la EstPro.
- Tipos, características y formas de trabajar la EstPro en la escuela.
- Una propuesta didáctica para el diseño de proyectos en estadística.
- Implementación, seguimiento y evaluación de los proyectos en Estadística.

### ***Tipos y características de proyectos en estadística***

El origen y los fundamentos de los tipos y características de los proyectos en estadística pueden verse en Flores y Pinto (2017). Para materializar el proceso del desarrollo de la EstPro, se asumieron las etapas de la investigación estadística (ver anexo), lo que permitió representar el proceso y coadyuvar una mayor claridad, conocimiento y comprensión del profesorado.

Adicionalmente, se presentan a los docentes dos clasificaciones cuya finalidad fue otorgar más elementos y posibilidades para tener en cuenta cuando se trabaja con proyectos en estadística. La Tabla 2 resume los tipos y características de los proyectos estadísticos, según Flores y Pinto (2017).

**Tabla 2.** *Tipos y características de los tipos de proyecto en estadística*

<b>Clasificación según</b>	<b>Tipos</b>	<b>Características</b>
Las etapas del proceso de investigación estadística	Etapa 0. Consideraciones previas	Decidir sobre el momento para llevar a cabo el proyecto, número de integrantes y asignación de los participantes.
	Etapa 1. Formular preguntas	Aclarar el problema actual y formular una (o más) preguntas que se pueden responder con datos.
	Etapa 2. Recolectar datos	Diseñar un plan para recopilar datos apropiados y emplear el plan para recopilar los datos.
	Etapa 3. Analizar datos	Seleccione y utilice representaciones estadísticas y medidas de resumen para analizar los datos.

Clasificación según	Tipos	Características
	Etapa 4. Interpretar datos	Interpretar el análisis (en el contexto) y relacionar la interpretación con la pregunta original.
La afinidad y alcances metodológicos	Empírico	Útil para experimentos cortos en escenario real, para comprobar una hipótesis y poner en juego las intuiciones, donde el estudiante interactúa con datos reales. Generalmente se apoya en objetos concretos o tangibles, útiles para investigaciones experimentales, cuasi experimentales y ex post facto; estudios correlacionales o comparativos; o réplica de investigaciones.
	Descriptivo	De carácter exploratorio o estudios tipo encuesta. Se identifican las variables que intervienen y busca que los estudiantes analicen información descriptiva e inferencial, en función de los datos recolectados. Se elabora un informe y se comunican los resultados.
	Contextual	Útiles para poner en juegos las variables asociadas al contexto y desarrollar en el estudiantado la habilidad de reconocer e interpretar la realidad social, desde distintas dimensiones como la política, geográfica, histórica, cultural, entre otros; así como desde la disciplina o interdisciplina.
	Didáctico	Puede elegir entre dos modalidades: <i>Ejemplo predeterminado:</i> los alumnos eligen un tema o pregunta de investigación que previamente el docente ya tiene enlistados y que tiene una finalidad específica relacionada con el objetivo o tópico estadístico a estudiar. <i>Espontáneos:</i> el docente elige un tema general al momento y que pueden ser realizados en el contexto del aula; los estudiantes recolectan la información para contestar esa pregunta y se formulan preguntas con base en el contenido para que todo el grupo trabaje de forma general. Buscan hacer mediciones específicas de rápida obtención, ya sea en el aula o de un día para otro (ej. con la familia, en el recreo, en la biblioteca)
La magnitud y alcance de la asignatura	Esporádico	Se realizan ocasionalmente, de 1 a 3 días, con delimitaciones sobre el tiempo, el objetivo de la asignatura, el nivel educativo el número de estudiantes, recursos y herramientas específicas, entre otros.
	Micro-proyecto	Se realizan en un período de tiempo determinado, de 1 a 4 semanas, donde a los estudiantes se les plantea un objetivo de aprendizaje, una tarea concreta y la realizan en condiciones específicas que el profesor les proporciona.
	Macro-proyecto	Se realizan a lo largo del ciclo escolar, semestre o cuatrimestres, es decir, durante la duración del curso y se realiza de manera gradual.

**Fuente:** modificado de Flores y Pinto (2017)

Esta forma de conceptualizar y caracterizar los proyectos ofreció miradas distintas desde donde se puede entender el trabajo docente, incorporando su intencionalidad didáctica, su rol y del estudiante, así como aspectos de organización y estructura curricular, con base en el objetivo de aprendizaje, el nivel educativo, los contenidos estadísticos y su profundidad del proyecto.

### ***Orientaciones didácticas importantes***

La EstPro está condicionada o influenciada por la conjugación o articulación de varios elementos que favorecen, o no, el diseño, implementación y evaluación. Cinco son los aspectos que juegan un papel clave: 1) la concepción que tiene el profesor de la enseñanza y aprendizaje de la Estadística, 2) el conocimiento del contenido a enseñar del profesor, así como del repertorio de formas diferentes que utiliza en clases, 3) el currículo escolar (planes y programas), 4) el tiempo (que establece el programa de Estadística, del profesor y de las actividades del estudiante) que dispone para su desarrollo en la escuela, y 5) el número de grupos y de estudiantes que tiene a su cargo el docente.

Por consiguiente, se sugiere que el docente reflexione sobre siete preguntas claves al momento de decidir trabajar con proyectos en estadística:

1. ¿Qué papel juega el alumno cuando aprende estadística?, ¿qué grado y características de involucramiento asume el alumno cuando aprende estadística?
2. ¿Qué “buenas preguntas” puede plantear el estudiante para encontrarle un significado intrínseco (aprendizaje significativo) a lo que aprende en estadística?, ¿qué “buenas preguntas” puede hacer el profesor para ayudar al estudiante a lograr una comprensión de los conceptos estadísticos?, ¿qué “buenas preguntas” le ayudan el profesor a desarrollar la EstPro?
3. ¿Qué tanto es posible coleccionar o disponer de datos en escenarios reales?, ¿qué implica para el estudiante?, ¿con qué dificultades se va a enfrentar?, ¿qué apoyos necesita y cómo superar esas dificultades?
4. ¿Cómo va a “representar” el estudiante lo aprendido?, ¿cómo se traduce el aprendizaje de la Estadística con proyectos en las formas de evaluación?, ¿qué es pertinente y factible?
5. Como profesor, ¿qué entiende por acompañamiento al estudiante?, ¿de qué tiempo dispone para la atención, aclaración y seguimiento del avance de los proyectos en Estadística?, ¿de qué manera puede incorporar el acompañamiento de los proyectos en sus clases?, ¿qué es pertinente y factible?
6. De acuerdo con el contexto donde labora como docente, ¿qué modificaciones o ajustes son necesarias realizar para el diseño, instrumentación, implementación y evaluación de la

Estadística con proyectos en clases?, ¿con qué puede iniciar para mejorar su enseñanza en ese sentido?

7. ¿Cómo evalúa habitualmente a sus alumnos en estadística?, ¿qué cambios se requieren?, ¿qué es pertinente y factible?

Estas preguntas y respuestas fueron orientadoras para la reflexión sobre la práctica del docente cuando enseña Estadística, e importantes a tener presente durante la impartición del taller y su relación con el desarrollo de la estrategia de EstPro.

### ***Guía para el diseño de proyectos en estadística***

Como instrumento didáctico, se le entregó al docente una *Guía para el diseño de proyectos en estadística* (disponible en <https://bit.ly/3RkGmgS>), misma que se utilizó durante el taller, en cinco grandes momentos, definidos por cada una de las partes que la constituyen:

Primera. Revisión, modificación o actualización curricular.

Segunda. De las etapas del proceso de investigación estadística.

Tercera. Tipo de EstPro según la finalidad y alcances metodológicos.

Cuarta. Tipo de EstPro según la amplitud y alcance de la asignatura.

Quinta. Consideraciones didácticas finales.

La Tabla 3 hace ver los elementos y el número de ítems/preguntas que contiene la guía, organizado por las distintas partes y etapas del proceso.

La guía fue un recurso útil para que el docente vaya reflexionando, comprendiendo el proceso y tomando decisiones sobre la forma más pertinente y factible de poder incorporar la estrategia de EstPro en sus clases.

**Tabla 3.** *Elementos de la guía para el diseño de proyectos en estadística*

Parte	Etapas	Elementos	Número de ítems/preguntas
Primera. Revisión, modificación o actualización curricular	Única	1. Contexto del estudiante	4
		2. Necesidad de modificación o actualización	
		3. Acciones específicas	
		4. Cambios en el rol docente	
Segunda. De las etapas del proceso de investigación estadística	0	5. Duración del proyecto	4
	Consideraciones previas	6. Número de integrantes	
		7. Características y asignación de integrantes de los equipos	
		8. Sugerencias didácticas	
1	9. Elección del tema	4	
	10. Formulación de la pregunta		

Parte	Etapas	Elementos	Número de ítems/preguntas	
	1 Formular preguntas	11. Definición del objetivo 12. Sugerencias didácticas	10	
	2 Recolectar datos	13. Recolección de datos 14. Sugerencias didácticas		
	3 Analizar datos	15. Recursos tecnológicos y tópicos estadísticos 16. Niveles de análisis y representaciones 17. Otros elementos de análisis 18. Sugerencias didácticas		6
	4 Interpretar resultados	19. De la presentación o exposición del informe 20. De la valoración del proyecto 21. Sugerencias didácticas		9
Tercera. Tipo de EstPro según la finalidad y alcances metodológicos	Única	22. Tipo de proyecto: descriptivo, empírico, contextual 23. Consideraciones importantes	2	
Cuarta. Tipo de EstPro, según la amplitud y alcance de la asignatura	Única	24. Tipo de proyecto: esporádico, micro-proyecto, macro-proyecto 25. Consideraciones importantes	2	
Quinta. Consideraciones didácticas finales	Única	26. Dificultades 27. Información del contexto 28. Papel de la asesoría o acompañamiento 29. Acciones didácticas complementarias 30. Necesidades 31. Comentarios generales	6	

**Fuente:** Elaboración propia

### ***Actividades sugeridas***

Dado que se pretende propiciar la reflexión sobre la práctica docente en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística, así como llevar a la toma de decisiones en el proceso de definición y construcción de una propuesta para implementar la Estadística por proyectos en clases, se sugiere que

el facilitador o persona responsable de coordinar e impartir el taller a los docentes, implemente estrategias como:

- a. *Aprendizaje por descubrimiento*, en la que los participantes se pongan en situación de “estudiantes” a través de ejemplos o casos específicos, que permita de manera inductiva modelar el funcionamiento de la EstPro. Al mismo tiempo, las actividades deben contemplar situaciones de aprendizaje de carácter vivencial.
- b. *Aprendizaje colaborativo*, a través de constitución diversa de participantes (en binas, grupos de tres o más integrantes) en distintos equipos, de tal modo que se propicie el diálogo, la discusión y el análisis sobre los aprendizajes.
- c. *Autoevaluación y coevaluación*, de tal manera que ayude a la introspección del proceso interno del docente-participante logrando confrontarlo con sus concepciones, creencias y práctica docente; así como reconocer errores, dificultades y áreas de mejora a partir del análisis de otros docentes.
- d. *Comunidad de práctica docente*, mediante la cual se focalice el interés de todos por llegar a la misma meta, así como generar diálogos, intereses, preocupaciones y experiencias compartidas. Se trata de verse como una comunidad en donde siempre se aprende de los demás, donde lo importante es el apoyo mutuo y lograr juntos la meta, a través de un liderazgo compartido.

Como complemento importante, es altamente recomendable que las situaciones o actividades de aprendizaje donde participen los docentes consideren el contexto de los asistentes al taller y los involucre de manera intrínseca en el aprendizaje de la EstPro. Ejemplos de este tipo de actividades que se llevaron a cabo se observan en la Figura 2.

**Figura 2.** Ejemplos de actividades de aprendizaje con los docentes-participantes

**Ejemplo 1**

**Propósito:** Que el estudiante participe en la elaboración de un proyecto "mini" en tiempo real de tal manera que la experiencia le permita identificar los elementos que pueden ser modificados en un proyecto de Estadística

**Nombre del proyecto:**  
Características generales de los asistentes del curso "Estadística con Proyectos"

¿Qué formación inicial tienes?  
El grado de satisfacción que tengo como profesor de Estadística  
¿Cuántos años de experiencia docente tienes en Estadística?

**Ejemplo 2**

**Propósito:** Que los participantes analicen, con ayuda de la *Guía para el diseño de proyectos en Estadística*, la pertinencia y factibilidad de llevar a cabo la EstPro en clases.

**Producto:**  
Foro "Hacia la incorporación de la EstPro en Secundaria: dificultades, retos y acciones" (mesa panel entre los participantes)

a. Cada representante de equipo expone entre 3 a 5 minutos una conclusión que responda al propósito y denominación del Foro  
b. Plenaria con los asistentes al Foro (preguntas, respuestas y comentarios)  
c. Conclusión

**Ejemplo 3**

**Estadística con proyectos**

**Momento 1:** 20 min

**Cuestionario "Enseñar Estadística en la escuela"**

1. Tres palabras que me vienen a la mente cuando escucho "Estadística" son...
2. La finalidad de la Estadística en la escuela es...
3. Mi manera de enseñar Estadística en la escuela es ...
4. El porcentaje de interés (0 a 100%) que los estudiantes manifiestan ante la Estadística es...
5. Un aspecto que requiero mejorar como profesora de Estadística es...
6. "Me siento seguro al enseñar estadística":  
TA - A - N/A/D - D - TD

Cada participante debe responder a cada pregunta

➔

**Proyecto:**  
**"Enseñar Estadística en la Escuela"**

Una vez que hemos dado respuesta, ahora busquemos la forma de coleccionar los datos de todos los participante del curso

a. Debemos coleccionar las respuestas de todos  
b. Cada pregunta será analizado por un equipo

Fuente: Elaboración propia

Como se aprecia, las distintas actividades representan los momentos de práctica en donde los docentes, de manera colaborativa, participan y se involucran en su propio proceso de aprendizaje; permitiendo, de manera permanente, procesos de evaluación diagnóstica y formativa, así como ponerse en el rol como estudiante.

Entre las diferentes actividades, se debe dar prioridad a aquellas que permitan a los estudiantes vivir el proceso cognitivo de las etapas declaradas por la GAISE: formular preguntas, recolectar datos, analizar datos e interpretar datos; propiciando articular estos momentos con la estrategia de EstPro y la guía de diseño antes mencionada. Además, se pueden añadir situaciones o casos tomados desde la investigación en educación estadística.

### Sesiones y momentos

En la Tabla 4 se aprecia la propuesta de sesiones y algunas consideraciones a tener en cuenta.

**Tabla 4.** Propuesta de sesiones y consideraciones al impartir el taller

Sesión (de 2 a 4 horas)	Consideraciones
Sesión 1. Origen, importancia, significado y tipos de proyectos en Estadística. Ejemplos y algunos resultados de investigación	<ul style="list-style-type: none"> <li>● A través de la modalidad de seminario, se presenta el marco de referencia de la EstPro, incluyendo preguntas de reflexión para responder tanto de forma individual como por equipos.</li> <li>● A modo de actividades de aprendizaje, los participantes comenzarán a responder a preguntas que los llevará a tomar decisiones sobre lo pertinente y factible en la implementación de EstPro.</li> </ul>

- Sesión 2. Construcción del diseño de una propuesta de Estadística con proyectos.
- Con la ayuda de la *Guía para el diseño de proyectos en Estadística*, los participantes comenzarán a constituir los elementos esenciales para llevar a cabo la estrategia en el aula. Las primeras decisiones tienen que ver con las modificaciones y ajustes al programa del curso, sopesando entre lo pertinente y factible.
  - Se sugiere que los profesores dispongan o cuenten con los programas, materiales o recursos con los que habitualmente enseñan Estadística con sus alumnos, así como computadora portátil para el trabajo en el aula.
  - Cada profesor tomará la decisión de definir un tipo de proyecto y de diseñar una secuencia didáctica al respecto, que sea susceptible de llevarse a cabo en un escenario real de clases.
- Sesión 3. Revisión y reflexión de los diseños de un programa de Estadística por proyectos.
- Se continua y finaliza el trabajo del diseño de la propuesta de EstPro, de tal manera que tenga la estructura general y las decisiones importantes tanto para el diseño como de la instrumentación (materiales y recursos), la implementación y evaluación.
  - Finalizar con la reflexión sobre las implicaciones, consideraciones y orientaciones generales o específicas para llevar a cabo la EstPro en clases, así como la dinámica de comunicación y acompañamiento a futuro que requieran los docentes.
- 

**Fuente:** Elaboración propia

De manera complementaria, el facilitador podrá conceptualizar, en cuanto a su intervención, el proceso completo del taller en cinco grandes momentos:

1. *Antecedentes.* Se aborda y analiza el significado de la enseñanza de la estadística, el origen y surgimiento de la EstPro, así como las implicaciones que tiene en la práctica actual.
2. *Marco de referencia de la EstPro y su clasificación.* Se basa en el significado, características y tipos de proyectos en estadística.
3. *Práctica docente.* Consiste en la incorporación de distintas actividades de aprendizaje en donde el docente-participante se involucra en acciones prácticas y de trabajo colaborativo con sus iguales.
4. *EstPro a través de actividades en el aula.* Se comparten distintas experiencias de cómo se puede abordar la estadística con proyectos en el aula, así como diversos recursos, materiales y herramientas tecnológicas de apoyo.
5. *Profesionalizar la enseñanza de la estadística.* A manera de cierre conducir a la reflexión sobre las dificultades, retos e implicaciones que tienen la profesionalización de la docente en estadística.

## CONCLUSIONES

El taller se ha implementado en cuatro ocasiones, donde han participado en total 82 docentes de distintos niveles educativos, principalmente de secundaria, bachillerato y educación superior, de diferentes nacionalidades. Estos docentes, son profesores en activo (en ejercicio), con formación inicial distinta al ámbito de la educación o la docencia, y sin conocimiento o experiencia previa sobre el uso de proyectos en estadística.

Se impartió durante la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa en su edición 30 (RELME 30) con sede en México en 2016, con 12 participantes. Igual en RELME 31, con sede Perú en 2017, con 32 participantes; en la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia, con 17 docentes), en el III Workshop en Concepción, Chile, con 21 docentes, igual en 2017. Además, en los últimos tres años ha sido implementado con futuros profesores de educación media y superior (con 31 alumnos), en futuros licenciados en enseñanza de las matemáticas (con 16 estudiantes), y en un par de cursos de Estadística en un Doctorado en Educación (con 22 docentes con formación inicial distinta, entre psicólogos, antropólogos, educadores, economistas, ingenieros y del área de la salud).

A través de los talleres impartidos, y de las actividades llevadas a cabo, se logró recoger información del profesorado que participó, como son: a) concepción sobre EstPro, b) dificultades, retos y acciones a mejorar en la práctica docente (resultados de mesa panel con los docentes), c) trabajo colaborativo en las prácticas, y d) diarios de aprendizaje, como cierre del taller.

Se buscó que los docentes-participantes vivan la experiencia de la EstPro desde el rol del estudiante, y con ello poner en juego sus conocimientos sobre estadística, sus concepciones y creencias. Los resultados de la evaluación del taller permitieron conocer la percepción del docente al término de este, identificar su opinión sobre la estrategia de EstPro, así como el efecto y utilidad que tiene en su práctica docente presente y futura. En este sentido, se han recuperado un total de 53 diarios de aprendizaje, que ilustra el efecto y utilidad de la estrategia EstPro en el profesorado, del programa del taller y la acción formativa llevada a cabo. Algunos ejemplos de títulos y fragmentos obtenidos de los diarios se ven en la Tabla 5.

**Tabla 5.** Muestra de títulos y fragmentos obtenidos de los diarios de aprendizaje

Títulos de los diarios	Ejemplo de fragmentos de los diarios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La educación estadística me ha llamado... pero no le he hecho caso</li> <li>• Reto y acción: un camino en estadística</li> <li>• Lo que requiero interiorizar y aplicar en mi práctica docente</li> <li>• Y lo que enseñaba... lejos de estadística con proyectos</li> <li>• Lo estamos haciendo bien, pero debe seguir mejorando</li> <li>• Rompiendo paradigmas con EstPro</li> <li>• Nuevos conocimientos, nuevos retos</li> <li>• Grandes expectativas, grandes sueños ...</li> <li>• La emoción de la EstPro</li> <li>• Inspiración aterrizada</li> <li>• Lo que está por venir</li> <li>• El día en que me identifiqué con los proyectos estadísticos</li> <li>• Un viaje en la enseñanza – aprendizaje de la estadística</li> </ul>	<p>“Vernos involucrados en actividad estadística como preámbulo para reflexionar el sustento teórico, fue genial”</p> <p>“Fue todo sorprendente, cómo a través de una pregunta tan sencilla se puede inducir, desarrollar, reforzar el conocimiento estadístico... Rompió con algunos paradigmas que yo tenía”</p> <p>“Pude mirar la estadística con otros ojos, no solo aprender sino reflexionar sobre mi propia práctica... tengo un gran reto para transformar mi práctica y fomentar en mi aula un aprendizaje activo en estadística... Sé que esta tarea no es sencilla, sino que es un proceso que implica tiempo y estrategias, que implica profundizar en el campo de la educación estadística”</p>

**Fuente:** Elaboración propia

La estrategia de EstPro representa una amplia variedad de características y formas de clasificación, lo que ofrece al profesor un abanico de posibilidades para trabajar en sus cursos de estadística. La propuesta de formación expuesta, representa una alternativa al docente para transitar de una estadística centrada en el cálculo y ejercicios (generalmente descontextualizados o sin significado para los estudiantes), a una estadística con proyectos, basada en la comprensión conceptual y con base en marcos de referencia de la educación estadística, al uso y significado intrínseco de la Estadística en sus vidas y práctica profesional, y que favorezca el pensamiento estadístico. Una alternativa que al mismo tiempo lo introduce al campo de la educación estadística y le ofrece algunas opciones de cómo llevar a cabo la EstPro al currículo real en el salón de clases.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, A., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L. y Rofríguez-Muñiz, L. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, 104, 99-128. [https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon104\\_7.pdf](https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon104_7.pdf)

- Andrade, L., Fernández, F., y Álvarez, I. (2017). Panorama de la investigación en educación estadística desde tesis doctorales 2000-2014. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 41, 87-107. <https://doi.org/10.17227/01203916.6039>
- Batanero, C. y Arteaga, P. (2018). Enseñanza de la estadística con proyectos y comprensión gráfica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1410-1417.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. *Actas do II Encontro de probabilidades e estatística na escola* (pp. 7-21). Universidade do Minho.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf>
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. En C. Batanero y C. Díaz (Ed), *Estadística con proyectos* (pp. 9-46). Universidad de Granada.
- Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/LASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI y IASE. [https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt08/T2P12\\_Burgess.pdf](https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt08/T2P12_Burgess.pdf)
- Casarini, M. (2013). *Teoría y diseño curricular*. Trillas.
- Cuevas, J. y Ramirez, G. (2013). Profesorado de estadística en América latina: necesidad de su caracterización desde la perspectiva social, pedagógica y disciplinar. En A. Salcedo (Ed), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y perspectivas* (pp. 99-124). Universidad Central Caracas de Venezuela.
- Díaz-Barriga, F. (2004). Evaluación de programas de asignatura. En S. Castañeda (Ed.), *Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica* (pp. 123-135). Manual Moderno.
- Díaz-Barriga, F., Lule, G. M., Pacheco, P. D., Saad, D. E. y Rojas-Drummond, S. (1990). *Metodología de diseño curricular para educación superior*. Trillas.
- Flores, A. y Pinto, J. (2017). Características de la enseñanza de la Estadística por proyectos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 263-271. <http://funes.uniandes.edu.co/12148/1/Flores2017Caracteristicas.pdf>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y otros. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework*. American Statistical Association. [https://www.amstat.org/education/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-statistics-education-\(gaise\)-reports](https://www.amstat.org/education/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-statistics-education-(gaise)-reports)
- Gil, A. (2010). Proyectos de estadística en primaria. Material editado por el Instituto Canario de Estadística (ISTAC). *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 75, 121-129
- Godino, J., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/LASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 LASE Round Table Conference*. International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.

- Hernández, S., Ruiz, B., Pinto, J. y Albert, A. (2013). Retos para la enseñanza y la formación de profesores de estadística en México. *Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones*, 20(2), 257-273. <https://doi.org/10.15517/rmta.v20i2.11665>
- Islas, A. y Pinto, J. (2017). Uso cotidiano de la estadística con proyectos en bachillerato. En P. Canto y A. Zapata (Coord), *La Educación para todos y todas a lo largo de la Vida* (pp. 179-184). Unas Letras.
- Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Italia* (pp. 109-132). SEM-SPCE.
- Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de Matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 26. Especial 25 años, 31-51. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Esp-1-2.pdf>
- Marín, J. y Pinto, J. (2017). Análisis curricular de los programas de estadística de una universidad pública. En P. Canto y A. Zapata (Coord), *La Educación para todos y todas a lo largo de la Vida* (pp. 168-173). Unas Letras.
- Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Análisis de la práctica docente en el ámbito de la educación estadística en educación secundaria. *Revista Paradigma*, 42(Extra 1), 191-220. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p191-220.id1023>
- Ortiz, J., Serrano, L., y Mohamed, N. (2009). Competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad. En L. Serrano (Ed), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 95-116). Universidad de Granada.
- Pinto, J. (2019, 11-14 de diciembre). *Análisis curricular de la formación inicial de docentes en matemáticas en México* [Conferencia magistral de clausura]. XXII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Mexicali, Baja California, México.
- Pinto, J., Marín, G. y Barrabí, E. (2007). Estudios de necesidades de formación de profesores que imparten estadística en carreras del área social. *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 451-463). Red CIMATES.
- Rincón, M. E. (2019). *Estadística por proyectos, construcción de tablas y gráficas en el análisis exploratorio de datos*. [Tesis de Maestría en Educación Matemática inédita]. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Rodríguez Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, 104, 99-128. [https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon104\\_7.pdf](https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon104_7.pdf)
- Ruiz, B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009). Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. En L. Serrano (Ed), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 57-74). Universidad de Granada.
- Sánchez, E. y Hoyos, V. (2013). La estadística y la propuesta de un currículo por competencias. En A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y perspectivas* (pp. 211-228). Universidad Central Caracas de Venezuela.
- Tauber, L. y Redondo, Y. (2016). Propuesta de formación virtual en enseñanza de la Estadística y la Probabilidad para profesores de matemática en ejercicio. En S. Estrella, et al (Coord), *Actas de XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. 475). PUCV. <https://www.sochiem.cl/documentos/actas-jnem/2016-valparaiso-xx-pucv.pdf>

- Tauber, L., Alvarado, H., Zapata-Cardona, L., Pinto, J. y Albert, A. (2019). Experiencias de enseñanza sobre probabilidad y estadística. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 316-326. <http://funes.uniandes.edu.co/13981/1/Mabel2019Experiencias.pdf>
- Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencia didáctica. Aprendizaje y evaluación de competencias*. Pearson.
- Vásquez, C. (2020). Educación Estocástica en el aula escolar: una herramienta para formar ciudadanos de sostenibilidad. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(2), 1-20. <http://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/mes/article/view/12889/11748>
- Vásquez, C. (2021). Proyectos estocásticos orientados a la acción: una puerta al desarrollo sostenible desde temprana edad. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 1(2), 1-29. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i2.10>
- Vásquez, C. y García-Alonso, I. (2020). La educación estadística para el desarrollo sostenible en la formación del profesorado. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 24(3), 125-147. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v24i3.15214>
- Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223–265.
- Zapata-Cardona, L. (2016, 10-12 de agosto). ¿Estamos promoviendo el Pensamiento Estadístico en la enseñanza? 2º *Encuentro Colombiano de Educación Estocástica*. Bogotá, Colombia. [http://acedest.org/2-encuentro/docs/Memorias\\_2ECEE.pdf](http://acedest.org/2-encuentro/docs/Memorias_2ECEE.pdf)
- Zapata-Cardona, L. (2018). Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. *Revista Yupana*, 10(16), 30-38. <https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7695>

## **STATISTICS WITH PROJECTS: A PROPOSAL FOR TEACHER TRAINING**

### **ABSTRACT**

The teacher professional development, as a process of transformation teaching practice, is a priority in the continuing education of teachers who teach statistics at different educational levels, particularly for those teachers whose initial training and experience is not teaching and learning statistics. In this sense, there are few proposals that exist in the field of statistical education aimed at strengthening the preparation of teachers. The objective of this chapter is to present a proposal for teacher training on the strategy of statistics with projects in the school classroom, in a subject or course, mainly at the secondary, high school and university levels. The theoretical foundations on which the proposal is based on mainly the development of the statistical thinking of Wild and Pfannkuch (1999), the recommendations issued in the Guidelines for the Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) by Franklin, et al (2007), as well as the guide of the International Statistical Literacy Project (ISLP), and from a practical and critical paradigm of the curriculum. As a result of the analysis, a proposal for a workshop organized in different parts and stages is presented, which, with the support of the guide for the design of projects in statistics, can be used as a didactic strategy in the professionalization of teachers. The experiences shared by the teachers-participants in the workshop show the change in the teachers' conceptions, beliefs and practices in the teaching of statistics.

Keywords: Teacher education, Teaching statistics, Statistics, Research projects, Workshops, Community of practice

## **ESTATÍSTICAS COM PROJETOS: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

### **RESUMO**

O desenvolvimento profissional docente, como processo de transformação da prática docente, é uma prioridade na formação continuada dos docentes que ensinam estatística nos diferentes níveis de ensino, particularmente para aqueles docentes cuja formação inicial e experiência não é o ensino e a aprendizagem de estatística. Nesse sentido, são poucas as propostas que existem no campo da educação estatística voltadas para o fortalecimento da formação de professores atuantes. O objetivo deste capítulo é apresentar uma proposta de formação de professores na estratégia da estatística com projetos em sala de aula escolar, em uma disciplina ou curso, principalmente nos níveis médio, médio e universitário. Os fundamentos teóricos em que se baseia a proposta são principalmente o desenvolvimento do pensamento estatístico de Wild e Pfannkuch (1999), as recomendações emitidas no Guia para Avaliação e Ensino da Educação Estatística (GAISE, na sigla em inglês) de Franklin, et al (2007), bem como as diretrizes do International Statistical Literacy Project (ISLP), e a partir de um paradigma prático e crítico do currículo. Como resultado da análise, apresenta-se a proposta de uma oficina organizada em diferentes partes e etapas, que, com o apoio do guia para elaboração de projetos em estatística, permite servir como estratégia didática na profissionalização docente. As experiências compartilhadas pelos professores-participantes da oficina mostram a mudança nas concepções, crenças e práticas do corpo docente no ensino de estatística.

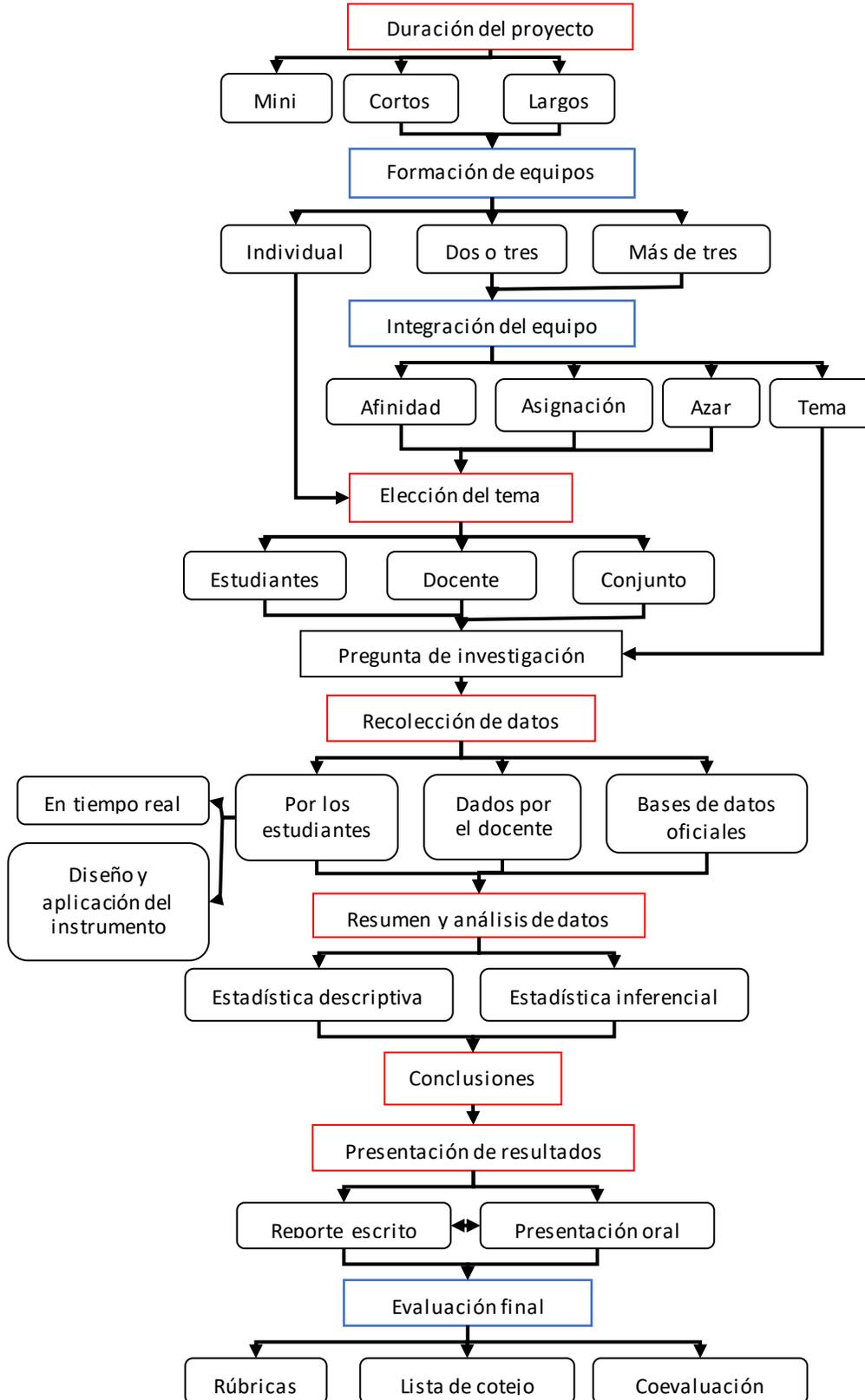
Palavras-chave: Formação de professores, Ensino estatístico, Estatística, Projetos de Pesquisa, Workshop, Comunidade de Prática

JESÚS E. PINTO SOSA  
*Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, México*  
[psosa@correo.uady.mx](mailto:psosa@correo.uady.mx)  
<http://orcid.org/0000-0002-7962-2966>

Resumen curricular. Doctor en Educación Matemática por parte de la Universidad de Salamanca (España), profesor investigador de la Facultad de Educación, integrante del cuerpo académico consolidado de Currículo e Instrucción. Investiga sobre: a) estadística con proyectos, b) alfabetización estadística y digital en estudiantes universitarios, y c) enseñar y aprender en tiempos de pandemia. Desde hace dos años se interesa en estudiar la desigualdad educativa, brechas de calidad, la teoría del currículo y género, así como la teoría multicultural del currículo.

## ANEXO

*Características y etapas del proceso de investigación estadística* (Flores y Pinto, 2017, p. 267)





# ANALYSIS OF PROBABILISTIC TASKS PROPOSED IN DIDACTIC RESOURCES FOR ELEMENTARY AND SECONDARY EDUCATION: SOME IMPLICATIONS FOR TEACHER EDUCATION

VINCENT MARTIN  
MATHIEU THIBAUT  
MARIANNE HOMIER

### ABSTRACT

Educational resources occupy an important place in the teaching of various mathematical fields in Québec, probability teaching among others. We therefore carried out a project to analyze the probabilistic tasks proposed in eight educational resources used to teach mathematics in elementary and secondary schools in Québec. To that end, we developed a coding grid centred on conceptual elements specific to probability, and then we used it to code 1,315 probabilistic tasks. The elementary level tasks ( $n = 722$ ) come from two collections of school textbooks, three collections of workbooks, and online exercises. The secondary level tasks ( $n = 593$ ) come from two collections of workbooks. In this text, we paint a portrait of the probabilistic tasks offered to elementary and secondary school students. Next, we identify and describe the presence and nature of four of the didactic variables of the tasks, namely probabilistic approaches, mathematical representations, manipulatives, and types of contexts. Finally, we draw some implications for teacher education in probability teaching based on this analysis of the probabilistic tasks.

Keywords: Elementary and secondary school; Teaching and learning of probability; Workbooks; Textbooks; Analysis of probabilistic tasks; Teacher education.

### BACKGROUND<sup>1</sup>

#### Why study didactic resources?

Elementary school teachers rely on a number of didactic resources, such as textbooks, workbooks, online exercises, and games, to support their mathematics teaching activities. Textbooks play a prominent role in mathematics teaching in several education systems, including in Québec (Côté, 2015), France (Margolinas & Wozniak, 2009), Spain (Gómez-Torres et al., 2013, 2014), Costa

---

<sup>1</sup> A preliminary version of this text was published in French in the 2021 conference proceedings of the *Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (Thibault et al., 2021).

Martin, V., Thibault, M. y Homier, M. (2022). Analysis of probabilistic tasks proposed in didactic resources for elementary and secondary education: some implications for teacher education. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 77-103). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

Analysis of probabilistic tasks proposed in didactic resources for elementary and secondary education: some implications for teacher education

Rica (Murillo, 2003), Estonia, Finland, and Norway (Grave & Pepin, 2015; Lepik et al., 2015), and the United States (Grouws & Smith, 2000; Jones & Tarr, 2007; Weiss et al., 2001).

Why is it that teachers frequently rely on didactic resources when teaching mathematics? The perceived reliability of textbooks may account for why they hold such a prominent place in the classroom (Lebrun, 2006). Indeed, textbooks are not only used to support student learning, they are also an important source of information for teachers' planning and lesson preparation (Grave & Pepin, 2015; Lepik et al., 2015; Spallanzani et al., 2001). In light of observations made by elementary school teachers in Québec, Spallanzani et al. (2001) argue that textbooks sometimes even replace teacher education programs when planning the content to be taught. In a sense, textbooks are an intermediary link between ministerial requirements and the teaching practices that influence student learning (Assude & Margolinas, 2005; Margolinas & Wozniak, 2009). The same may be true with regard to the various mathematical topics studied in school, and especially so for probability teaching.

### **Why analyze the probabilistic tasks proposed in didactic resources?**

As Eichler and Vogel (2014) noted, probability can be found in various facets of everyday life. Furthermore, in Québec, probability is one of the mathematical topics taught from the first year of elementary school (6–7 years old) to the end of secondary school (16–17 years old). Yet, while probability learning is certainly important in forming competent citizens, conceptual particularities (such as non-determinism and the inclusion of probabilistic concepts) add a good dose of complexity to this distinctive topic of mathematics.

A survey of 626 teachers at the elementary and secondary levels (Martin & Thibault, 2017) highlighted the frequent use of textbooks or workbooks to teach probability in Québec. Close to 68% of participants in the survey reported they often or almost always used these types of resources to teach probability. Other studies, such as Vásquez and Alsina's (2021) analysis of probability teaching practices at the elementary and early secondary levels in Chile, also highlight the use of textbooks to support probability teaching. It is therefore reasonable to conclude that students' learning experience of probability is often shaped by the use of this educational resource, which is why it is in our best interest to study it.

Several studies have already been published on the use and content of school textbooks utilized in probability teaching, including in Chile (Díaz-Levicoy & Roa Guzmán, 2015; Sánchez, 2017; Vásquez et al., 2020), Spain (Cantero Tomás, 2013; Gómez-Torres & Contreras, 2014; Gómez-Torres et al., 2013, 2014; Rodríguez-Muñiz et al., 2018; Rubio-Chueca et al., 2021), Japan (Ishibashi, 2022),

and the United States (Jones, 2004, 2009, 2014). The studies showed that textbooks, with some exceptions, include few examples of probabilistic tasks, and these are mostly technical or theoretical.

In Québec, some studies have focused on didactic resources used in mathematics instruction, but none was directly centred on the probabilistic content of such resources. For example, at the elementary level, there is Côté's (2015) work on exponential notation, and Robert's (2018) analysis of the development of functional thinking. Work of a similar vein has been carried out with respect to secondary resources: Cotnoir (2010) evaluated the use of context in introductory chapters of algebra textbooks, while Anwandter Cuellar and Tremblay (2020) published a comparative study of the knowledge imparted in textbooks from France and Québec on the notion of area.

Thus, considering their frequent use for the teaching of probability in primary and secondary school as well as the little knowledge we have about the probabilistic tasks they contain, an analysis of the probabilistic tasks proposed in didactic resources would be relevant, and would allow us to study these resources in probability teaching at the elementary and secondary levels in Québec. Therefore, our study centres on the following question: What are the characteristics of the probabilistic tasks proposed in the didactic resources used in Québec for elementary and secondary mathematics education?

Such an analysis of the probabilistic tasks proposed in didactic resources used in probability teaching in Québec would support a required reflection on teacher education in probability both at the elementary and secondary levels. Indeed, many authors have stressed the need to improve teacher education in probability (e.g. Batanero, 2014; Batanero et al., 2019; Greer & Mukhopadhyay, 2005; Stohl, 2005). As there is little place given to probability in pre-service teacher education courses in Québec universities (Martin et al., 2019), there is an urgent need to improve teacher education in this topic.

## **CONCEPTUAL FRAMEWORK**

To better identify the characteristics of the probabilistic tasks, it is important to define the probabilistic concepts and processes studied in Québec elementary and secondary schools.<sup>2</sup> Following this, we will draw on Brousseau's (2002) concept of didactical variables to pinpoint the key characteristics of the probabilistic tasks in our analysis.

---

<sup>2</sup> See the appendix for a clarification of how levels and cycles are structured in the Québec school system.

### **Probabilistic concepts and processes taught at the elementary and secondary levels.**

As indicated in *Progression of Learning in Elementary School: Mathematics* (Government of Québec, 2009), in Québec, probabilistic concepts and processes are introduced gradually across all three cycles. The teaching of these concepts and processes follows a certain progression from qualitative to quantitative, providing students with opportunities to tackle the concepts of variability, equiprobability, and independence of events in a random experiment. In the first cycle (6–8 years old), students are encouraged to develop intuitive strategies that do not necessarily require representations such as tables or tree diagrams. It is in the second cycle (8–10 years old) that students begin to use representations to structure and organize probabilistic thinking. In the third cycle (10–12 years old), students are asked to quantify a probability (using fractions, decimals, or percentages), and then compare the outcomes of a random experiment repeated several times with their calculated probabilities. When teaching probability at the elementary level, teachers are encouraged to provide students with various manipulatives, such as spinners, rectangular prisms, cups, marbles, thumb tacks, and 6-, 8-, or 12-sided dice, to experiment with randomness.

Probability is also taught at the secondary level. To facilitate the transition from elementary to secondary, certain concepts and processes taught at the elementary level are explicitly reinvested in secondary school. The use of manipulatives for experimenting with randomness is equally recommended during the first three years of secondary school (Government of Québec, 2016). Probability is progressively taught over both cycles of secondary school. The topic is taught to all students in the first cycle (first and second years of secondary school, 12–14 years old) and in the first year of the second cycle (third year of secondary school, 15 years old). However, probability is not on an equal footing in all mathematics classes in the fourth and fifth years of secondary school (15–17 years old). Depending on the mathematical option (chosen by the students among three options), probability may be taught in one of the two years or not at all. *Progression of Learning In Secondary School* describes the general progress from simple concepts, some of which were introduced at the elementary level (such as enumerating the possible outcomes of a random experiment), to complex concepts (such as conditional probability and combinatorial calculation). We also see the subjective approach appearing in the curriculum, in addition to the frequentist and theoretical approaches already introduced at the elementary level.

### **Concept of didactical variables**

We will use the concept of didactical variables to clarify what we consider to be the defining characteristics of probabilistic tasks. According to Brousseau (2002), didactical variables are the

parameters of a situation that, when modified, have the effect of changing the characteristics of solution strategies (e.g., optimality, validity, relevance, etc.). Modifications that affect the hierarchy of strategies must be considered, and the variables are of age-specific relevance in that they result in different behaviours. The variables are considered didactical variables to the extent that by acting on them, we can spark adaptations and regulations, meaning learning. Brousseau (2002) also points out the role that a teacher can play through their choice of didactical variables: “Didactical variables are those which influence learning and whose value the teacher can choose” (p. 66).

In other words, a didactical variable is a characteristic of a situation that can be manipulated in order to modify both the potential strategies students will use to resolve the situation, and the resultant solution(s). Playing with didactical variables may therefore even serve to change the level of complexity of the situation. Consequently, we believe that didactical variables are, in a sense, like dimmer switches we can control to tailor situations (or tasks) to didactical intentions. Considering that different didactical variables of a task can influence students’ mathematical activity, we will focus our study on the presence and nature of the didactical variables involving the three probabilistic approaches, mathematical representations, manipulatives, and contexts.

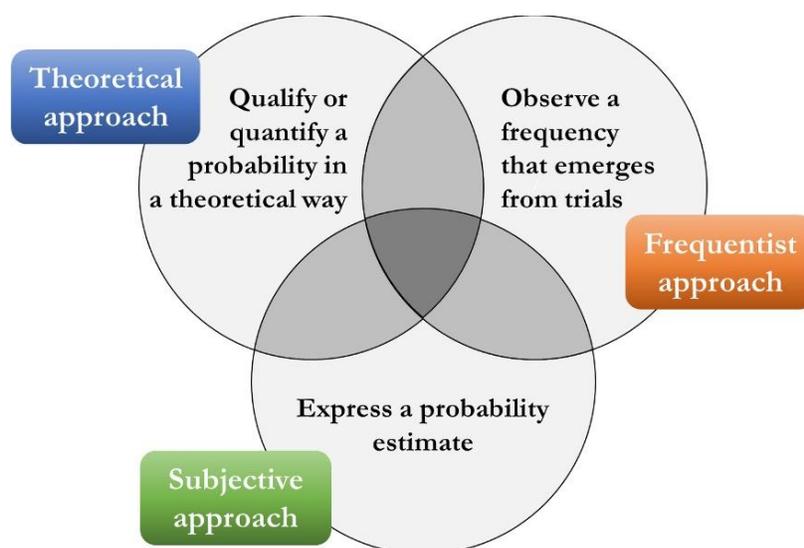
### **The three probabilistic approaches**

Research into the field of mathematics education has identified three<sup>3</sup> main probabilistic approaches in probability teaching (Batanero, 2014; Chernoff & Sriraman, 2014). The *theoretical* approach is used to theoretically qualify or quantify a probability where all possible outcomes are equiprobable. The *frequentist* approach is used to observe a frequency that emerges from a series of repeated trials that can be carried out under the same conditions. Finally, the *subjective* approach is used to express a probabilistic estimate, based on the information available at any given time. A probabilistic task may mobilize these approaches individually or in combination (Thibault & Martin, 2018). Figure 1 illustrates the three approaches considered in this article and their potential interrelationships.

---

<sup>3</sup> Other authors (e.g., Batanero et al., 2016) have used interpretations or definitions that differ from the three we have retained in this article.

Figure 1. *The three probabilistic approaches*



As was noted in the previous section, the three probabilistic approaches are included in the Québec elementary and secondary ministerial documents, but nowhere is it explicitly indicated that they should be used complementarily (in combination). Yet several researchers (e.g., Eichler & Vogel, 2014) have stressed the importance of capitalizing on the complementarity of the approaches in teaching probability. Nevertheless, we believe that the Québec mathematics program implicitly provides for an interrelated use of the approaches, as when acquiring the following: when a student in the second or third cycle of primary school (8–12 years old) “compares qualitatively the theoretical or experimental probability<sup>4</sup> of events” (Government of Québec, 2009, p. 21); when a student in the first cycle of secondary school (12-14 years old) “distinguishes between theoretical and experimental probability” (Government of Québec, 2016, p. 22); or when a student in the fourth or fifth year of secondary school (16 or 17 years old, depending on the mathematical option the student has chosen) “associates the type of probability to a situation: experimental, theoretical, subjective” (Government of Québec, 2016, p. 23). These concepts and processes do not guarantee that a connection will be made between the approaches in the classroom. However, in our opinion, there is the potential for a

---

<sup>4</sup> Thibault & Martin (2018) draw attention to a **slippage** related to the idea of “experimental probability,” where the observed frequency of an event allows one to infer (with varying degrees of confidence) the probability associated with that event, but is not the probability itself. Batanero & Borovcnik (2016) remarked upon the same **slippage**: “Even though the relationship between probability and relative frequencies is fundamental for the comprehension of probability and statistical methods, this relationship is not always understood as some students confuse frequency with probability. The expression “empirical probability” is unfortunate in this regard as a probability is always theoretical: only the frequencies are empirical.” (p. 10).

combination of the approaches, although it may be possible to use them only in juxtaposition, and not in complementarity.

In our view, the application of probabilistic approaches when solving probabilistic tasks constitutes a didactical variable, because the use of one or more of these approaches can alter the strategies a student will apply. Correspondingly, we will take note of which probabilistic approaches are mobilized in each task, then study what part each approach plays in the tasks as a whole.

### **Mathematical representations**

Zahner and Corter (2010) examined the use of visual representations in mathematics, and more specifically in probability. They defined “a taxonomy of external visual representations used in probability problem solving that includes pictures, spatial reorganization of the given information, outcome listings, contingency tables, Venn diagrams, trees, and novel graphical representations” (Zahner & Corter, 2010, p. 177). As mentioned previously, the *Progression of Learning In Elementary School*, the teaching of probability requires the aid of tables and tree diagrams as early as the second cycle of elementary school. These mathematical representations are reinvested at the secondary level, with networks, grids, diagrams, and Venn diagrams added to the mix in the first cycle.

Duval (2006) has posited two types of transformation of semiotic representations: treatment and conversion. Treatments are transformations of representations that happen within the same register; conversions are transformations of representations into a different register. In a given probabilistic task, representations can be used in a variety of ways: either the student is provided with a representation, interprets the representation using a treatment, then uses it to accomplish a task that may require conversion; or the student is required to produce the relevant representation.

In our view, the representations used in probabilistic tasks constitute a didactical variable, as having to produce a mathematical representation, and having or not having access to a mathematical representation, may influence the level of complexity of the situation, which in turn may orient students’ understanding. Correspondingly, we will evaluate the inclusion and nature of representations (provided or required) in the tasks we analyze.

### **Manipulatives**

Jeannotte and Corriveau (2020) define manipulatives as visual, tactile objects that students can manipulate to perform mathematics. Whether made commercially or by teachers, manipulatives have the potential to support the development of mathematical reasoning in learners (Jeannotte & Corriveau, 2020). Manipulatives can serve a variety of purposes, especially in probability, where they are often used as random devices (Jones, 2009) to generate trials. Some of the more typical types of

Analysis of probabilistic tasks proposed in didactic resources for elementary and secondary education: some implications for teacher education

manipulatives include cubic dice, coins, playing cards, spinners, and coloured marbles. More atypical types include non-cubic dice, combination locks, binder clips, alphabet letters, etc. (Martin & Thibault, 2019). Manipulatives are used for experimentation, as a way to exploit the frequentist approach. They also support theoretical reflection by helping to visualize probabilistic situations (for example, the symmetry of an object leading to the presumption of the equiprobability of each side coming up). Manipulatives therefore help make sense of mathematical concepts and support the development of probabilistic thinking in students. That said, there is more to manipulatives than simply making a mathematical activity more concrete. Indeed, Jeannotte and Corriveau (2020) prefer to avoid “assumptions such as ‘doing math with manipulative is a concrete version of doing math’ or ‘manipulatives should support the construct of mathematical objects’” (p. 443), suggesting instead that manipulatives have the potential to stimulate more sophisticated reasoning through the discussion it generates (gestures, words).

A probabilistic task might explicitly steer a student toward using manipulatives, but a manipulative might just as well be presented to the students without their being required to use it. In our view, the type of manipulatives brought into play in probabilistic tasks, and the manner in which they are used, constitute a didactical variable because, as Jeannotte and Corriveau (2020) have underscored, their use may alter students’ strategies. Correspondingly, we will evaluate the inclusion and nature of the manipulatives (presented or to be used) in the tasks we analyze.

### **Contexts**

Though the question of context in probabilistic tasks is neither addressed nor explicitly recommended in *Progression of Learning* at the elementary and secondary levels (Government of Québec, 2009, 2016), they may nonetheless have an impact on probability teaching. Giamellaro (2017) defines contextualization as the use of contexts in teaching to anchor students’ learning in concrete experiences, whether or not they are real. For this author, contextualization is therefore a process that consists in using students’ experiences outside of the classroom (context) as a means of improving their understanding of what they learn in class. Teacher education programs in particular (GREFEM, 2018) often stress the importance of contextualization in mathematics education. Yet though contextualization may sometimes underpin the resolution of mathematical problems, it can also, at times, be more of an obstacle.

Different types of contexts contribute to contextualization. Cotnoir (2010) singles out four types of contexts that can be exploited in a mathematical problem. First, there is the tangible context, in which the student performs a concrete task (for example, using manipulatives). Next, tasks that fall

within the realistic context present students with a situation that they are likely to encounter—one drawn from everyday life, for example—though not necessarily within the classroom. Third, the imaginary context refers to elements that have no basis in reality, and are simply fiction or fantasy. Last, there is the purely mathematical context which only references mathematical objects, such as numbers, symbols, relations, mathematical operations, etc.

In our view, the contexts used in probabilistic tasks constitute a didactical variable, since context can influence students' work, notably by influencing the level of complexity of the task, reasoning, and behaviour. Correspondingly, we will consider the inclusion and nature of the contexts in the tasks we analyze.

### **Research objectives**

The main purpose of our study is to paint a picture of the probabilistic tasks proposed to primary and secondary school students. In this light, we have defined two specific objectives:

1. Identify and describe the place occupied by probabilistic tasks in the selected resources.
2. Identify and describe the inclusion and nature of the following four didactic variables found in tasks:
  - a. The probabilistic approaches mobilized in the tasks
  - b. The representations provided or required in the tasks
  - c. The manipulatives presented or to be used in the tasks
  - d. The types of contexts used in the tasks

## **METHODOLOGY**

To pursue our objectives, we analyzed, in three phases, all 1,315 probabilistic tasks from eight Québec didactic resources, out of a total of 25,100 mathematical tasks proposed for mathematics education. Following Jones' (2009) method, who carried out an historical analysis of the probabilistic content included in eight collections of mathematics textbooks used in middle school in United States, we examined each page of the selected textbooks to identify the probability tasks contained therein. Consistent with Jones (2009), we considered that a probability task is not necessarily a single exercise in the textbook, that a set of exercises that build on one another is considered as a single task as well as a set of exercises that attend to the same topic but may be answered in isolation is considered as one task. However, unlike this author, who targeted tasks he felt were written to draw the student's attention to a particular idea related to probability, we selected tasks directly identified as probabilistic by the resources' authors. Finally, we analyzed the tasks as they were presented in the didactic

Analysis of probabilistic tasks proposed in didactic resources for elementary and secondary education: some implications for teacher education

resources, without taking into account the possible gaps in the students' mathematical activity or in the teachers' expectations.

In the first two phases (Martin & Malo, 2019; Martin et al., 2021a), we analyzed the 722 probabilistic tasks found in six resources used in elementary mathematics education: two collections of textbooks, three collections of workbooks, and one platform of online exercises. To make our selection, we asked elementary education specialists to indicate what resources were most used to teach mathematics.

In the third phase, we analyzed the 593 tasks found in two collections of workbooks used in secondary mathematics education. We put out a social media survey asking secondary school teachers what resources they were using to teach probability. Our choice of workbooks was guided by the responses obtained from 308 secondary school teachers. The two resources analyzed were those currently used by a majority of the teachers who responded.

The analysis of the 1,315 tasks was carried out using a coding grid based on the work of Côté (2015) and Cotnoir (2010). The grid, which we adjusted from one phase to the next, consists of 23 questions and several sub-questions. Some of the questions were descriptive, bearing, for example, on the school level of the task. Others pertained to mathematics education, centring on various probabilistic concepts and processes, and on the didactical variables we had defined. Using the coding grid, we were able to individually code each of the 1,315 probabilistic tasks and extract the answers to a spreadsheet for analysis. The coding was tested for reliability after 154 tasks (12% of the 1,315 tasks) had been randomly targeted (respecting the proportions of tasks by level and by collection) and coded by at least two people, and the coding was then refined to ensure consistency. The intercoder agreement achieved during the process was greater than 90%.

## RESULTS AND DISCUSSION

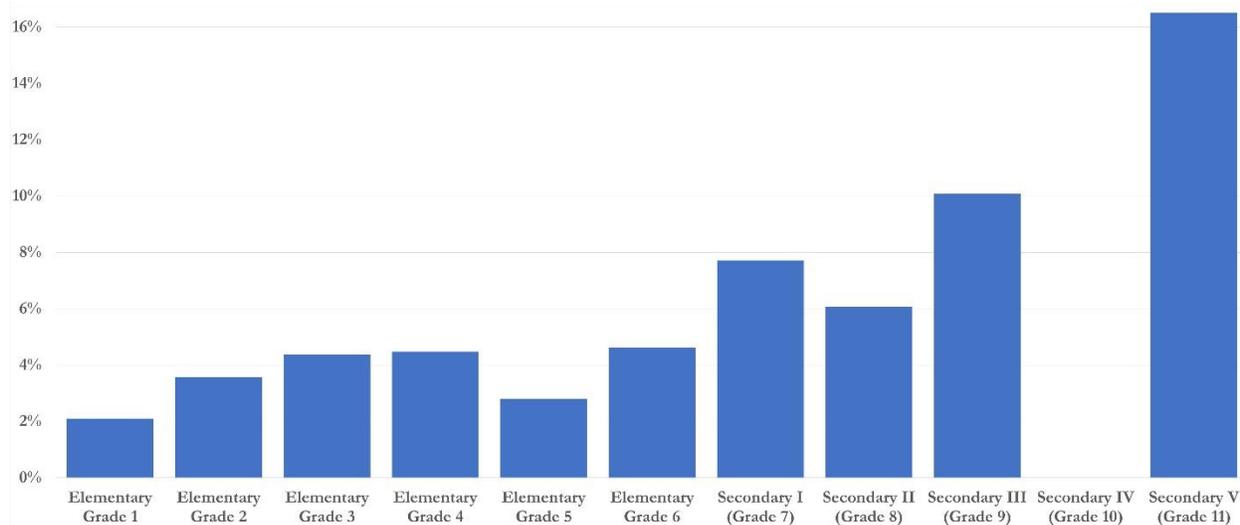
### **The place occupied by probabilistic tasks in the selected resources.**

At the elementary level, we analyzed 722 probabilistic tasks, representing 4% of the 18,970 mathematical tasks in total. At the secondary level, we analyzed 593 probabilistic tasks, representing nearly 10% of the 6,140 mathematical tasks in total. Figure 2 maps the distribution of probabilistic tasks by school level, revealing a general progression from just under 2% in the first year of elementary to more than 16% in the fifth year of secondary.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> In the fourth year of secondary school, probabilities are taught in the *Technical and Scientific* option (one of the three mathematics options in Québec), but the workbooks for this option had not yet been published at the time of analysis.

**Figure 2.** *Percentage of probabilistic tasks by school level*



In general, we observe a gradual increase in the percentage of probabilistic tasks found in resources from one school level to the next. Despite this relatively steady progression, the overall proportion of probabilistic tasks remains modest, the 1,315 tasks analyzed representing a mere 5% of the 25,110 mathematical tasks in the selected resources. We believe that quantitative results such as these to be unprecedented; to the best of our knowledge, researchers have rarely sought to establish the proportion of probabilistic tasks in the resources used to teach probabilities. In an analysis of preschool education textbooks in Chile, Vásquez et al. (2020) found that though statistical tasks had been included, there were no tasks associated with probability. In his historical analysis of the probabilistic content included in eight collections of mathematics textbooks used in middle school (i.e. grades 6, 7, and 8), Jones (2004, 2007, 2009) showed that the two most recent (at that time) collections of textbooks devoted far more space to probability than the previous six collections combined—more than half of all probabilistic tasks analyzed were from those two collections—despite there still being relatively few tasks relegated to probability.

### **Presence and nature of the four didactic variables in the tasks analyzed**

#### ***The probabilistic approaches mobilized in the tasks***

Some of the questions in the coding grid were designed to identify the probabilistic approaches mobilized in the coded tasks. For example, a task mobilizing the theoretical approach could lead students to calculate a probability, represent or list possible outcomes, or utilize probabilistic

---

Nevertheless, we may reasonably infer that fourth-year probabilistic tasks are similar to those that we analyzed in the fifth-year workbooks, as the concepts and processes covered are substantially the same.

vocabulary. A task mobilizing the frequentist approach might ask students to conduct trials or work from a set of previously established trials. A task mobilizing the subjective approach might ask students to formulate a prediction or an opinion relating to a probabilistic situation. Figure 3 shows the percentages of tasks by probabilistic approach at the elementary and secondary levels.

**Figure 3.** *Percentage of tasks by probabilistic approach at the elementary and secondary levels*

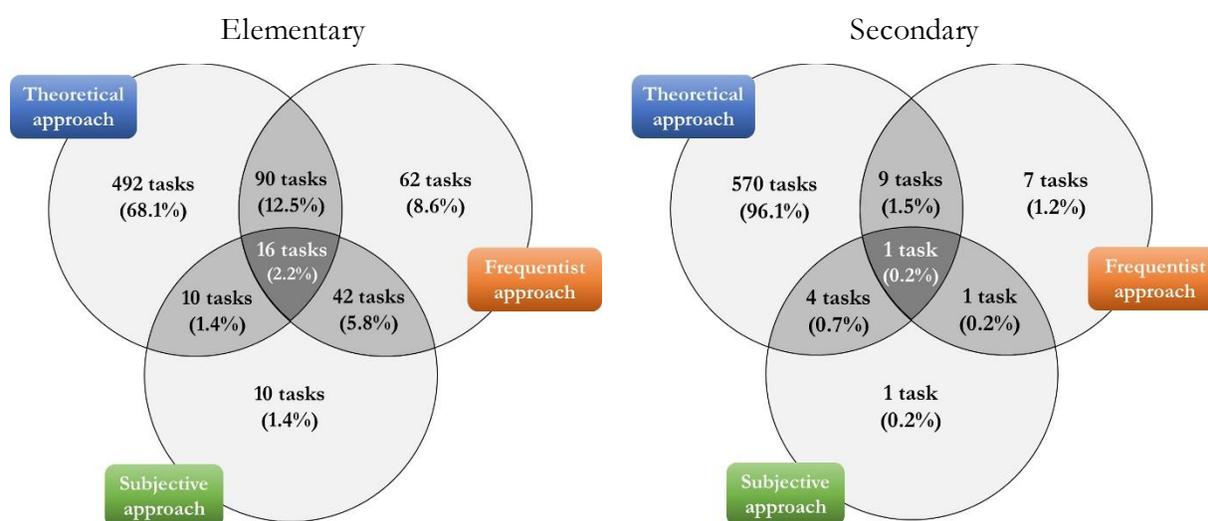


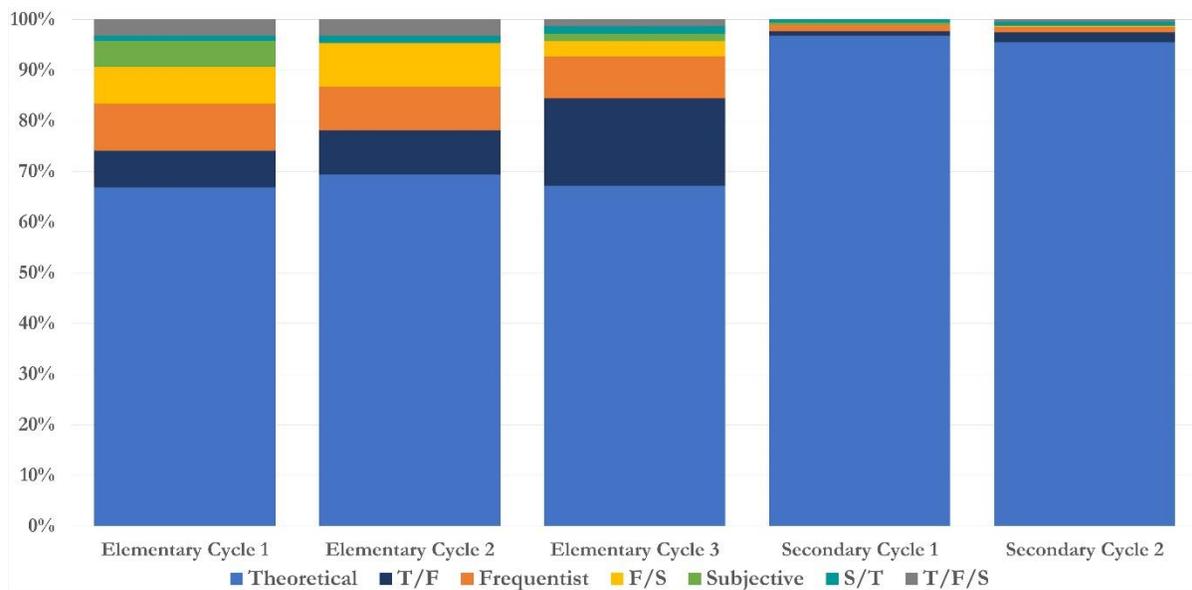
Figure 3 illustrates, at the elementary level, that the vast majority of tasks (nearly 85% of the 722 tasks analyzed) mobilizes partially or exclusively the theoretical approach. There is also a considerable number of frequentist tasks (over 29%), most of which are used in juxtaposition or in combination with the theoretical (over 12% of tasks) and subjective (nearly 6% of tasks) approaches. In addition, the elementary level didactic resources analyzed devote very little space to tasks mobilizing the subjective approach (less than 11%). Finally, there is only a small percentage of tasks (scarcely above 2%) mobilizing all three approaches. Gómez-Torres et al. (2014) noted a similar disproportionality between the three approaches in teaching resources used at the elementary level in their study of two collections of elementary school mathematics textbooks. The theoretical approach is explicitly addressed in the collections studied, but the subjective approach is only treated peripherally, while the frequentist approach is explored in just one of the two collections in relation to probability, the other addressing the approach in relation to statistics.

At the secondary level, the disproportion is even more striking: virtually all the tasks (almost 99% of the 593 tasks analyzed) were partially or exclusively incorporated into the theoretical approach, while very few (less than 4%) mobilize the frequentist or subjective approaches. This means that when

probability teaching in the classroom follows to the letter one of the secondary school workbooks we analyzed, students are exposed to only a scant handful of tasks mobilizing the frequentist or subjective approaches. We find this observation concerning, especially considering the potential for combining probabilistic approaches (Thibault & Martin, 2018). Such undue emphasis on the theoretical approach in secondary school resources has also been noted elsewhere than in Québec. For example, Han et al. (2011) came to similar conclusions in their comparative analysis of Korean, Malaysian, and American mathematics textbooks at the secondary level. The verdict was the same for Rodríguez-Muñiz et al. (2019), who analyzed five collections of textbooks used for teaching probabilities and statistics at the end of secondary school in Spain.

Figure 4 gives a precise breakdown of the distribution of analyzed tasks by probabilistic approach and school cycle.

**Figure 4.** *Distribution of tasks by probabilistic approach and by school cycle*

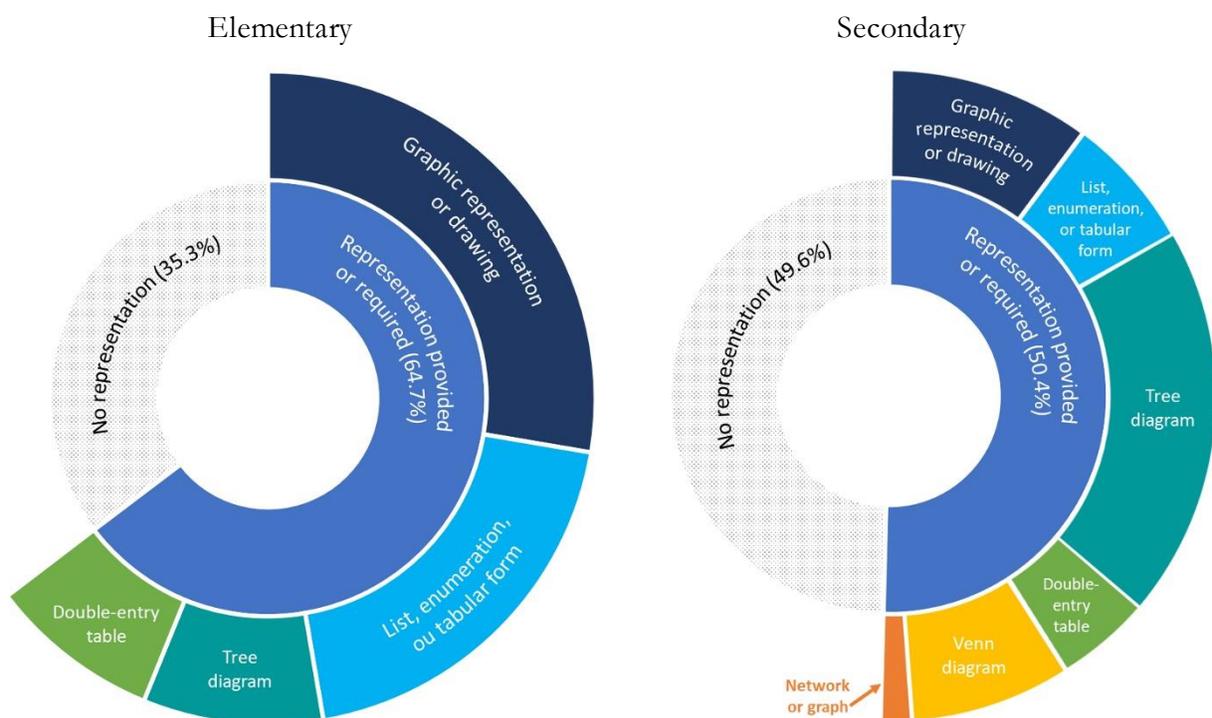


As we can see in the chart, there is a marked difference between the cycles at the elementary and secondary levels. For example, at the elementary level, the percentage of tasks mobilizing both the theoretical and frequentist approaches nearly doubles from the first to the third cycle. But the most startling result the chart conveys is the sharp break between the third cycle of elementary and the first cycle of secondary school, where the theoretical approach suddenly becomes overwhelmingly dominant.

### ***Representations in probabilistic tasks***

A majority of the probabilistic tasks analyzed include the use of mathematical representations, both at the primary level (65% of tasks) and secondary level (50% of tasks). Among the tasks involving the use of mathematical representations, most provide students with a representation (58% at the elementary level and 67% at the secondary level), others ask students to produce a representation (36% at the elementary level and 29% at the secondary level), while a small subset both provide and require the production of a representation (6% at the elementary level and 4% at the secondary level). The following diagrams (Figure 5) illustrate the proportion of tasks involving representations in all three scenarios considered conjointly, and give a breakdown per type of representation and per level of education (elementary or secondary).

**Figure 5.** *Use of representations in probabilistic tasks at the primary and secondary levels*



The diagrams allow us to highlight two key aspects. Firstly, the percentage of tasks involving representations is higher at the elementary level (almost 65%) than at the secondary level (nearly 50%). This is consistent with the belief that mathematics teaching is simpler and more concrete at the elementary level than at the secondary level. Secondly, the representations used at the primary level are mostly in the form of drawings (43% of tasks involving representations) or lists (30%). These two

types of representations are still present at the secondary level, but to a lesser extent (20% and 13%, respectively). However, most representations used at the secondary level involve more formal tools such as tree diagrams and Venn diagrams (55% for both types combined). This percentage of probabilistic tasks providing or requiring the production of a representation is higher than what Díaz-Levicoy and Roa Guzmán (2015) found to be the case in their analysis of probability tasks included in secondary level (grade 8) textbooks in Chile. Their study found that 87% of the tasks analyzed were presented in text form, while only 10% were presented using images, and 3% using diagrams. If these numbers are indeed representative, it may be that the probabilistic tasks proposed in Québec secondary resources are more concrete (with information that is not uniquely textual) than is the case elsewhere (for example in Chile), though the probabilistic tasks in Québec secondary resources are generally still more formal than those in Québec elementary resources.

***Manipulatives in probabilistic tasks***

We identified both typical probability manipulatives (e.g., dice, spinners, marbles, etc.) and atypical materials (e.g., glue caps, tissue boxes, thumb tacks, short straws, etc.). Table 1 shows the number (and percentage) of probabilistic tasks per manipulatives (presented or to be used) at the elementary and secondary levels.

**Table 1.** *Number (and percentage) of probabilistic tasks per manipulatives and level of education*

Level of education	Elementary (n = 722)	Secondary (n = 593)
Manipulatives		
Manipulatives presented	516 tasks (71.5%)	309 tasks (52.1%)
Manipulatives to be used by students	76 tasks (10.5%)	0 tasks (0.0%)

We found probabilistic tasks that required the use of manipulatives and tasks that referred to manipulatives, but did not require their use. Our analysis indicates that the latter are more prevalent, both at the elementary level (more than 71% of the 722 probabilistic tasks analyzed) and at the secondary level (about 52% of the 593 probabilistic tasks analyzed). Jones (2009) had also remarked on the importance of various manipulatives in the probabilistic tasks proposed in resources. Jones’ study focused on the use of what he termed “random devices” in eight collections of middle school (grades 6, 7, and 8) mathematics textbooks in the United States. His analysis of the types of devices used in probability tasks shows, across all textbook series, that most probability tasks were set within the context of using a random device. The most common types of devices used involved selecting an object at random, cubic dice, coins, or spinners. However, the author does not seem to have made a

distinction between tasks requiring students to manipulate the devices and those merely referencing manipulatives.

In our view, it is important to make the distinction, since our own analysis has revealed that less than 11% of the 722 elementary tasks require that students use manipulatives—and the number falls to 0% at the secondary level. This means that out of the 593 secondary level probabilistic tasks we analyzed, not even one requires students to use manipulatives. We find this result troubling indeed. Secondary textbooks propose hundreds of exercises and problems that refer specifically to manipulatives, but never actually ask students to use them. Yet as Jeannotte and Corriveau (2020) suggested, manipulatives support the development of mathematical reasoning in a variety of ways. It may be that the more abstract (and theoretical) nature of probabilistic tasks at the secondary level is not conducive to using manipulatives, which would be consistent with the fact that there are also generally fewer mathematical representations in probabilistic tasks than at the elementary level.

### ***Types of contexts used in the tasks***

At last, we analyzed the types of contexts used in probabilistic tasks. Table 2 shows the number (and percentage) of probabilistic tasks per type of context at the elementary and secondary levels.

**Table 2.** *Number (and percentage) of probabilistic tasks per context type and level of education*

<b>Context</b>	<b>Level of education</b>	
	<b>Elementary (n = 722)</b>	<b>Secondary (n = 593)</b>
Tangible context	83 tasks (11.5%)	0 tasks (0.0%)
Realistic context	630 tasks (87.3%)	532 tasks (89.7%)
Imaginary context	5 tasks (0.7%)	1 task (0.2%)
Purely mathematical context	4 tasks (0.6%)	60 tasks (10.1%)

After analyzing the different contexts used in probabilistic tasks, we observed that the predominant context, both at the primary and secondary levels, is realistic (more than 87% at elementary and almost 90% at secondary), and that very few tasks provide an imaginary context (less than 1%, both at elementary and secondary). It is interesting to note that the proportion of tasks with tangible contexts (less than 12% at primary and 0% at secondary) corresponds to the proportion of tasks in which students are explicitly asked to use manipulatives. Finally, there is a significantly greater number of purely mathematical contexts at the secondary level, with more than 10% of secondary school tasks having no specific context. This is consistent with the idea that probability at the secondary level is more theoretical (or rather, less concrete) than at the elementary level. On the whole, our findings are in line with those of Díaz-Levicoy and Roa Guzmán (2015), who also noted the

predominance of realistic contexts in probabilistic tasks proposed in secondary level (Grade 8) textbooks. Likewise, these authors found that tangible and purely mathematical contexts were the next most used contexts, but again, in far lesser proportions than realistic contexts. They identified no tasks using the imaginary context in the textbooks they examined.

### **IMPLICATIONS FOR TEACHER EDUCATION IN PROBABILITY**

In light of our results, it is our belief that if teachers shift toward a proactive use of the didactic resources, the educational potential of those resources would increase manifold. Martin and Malo (2019) are strongly in favour of teachers' proactiveness, particularly when it comes to modifying probabilistic tasks: "We believe that teachers who possess a certain 'didactical agency' should use tasks as a starting point for teaching probabilities, but not limit themselves to those tasks nor follow them to the letter" (p. 94, our translation). Teachers acting through their own didactical agency will therefore be empowered to select, use, or modify the didactic resources at their disposal, thus allowing them to effectively fulfil their didactical intentions and provide favourable conditions for their students' mathematical learning (Martin & Malo, 2019). The importance of developing didactical agency is precisely one of the key issues in teacher education Thibault (2021) highlighted, citing the need for teachers to be able to adapt probabilistic situations in their teaching. Indeed, the ability to adapt situations (or tasks) would likely enhance the potential of those situations in probability teaching. It would not only have practical applications for teachers (for example, being able to use an adapted situation in an upcoming class), more importantly, it becomes a means for teachers to truly take ownership of tasks and align them to their didactical intentions. This further highlights the benefit of allotting time for supporting didactical agency in teacher education, which would help teachers master probabilistic situations and determine which methods (and especially which didactical variables) might be used to adapt them. Teachers armed with a better command of probabilistic tasks could be more disposed to explore the tasks proposed in the resources, and take the time to adapt those tasks to their teaching contexts. Needless to say, more time would need to be allocated to such teacher education, which would require that the instructor realign lessons so more focus is placed on discussing strategies for adapting resources. Our findings point to this avenue—fostering teachers' didactical agency—as most promising.

In our first research objective, our aim was to identify and describe how probabilistic tasks rank in didactic resources in comparison with other types of tasks. Our findings indicate that didactic resources devote little room to probabilistic tasks, though it does progressively increase, which likely facilitates the transition between elementary and secondary levels. Considering that the place occupied

by concepts and processes is increasing as we move from elementary to secondary school, it follows that both pre- and in-service teacher education should keep pace. However, this has not been the case, at least not in Québec (Martin et al., 2019). We are therefore of the opinion that much deliberation is needed to find and implement ways of improving those two complementary pathways to teacher education in probability. In our view, such pre- and in-service education would encourage teachers to recognize and propose probabilistic tasks beyond those presented in the didactic resources, whether in terms of the number of tasks or the opportunities for presenting them in class.

With regard to our second research objective, in which the aim was to identify and describe four specific didactic variables (probabilistic approaches, representations, manipulatives, and contexts) in probabilistic tasks, we observed that there is a preponderance of tasks mobilizing the theoretical approach. This is especially the case at the secondary level—there is a sudden jump in instances of such tasks between the third cycle of elementary and the first cycle of secondary school. It is essential that (future) teachers learn to recognize the distinct nature of each of the probabilistic approaches through development sessions in probability teaching. Developing teachers' didactical agency would empower them to combine the approaches. For example, tasks mobilizing only one approach could be adapted to mobilize one or both of the others.

Secondly, we observed that there is more frequent use of mathematical representations at the elementary level than at the secondary level, and that the type of representations differs: representations at elementary level typically make use of drawings and lists, while representations at secondary level tend to be tree diagrams and Venn diagrams. It is our belief that relevant teacher education could motivate (future) teachers to make use of a greater diversity of representations, through both treatment and conversion (Duval, 2006), in their probability teaching.

Thirdly, we have noted the high percentage of probabilistic tasks that refer to manipulatives, but a contrastingly low percentage that requires students to use such tools at the elementary level, and their complete absence at the secondary level. Considering the dearth of manipulatives when secondary school students engage in probabilistic tasks, what room is there for the type of reflection unique to experimentation, as for example, the notion of variability? Once again, we find it important that teacher education supports the development of didactical agency for (future) teachers and inspire them to use manipulatives in the classroom, including when a task does not explicitly suggest it. Such use of manipulatives helps to expand the scope of students' development of probabilistic reasoning.

Fourthly, we brought to light the predominance of realistic contexts in probabilistic tasks at both the elementary and secondary levels. Meanwhile, the transition from elementary to secondary is

marked by a significant decrease in tangible contexts and a sharp increase in purely mathematical contexts. We believe it essential that teacher education in probability serve to kindle (future) teachers' reflections on the use of contextualization to support their students' learning of probability. We agree with Giamellaro (2017) that teachers could intentionally choose to situate a task in a particular context (see Cotnoir, 2010), not simply because it would add a playful dimension to learning, but to vary and enrich the students' learning experience as well. Furthermore, we believe that providers of probability education should orient their development offers to more actively encourage teachers to use tangible contexts in the probabilistic tasks they give their students. This could prompt a more frequent use of manipulatives, giving students more opportunities for hands-on experimentation with randomness.

The findings in our present study point to some (intriguing) deviations from the results of our previous survey of teachers' self-reported practices of probability teaching (Martin & Thibault, 2017; Martin et al., 2021b). The teachers who responded to the survey reported a balanced use of the three probabilistic approaches. This diverges from what our analysis has revealed, namely that there is a strong disproportionality in probabilistic approaches presented in teaching resources. Though teachers in the survey had indeed reported that they employed the theoretical approach in their probability teaching (49% at the elementary level and 91% at the secondary level), many had also described investing a remarkable amount of time in both the frequentist approach (73% at elementary and 66% at secondary) and the subjective approach (34% at elementary and 28% at secondary).

Another significant deviation is in the reported use of manipulatives. If we take the results of the survey at face value, manipulatives are used frequently at the elementary level (71% reported using them often or almost always) and somewhat frequently at the secondary level (33% reported using them often or almost always). However, our analysis of didactic resources reveals that the percentage of tasks requiring students to use manipulatives is low at the elementary level and nil at the secondary level. That said, there is nothing to stop teachers from exercising their didactical agency (Martin & Malo, 2019), and using (even transforming) the resources at their disposal and the tasks proposed therein, for example by bringing the three probabilistic approaches into play and using manipulatives as reported in the survey. For instance, (future) teachers could ask students to use the manipulative mentioned in the resource even if there is no explicit requirement to do so. It is entirely plausible that teachers already manifest didactical agency with regard to the probabilistic tasks in the resources they use to teach probability. Even so, providing ongoing support for teachers' development of didactical agency, through both pre- and in-service education, is essential. For one thing, (future) teachers must

realize the power they have to enrich the learning experience of their students by manipulating didactic variables.

The results of this study align with some of our previous findings, such as the predominance of realistic contexts and the gradual progression of concepts and processes taught from the third cycle of elementary to the first cycle of secondary school, even though probability occupies more place at the secondary level. What the study reveals above all, however, is an abrupt shift in students' learning experience, which becomes markedly more abstract at the secondary level, with the predominance of the theoretical approach and of purely mathematical contexts over tangible contexts, fewer representations, and no foreseen use of manipulatives. It appears preferable, in our view, that continuing education be an opportunity for dialogue between teachers of different education levels, promoting a smoother transition from elementary to secondary. Accordingly, initiatives should be implemented to allow elementary and secondary school teachers to work together to promote continuity and minimize disruptions between the two levels.

In view of our research findings, further avenues of research are in the works. The first is to look beyond the tasks prescribed in selected didactic resources and document how they are deployed in everyday probability teaching. If we can delve into actual teaching practices, we may gain access to what mathematical activity these tasks generate in students, and to teachers' clarifications on their didactical intentions. The second avenue is to support the development of the didactical agency of teachers and instructors, and encourage their efforts to strike a balance between their didactical intentions and the objectives outlined in the resources, for example by engaging in participatory research.

## BIBLIOGRAPHY

- Anwandter Cuellar, N. S., & Tremblay, S. (2020). Savoirs véhiculés par les manuels scolaires français et québécois à propos de l'aire. Une étude comparative. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 25, 211–242. <https://doi.org/10.4000/adsc.566>
- Assude, T., & Margolinas, C. (2005). Aperçu sur les rôles des manuels dans les recherches en didactique des mathématiques. In E. Bruillard (Ed.), *Manuels scolaires, regards croisés* (pp. 231-241). CRDP Basse-Normandie.
- Batanero, C. (2014). Probability teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematical Education* (pp. 491–496). Springer.
- Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.
- Batanero, C., Ortiz, J. J., Gómez-Torres, E., & Gea, M. M. (2019). Les jeux équitables comme moyen pour l'enseignement des probabilités et la formation des enseignants. In V. Martin, M. Thibault

- & L. Theis (Eds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités: un monde de possibilités!* (pp. 219–244). Presses de l'Université du Québec.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Cantero Tomás, A. (2013). Análisis de la presentación de la probabilidad condicionada en libros de texto de 2° de bachillerato. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 105–112). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Chernoff, E. J., & Sriraman, B. (Eds.) (2014). *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives*. Springer.
- Côté, L. (2015). *Analyse de contenu de manuels scolaires en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle* [unpublished master's thesis]. Université de Sherbrooke.
- Cotnoir, G. (2010). *Évolution de l'utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l'algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours* [unpublished master's thesis]. Université de Sherbrooke.
- Díaz-Levicoy, D., & Roa Guzmán, R. (2015). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica*, 13(1), 9–19.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. Dans E. Chernoff et B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (p. 75-99). Springer.
- Giamellaro, M. (2017). Dewey's yardstick: Contextualization as a crosscutting measure of experience in education and learning. *SAGE Open*, 7(1), 1-11. <https://doi.org/10.1177/2158244017700463>
- Gómez-Torres, E., & Contreras, J. M. (2014). Meanings of probability in Spanish curriculum for primary school. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9)* (pp.1–4). International Statistical Institute.
- Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75–91.
- Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J. & Gea, M. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49–71.
- Government of Québec (2009). *Progression of learning in elementary school: Mathematics*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.
- Government of Québec (2016). *Progression of learning in secondary school: Mathematics*. Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.
- Grave, I., & Pepin, B. (2015). Teachers' use of resources in and for mathematics teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 199–222.
- Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2005). Teaching and learning the mathematization of uncertainty: Historical, cultural, social and political contexts. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school - Challenges for teaching and learning* (pp. 297–324). Springer US.

Analysis of probabilistic tasks proposed in didactic resources for elementary and secondary education: some implications for teacher education

- GREFEM. (2018). Contextualiser pour enseigner les mathématiques: un enjeu de formation. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 23, 69–105.
- Grouws, D. A., & Smith, M. S. (2000). Findings from NAEP on the preparation and practices of mathematics teachers. In E. A. Silver, & P. A. Kenney (dir.), *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Education Progress* (p.107–141). National Council of Teachers of Mathematics.
- Han, S., Rosli, R., Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2011). The textbook analysis on probability: The case of Korea, Malaysia and U.S. textbooks. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 15(2), 127–140.
- Henry, M. (2000). Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités. *Gazette des mathématiciens*, 84, 49–56.
- Ishibashi, I. (2022). Analyzing experimental and theoretical probabilities in Japanese 7th and 8th grade textbooks. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0690. <https://doi.org/10.29333/iejme/12061>
- Jeannotte, D., & Corriveau, C. (2020). Interactions between pupils' actions and manipulative characteristics when solving an arithmetical task. In U. Thomas Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.) *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 443–450). Utrecht, NL.
- Jones, D. L. (2004). *Probability in middle grades mathematics textbooks: An examination of historical trends, 1957–2004* [Doctoral Thesis, University of Missouri]. ProQuest. <https://www.proquest.com/docview/305161225>
- Jones, D. L. (2009). Random devices utilized in mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 4(2), 32–42.
- Jones, D. L. (2014). The role of technology for learning stochastics in U.S. textbooks for prospective teachers. In K. Jones, C. Bokhove, G. Howson, & L. Fan (Eds.), *Proceedings of the international conference on mathematics textbook research and development* (pp. 269–274). University of Southampton.
- Jones, D. L. & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 4–27.
- Lebrun, M. (2006). *Le manuel scolaire: un outil à multiples facettes*. Presses de l'Université du Québec.
- Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 129–156.
- Margolinas, C., & Wozniak, F. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant: l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 35(2), 59–82.
- Martin, V., Héroux, S., Homier, M., & Thibault, M. (2021a). L'analyse de tâches probabilistes proposées dans des cahiers d'apprentissage destinés à l'enseignement-apprentissage des mathématiques au primaire au Québec: exemplification de tâches inscrites dans l'approche fréquentielle. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 21(1), 145–165.
- Martin, V., & Malo, M. (2019). Analyse de tâches probabilistes proposées dans des ressources didactiques québécoises utilisées pour l'enseignement des mathématiques au primaire. In V.

- Martin, M. Thibault, & L. Theis (Eds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités: un monde de possibilités!* (pp. 71–98). Presses de l'Université du Québec.
- Martin, V., Thibault, M., & Theis, L. (2019). Introduction. In V. Martin, M. Thibault, & L. Theis (Eds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités: un monde de possibilités!* (pp. 1–16). Presses de l'Université du Québec.
- Martin, V. & Thibault, M. (2017). Enquête sur les pratiques déclarées d'enseignement des probabilités au primaire et au secondaire au Québec: esquisse d'un portrait statistique. In A. Adihou, J. Giroux, A. Savard, & K. Mai Huy (Eds.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (pp. 179-195). Université McGill.
- Martin, V. & Thibault, M. (2019). Utiliser des objets du quotidien pour soutenir l'enseignement des probabilités dans la classe du primaire. *Vivre le primaire*, 32(2), 63–65.
- Martin, V., Thibault, M., & Roy, N. (2021b). Pratiques déclarées d'enseignement des probabilités: enquête auprès de personnes enseignantes du primaire et secondaire au Québec. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 21(3), 596–624.
- Murillo, M. (2003). El uso de los libros de texto en la enseñanza secundaria. Lo que los profesores opinan. *Uniciencia*, 20(1), 47–55.
- Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3<sup>e</sup> cycle du primaire québécois: une analyse praxéologique* [unpublished master's thesis]. Université de Sherbrooke.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Díaz, P., & Muñiz-Rodríguez, L. (2018). Statistics and probability in the Spanish baccalaureate: Intended curriculum and implementation in textbooks. In Y. Shimizu, & R. Vithal (Eds.), *ICMI Study 2: School mathematics curriculum reforms: challenges, changes and opportunities* (pp. 413–420). University of Tsukuba.
- Rubio-Chueca, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. & Beltrán-Pellicer, P. (2021). Las situaciones-problema y el lenguaje de la probabilidad en los libros de texto en Educación Secundaria en España. *Proceedings of the CIMIE21: Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa*.
- Sánchez, N. (2017). Análisis de problemas en Estadística y Probabilidad en libros de texto de segundo año de Educación Secundaria. *Revista Científica*, 30(3), 181–194. <https://doi.org/10.14483/23448350.12289>
- Spallanzani, C., Biron, D., Larose, F., Lebrun, J., Lenoir, Y., Masselter, G., & Roy, G.-R. (2001). *Le rôle du manuel scolaire dans les pratiques enseignantes au primaire*. Éditions du CRP.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. Dans G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school - challenges for teaching and learning* (pp. 345–366). Springer US.
- Thibault, M. (2021). *Recherche-formation sur l'enseignement des probabilités du secondaire avec des outils technologiques: enjeux de formation* [Doctoral thesis, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/14804/>
- Thibault, M., & Martin, V. (2018). Confusion around the concept of probability. *For the learning of mathematics*, 38(1), 12–16.
- Thibault, M., Homier, M., & Martin, V. (2021). Analyse des tâches probabilistes proposées dans des ressources didactiques au primaire et au secondaire. In N. S. Anwandter Cuellar, C. Corriveau, V. Robert, & F. Venant (Eds.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (pp. 190-204). Université du Québec en Outaouais.

Analysis of probabilistic tasks proposed in didactic resources for elementary and secondary education: some implications for teacher education

Vásquez, C., & Alsina, A. (2021). Analysing probability teaching practices in primary education: What tasks do teachers implement? *Mathematics*, 2021, 9, 2493. <https://doi.org/10.3390/math9192493>

Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., & Arteaga, P. (2020). Objetos matemáticos ligados a la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *Bolema*, 34(67), 480–500. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a07>

Weiss, I. R., Banilower, E. R., McMahon, K. C., & Smith, P. S. (2001). *Report of the 2000 national survey of science and mathematics education*. Horizon Research, Inc.

Zahner, D., & Corter, J.E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 177-204.

## **ANÁLISIS DE LAS TAREAS PROBABILÍSTICAS PROPUESTAS EN LOS RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA: ALGUNAS IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO**

### **RESUMEN**

En Québec, los recursos educativos ocupan un lugar importante en la enseñanza de diversos campos matemáticos, la enseñanza de la probabilidad entre otros. Por ello, llevamos a cabo un proyecto para analizar las tareas probabilísticas propuestas en ocho recursos educativos utilizados para la enseñanza de las matemáticas en las escuelas primarias y secundarias de Québec. Para ello, elaboramos una tabla de codificación centrada en elementos conceptuales propios de la probabilidad y la utilizamos para clasificar 1.315 tareas probabilísticas. Las tareas de nivel elemental ( $n = 722$ ) proceden de dos colecciones de libros de texto escolares, tres colecciones de cuadernos de trabajo y ejercicios en línea. Las tareas de nivel secundario ( $n = 593$ ) proceden de dos colecciones de libros de trabajo. En este trabajo, hacemos un retrato de las tareas probabilísticas ofrecidas a los alumnos de primaria y secundaria. A continuación, identificamos y describimos la presencia y naturaleza de cuatro de las variables didácticas de las tareas, a saber, los enfoques probabilísticos, las representaciones matemáticas, los manipulativos y los tipos de contextos. Finalmente, extraemos algunas implicaciones para la formación del profesorado en la enseñanza de la probabilidad a partir de este análisis de las tareas probabilísticas.

Palabras clave: Enseñanza primaria y secundaria; Enseñanza y aprendizaje de la probabilidad; Cuadernos de trabajo; Libros de texto; Análisis de tareas probabilísticas; Formación del profesorado.

## **ANÁLISE DAS TAREFAS PROBABILÍSTICAS PROPOSTAS NOS RECURSOS DE ENSINO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO: ALGUMAS IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

### **RESUMO**

Em Quebec, os recursos educacionais desempenham um papel importante no ensino de diversos campos matemáticos, incluindo o ensino da Probabilidade. Assim, realizamos um projeto para analisar as tarefas probabilísticas propostas em oito recursos educacionais utilizados para o ensino da Matemática nas escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio de Quebec. Para isso, desenvolvemos uma grade de codificação focalizando elementos conceituais específicos para a Probabilidade e a utilizamos para classificar 1.315 tarefas probabilísticas. As tarefas de Ensino Fundamental ( $n = 722$ ) provêm de duas coleções de livros didáticos, três coleções de cadernos de exercícios e de atividades online. As tarefas de Ensino Médio ( $n = 593$ ) provêm de duas coleções de cadernos de exercícios. Neste artigo, retratamos as tarefas probabilísticas oferecidas aos estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Em seguida, identificamos e descrevemos a presença e a natureza de quatro das variáveis didáticas de tarefas, a saber, abordagens probabilísticas, representações matemáticas, manipulativas e tipos de contextos. Finalmente, tiramos algumas implicações para a formação de professores no ensino de Probabilidade, a partir dessa análise das tarefas probabilísticas.

Palavras-chave: Ensino Fundamental e Médio; Ensino e aprendizagem de Probabilidade; Cadernos de exercícios; Livros didáticos; Análise de tarefas probabilísticas; Formação de professores.

Analysis of probabilistic tasks proposed in didactic resources for elementary and secondary education: some implications for teacher education

VINCENT MARTIN

*Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada*

[Vincent.Martin@USherbrooke.ca](mailto:Vincent.Martin@USherbrooke.ca)

<https://orcid.org/0000-0002-4539-3018>

Vincent Martin, who was educated as primary school teacher, has completed a master's and a doctorate related to the teaching and learning of probability in primary school. He is now a professor in the Department of Preschool and Elementary Education of the Faculty of Education at the University of Sherbrooke. In this context, he gives courses in mathematics education related to the development of mathematical thinking of young children and the teaching of numeration and rational numbers in the Bachelor of Education in preschool and elementary school. Specialist in mathematics education in preschool and primary school, his fields of research interest concern the teaching and learning of probability in primary school and more specifically the probability teaching practices, and the didactic characteristics of probabilistic tasks proposed in didactic resources used for the teaching of mathematics.

MATHIEU THIBAUT

*Université du Québec en Outaouais, St-Jérôme, Canada*

[Mathieu.Thibault@uqo.ca](mailto:Mathieu.Thibault@uqo.ca)

<https://orcid.org/0000-0002-5235-5386>

After being educated and working as a secondary school math teacher, Mathieu Thibault completed a PhD in education from the University of Quebec at Montreal. His thesis is related to teacher education, specifically about teaching of probability in secondary school with technological tools. He is now a professor in mathematics education of the Department of Education at the University of Quebec in Outaouais. His research interests are mainly in the area of teaching probability but also concern teacher education, technological tools for teaching, distance learning and coding for mathematics. He is also involved in dissemination of research to a wider audience, wishing to bridge the communities of research and practice.

MARIANNE HOMIER

*Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada*

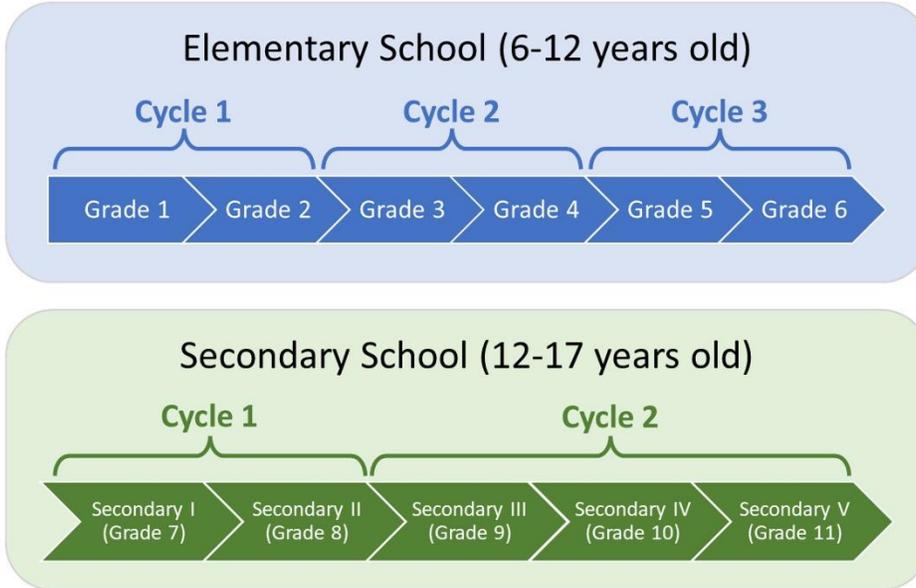
[Marianne.Homier@USherbrooke.ca](mailto:Marianne.Homier@USherbrooke.ca)

<https://orcid.org/0000-0003-0567-9262>

Marianne Homier, who first studied as an elementary school teacher, is currently completing a Master's degree in Education at the University of Sherbrooke. She has conducted a collaborative research project on the integration of the subjective approach in probability teaching at elementary school. She is now beginning her doctoral studies, in which she will explore the potential of probability teaching and learning to enable teachers and students to reflect on socially relevant issues. In doing research, she hopes not only to contribute to the advancement of knowledge related to the teaching and learning of probability, but also to promote the social utility of this mathematical field and to develop fruitful collaborations with members of the community of practice.

**APPENDIX**

**Québec School System**  
(Elementary and Secondary School)





# ANÁLISIS FACTORIAL DE UNA ESCALA DE ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA PARA PROFESORES

J. ALEXANDRE MARTINS  
ASSUMPTA ESTRADA  
MARIA M. NASCIMENTO

## RESUMEN

Para comprender mejor la predisposición y el compromiso de los profesores en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Estadística es necesario conocer sus actitudes y para ello se necesita un instrumento de evaluación adecuado. En este estudio se presenta el análisis factorial de la Escala de Actitudes hacia la Estadística (EAAE) propuesta por Estrada (2002), con una muestra de 1098 profesores del 1º y 2º ciclo de la educación básica portuguesa. Dicha escala se encuentra validada y presenta buenas características psicométricas. Los resultados obtenidos indican una fuerte consistencia interna y confirman su estructura multidimensional. Respecto a los componentes de las actitudes, a pesar de las diferencias en relación al modelo teórico, se detectan las mismas características. Finalmente se concluye que la actitud hacia la estadística por parte de los profesores analizados fue positiva, como en estudios previos y se recomienda la utilización de la escala en futuras investigaciones.

Palabras clave: Escala de actitudes hacia la Estadística; características psicométricas, análisis factorial; profesores de educación básica.

## INTRODUCCIÓN

En general, además de las cuestiones científicas y las especificidades en la enseñanza, el aprendizaje de la Estadística, las líneas curriculares y las investigaciones siguen la importancia que la materia ha ido adquiriendo en la sociedad. Las posiciones actuales reflejan, no sólo su papel decisivo e incuestionable en el progreso científico, sino también a nivel profesional en todas las áreas. Así mismo la Estadística se ha convertido en una herramienta imprescindible para todos los ciudadanos, tanto en su vida cotidiana, en sus decisiones del día a día, cómo en su capacidad crítica e intervención en la sociedad.

En el sistema educativo no universitario en Portugal fue a finales del siglo XX y principios del XXI cuando se reforzó y amplió la enseñanza de la Estadística. En el nivel de la educación básica, su en el currículo fue destacada en el Programa de Matemática para la Educación Básica (PMEB) de 2007 (Ministério da Educação, 2007), siendo este dominio denominado, en este contexto, Organización y

Martins, J. A., Estrada, A., y Nascimento, M. (2022). Análisis factorial de una escala de actitudes hacia la estadística para profesores. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 105-136). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

Procesamiento de Datos (OTD, acrónimo portugués). Este programa siguiendo las orientaciones curriculares de los países desarrollados, así como las investigaciones en el área de educación estadística señala y destaca la importancia de iniciar su enseñanza desde los primeros niveles, es decir, los estudiantes del 1er ciclo de educación básica. Sin embargo, en 2013, al final del desarrollo por etapas educativas del PMEB 2007, se aprobó otro nuevo programa en el que se disminuye de la importancia atribuida al dominio de la OTD con un giro pedagógico hacia un mayor formalismo, es decir, hacia sus “aspectos más técnicos” (Canavaro et al., 2019, p. 66).

Unos años después en 2016, se produce una gran mejora pues en Matemáticas, las “Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar” (Despacho n.º 9180/2016, en DR n.º 137/2016, de 19 de julio) se incluye explícitamente, por primera vez, el área de Estadística más concretamente en OTD, se subraya la importancia de vivenciar el proceso investigativo, con la recolección, organización y procesamiento de datos para responder preguntas que tengan sentido para los niños (Canavaro et al., 2019).

Finalmente Gomes et al., 2017 (Despacho n.º 6478/2017, de 21 de julio) elaboran, el “Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória” (PASEO,) que se presenta como un “referencial das decisões a adotar por decisores e atores educativos ao nível dos estabelecimentos de educação e ensino e dos organismos responsáveis pelas políticas educativas” (PASEO, Gomes et al., 2017, p.1). Las “Novas Aprendizagens Essenciais” (AE) de Matemáticas se articulan según las áreas de competencia de PASEO a lo largo del documento y reúnen lo que los estudiantes deben saber contenidos de conocimiento disciplinar estructurados; los procesos cognitivos que deben activar para adquirir ese conocimiento (operaciones/acciones necesarias para aprender); y el saber hacer asociado a él (que demuestre que ha aprendido), en una determinada materia y en la articulación entre los saberes de varias materias para un determinado año de escolaridad, tal como se resume en el texto de la Dirección General de Educación<sup>1</sup>. Las nuevas AE comenzarán a aplicarse en 1º, 3º, 5º y 7º año de escolaridad en 2022/2023. y por lo que a la Estadística se refiere, según la SPIEM (2021), se mejora significativamente su presencia, pues además de incluir los temas ya abordados en documentos curriculares anteriores, esta propuesta da mayor desarrollo al tratamiento de datos y a la probabilidad.

Todo este entorno implica cambios en la sociedad, en el sistema educativo, en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en la formación inicial y continua de los profesores involucrados. Evidentemente, estos cambios son exigentes para los docentes y sólo funcionarán en la práctica si el

---

<sup>1</sup> Recuperado de <http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-0>

profesorado está predispuesto, concienciado y motivado para mejorar su formación científica y didáctica en el área para poder alcanzar el objetivo principal, que es el éxito en el aprendizaje de la Estadística por parte de sus alumnos.

Para lograr el éxito deseado también es necesario conocer las actitudes de los profesores, así como los factores que influyen en ellas. Este conocimiento puede ayudar a planificar acciones en materia de educación y formación estadística de manera más específica, asertiva y adecuada.

Tradicionalmente los estudios sobre actitudes hacia la Estadística estaban mayoritariamente centrados en los estudiantes y, frecuentemente, en su relación con el rendimiento académico, Eichler y Zapata-Cardona (2016). En la actualidad esta situación está cambiando y encontramos cada vez más estudios con profesores (en ejercicio o en formación) como es el caso de Junior Vieira (2018), Casas-Rosal et al. (2019) y Alberti et al. (2020).

En Portugal los primeros trabajos sobre esta temática son los de Martins et al. (2011 y 2012), en los que se llevó a cabo una investigación centrada en la medición y caracterización de las actitudes hacia la Estadística de los profesores del 1º y 2º ciclo de la educación básica portuguesa (acrónimos 1º y 2º CEB<sup>2</sup>). Ambos están basados en el estudio de Estrada (2002), realizado en España, utilizando la versión en portugués de su Escala de Actitudes hacia la Estadística, acrónimo EAEE, escala ya probada, en condiciones sociológicas y educativas similares y con buenas características psicométricas. El trabajo que aquí se presenta forma parte de esa investigación y tiene por objetivo analizar la estructura multidimensional y características psicométricas de la EAEE a través del análisis factorial y comprender mejor los componentes que determinan o influyen en las actitudes hacia la estadística de estos profesores

El capítulo se inicia con la conceptualización teórica: de las actitudes hacia la estadística y sus componentes; a continuación, se presenta la metodología utilizada, así como el análisis y discusión de los resultados. Para finalizar se explican las limitaciones de la investigación y se abren perspectivas para futuras investigaciones.

## **ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA Y SUS COMPONENTES**

Las actitudes forman parte del dominio emocional, junto con las emociones y las creencias, que difieren en la estabilidad de la respuesta afectiva que representan, tanto por el grado de intervención del componente cognitivo en su formación, como por el tiempo que tardan en desarrollarse (Gómez-Chacón, 2016). El estudio de las actitudes hacia la Estadística es importante,

---

<sup>2</sup> Por regla, los alumnos de 1er CEB tienen entre 6 y 10 años y los de 2º CEB tienen entre 11 y 12 años

tanto por su influencia en el proceso educativo como por los resultados para la formación que de él se derivan.

En cuanto a los estudiantes, tienen sentimientos fuertes y, en general, bien definidos sobre la Estadística. Así, incluso antes de iniciar su formación, estos sentimientos (positivos o negativos) influyen de igual forma en el aprendizaje (Gal et al., 1997). En la misma línea Bourne (2018) indica que una actitud positiva los predispone al esfuerzo e implicación en el trabajo y contribuye al éxito académico. En cuanto a las actitudes de signo negativo, Bourne & Nesbit (2018) indican que estas pueden incluso condicionar la elección de carrera en los estudiantes que pretenden ingresar a la educación superior. Rodríguez-Santero & Gil-Flores (2019) refieren que las actitudes negativas son uno de los mayores obstáculos para el aprendizaje, lo que puede llevar a los estudiantes al desinterés, a la inhibición y a el bloqueo de cara al estudio.

En cuanto a los profesores, lo que ha moldeado sus actitudes es fundamentalmente la experiencia que tuvieron como estudiantes y también como profesionales y su estudio es importante por su influencia en las actitudes y en el proceso de aprendizaje de sus alumnos (Gal & Ginsburg, 1994; Estrada et al., 2011; Casas-Rosal et al., 2019; Alberti et al., 2020). En este sentido Oliveira & Vieira (2018) mencionan que “atitudes (...) em relação à Estatística influem no resultado do processo ensino-aprendizagem, pois há uma motivação destes professores para criar uma aprendizagem significativa (...) para que seus alunos possam explorar diferentes metodologias e adquirir segurança na sua própria capacidade” (Oliveira & Vieira, 2018, p.50).

En este contexto, es pues fundamental valorar las actitudes de estudiantes y profesores, sobre todo las de los profesores de los primeros años escolares. Para ello, es necesario seleccionar los instrumentos de medición adecuados que permitan identificar los factores que intervienen en su formación, sin olvidar que esta construcción y los posibles procesos de cambio asociados a ella son, en general, largos y difíciles de controlar debido a la multidimensionalidad del constructo.

La definición de actitud varía, dependiendo de los investigadores (Auzmendi, 1992; Gal et al., 1997; Kislenko, 2009), en el ámbito específico de esta investigación consideramos la de Philipp (2007) que las presenta como formas de actuar, sentir o pensar que muestran la disposición u opinión de la persona en relación al objeto actitudinal, en nuestro caso la Estadística. Complementamos esta definición con la de Gal et al. (1997) quienes afirman que las actitudes son una suma de emociones y sentimientos experimentados durante el período de aprendizaje de la materia. Con respecto a sus propiedades, Estrada (2009b) considera que son bastante estables, de diversas intensidades y se expresan de manera positiva o negativa. A veces pueden representar sentimientos que están ligados a

factores externos al sujeto, por ejemplo, el profesor o el libro. Estas actitudes se inician muy pronto en los estudiantes y, aunque suelen ser favorables en un principio, tienen una evolución negativa que, por regla general, persiste en el tiempo. Además, y de manera similar a Gal et al. (1997), Estrada (2009b) vincula el origen de la formación de actitudes hacia la Estadística a:

- experiencias previas en un entorno escolar, por ejemplo, la aplicación rutinaria de fórmulas, la ausencia de aplicaciones reales y de metodologías adecuadas.
- las nociones de Estadística obtenidas fuera del aula, en los medios de comunicación, que aparecen de manera equivocada, a veces, incluso en términos conceptuales.
- la asociación de la Estadística con las Matemáticas, transfiriendo las actitudes hacia la segunda a las de la primera.

Además, Gal et al. (1997) añaden que, si son intensos, algunos pensamientos o creencias pueden estar en el origen del desarrollo de actitudes hacia la Estadística, destacando entre ellos los siguientes pensamientos:

- Respeto por el tema (fácil o difícil, requiere habilidades, cualquiera puede dominarlo).
- Sobre si son parte de las Matemáticas o si simplemente requieren habilidades matemáticas ("La estadística es todo cálculo").
- Sobre el ambiente del aula y la práctica docente utilizada (los ejemplos se toman del mundo real, no del libro).
- Sobre ti, sobre cómo aprendes Estadística o Matemáticas ("No sé nada de la materia", "Soy bueno en esto").
- Sobre la utilidad o valor de la Estadística o las Matemáticas y su importancia en tu futuro profesional ("Nunca usaré esta materia", "no sirve para nada").

Las razones o causas que pueden provocar actitudes negativas se clasifican en tres categorías: situacionales, disposicionales y ambientales (Rodríguez-Santero & Gil-Flores, 2019). La primera categoría incluye los conocimientos previos adquiridos, ya sea a través de la experiencia como estudiante o a través de la vida diaria, por ejemplo, los medios de comunicación. El segundo incluye los comportamientos y habilidades de los estudiantes, es decir, aquellos centrados en el autoconcepto en relación con los contenidos matemáticos y estadísticos. El tercero incluye cuestiones relacionadas con el entorno, en particular el contexto cultural y las características sociodemográficas.

Según los estudios previos, las actitudes hacia una materia (por ejemplo, hacia la Estadística) son consideradas como un constructo multidimensional y están estructuradas por componentes.

También en este punto hay varios enfoques posibles (e.g., Auzmendi, 1992; Schau, et al., 1995; Schau, 2003; Kim et al., 2017; Oliveira Júnior & Vieira, 2018). En esta investigación las actitudes también se consideran como un concepto multidimensional con componentes pedagógicos y antropológicos Estrada (2002)

En este enfoque se contemplan tres factores básicos, denominados componentes pedagógicos (o didácticos):

- Componente cognitivo: que se refiere a las formas de expresar el pensamiento, las concepciones y las creencias en relación con el objeto de la actitud, abarcando desde simples procesos perceptivos hasta procesos cognitivos más complejos. Esto incluye ideas, creencias, imágenes y percepciones sobre el objeto de actitud y presenta características tales como un carácter fijo y estable, diferente a la mera opinión, singularidad, referente a una sola persona, objeto o situación, y no siempre si se expresa conscientemente;
- Componente afectivo o emocional: el cual se relaciona con las formas de expresar el sentimiento en relación al objeto de actitud, englobando todas las emociones y sentimientos que provoca la Estadística, siendo reacciones subjetivas positivas o negativas, de proximidad o lejanía, de satisfacción o insatisfacción. Estas reacciones refuerzan la relación del sujeto con el objeto de la actitud y pueden contribuir a consolidar el poder motivacional de las actitudes;
- Componente conductual o tendencial: que aparece asociado a acciones en relación al objeto de las actitudes, abarcando acciones o intenciones de conducta que representan la tendencia a decidir en términos de acción de forma concreta y determinada.

Asimismo, por tratarse de una escala dirigida a profesores, además de los componentes pedagógicos, Estrada (2002) también tuvo en cuenta tres componentes antropológicos:

- Componente social: que se relaciona con la percepción y valoración del papel de la Estadística en el contexto sociocultural de cualquier ciudadano. En el ámbito de este estudio, aparece como una alternativa a la visión de la Estadística como un tipo de conocimiento aislado de la cultura o los valores culturales;
- Componente educativo: que se relaciona con aspectos relacionados con el entorno educativo y engloba el interés por la Estadística y su aprendizaje, la visión de su utilidad

para el alumno, la opinión sobre la importancia de su inclusión en el currículo y también la dificultad percibida en su estudio.

- Componente instrumental: que se refiere a la atribución de la utilidad de la Estadística a otras asignaturas como forma de razonamiento y como componente cultural.

Siguiendo las diversas definiciones de actitudes hacia la Estadística y las estructuras multidimensionales que se les atribuyen, han surgido distintos instrumentos de medición generalmente dirigidos a estudiantes. Los de mayor uso, aceptación y proyección a nivel internacional están referenciados en Silva et al. (1999), Carmona (2004), Estrada (2009b) y Ramírez et al. (2012). En esta investigación se aplicó la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada (2002) acrónimo EAEE por ser la única orientada a profesores o futuros profesores. La EAEE es de creación original en español, se construyó combinando las escalas SAS, ATS y EAEA y contemplando los componentes pedagógicos y antropológicos antes definidos. Es una escala tipo Likert de 25 ítems, 14 afirmativos y 11 negativos, con cinco opciones de respuesta, que van desde 1 (“totalmente en desacuerdo”) hasta 5 (“totalmente de acuerdo”) que se aplicó a una muestra de 74 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Lleida, y a 66 profesores en activo de la provincia de Lleida (Estrada, 2002).

Utilizando esta escala, en este trabajo se evalúan y caracterizan las actitudes globales hacia la Estadística de los profesores de 1º CEB y los que imparten Matemáticas de 2º CEB en Portugal, se analizan algunas propiedades psicométricas de la escala para finalizar con el análisis clúster (o de conglomerados), complementado con el análisis factorial exploratorio.

## **METODOLOGÍA**

Como referido, el instrumento utilizado para obtener la información necesaria para el desarrollo de este trabajo fue la EAEE (Estrada, 2002). porque se dirigía a profesores en formación o en ejercicio, Además, también se consideró la similitud del contexto social y escolar específico de esta investigación y la de Estrada (2002). La traducción al portugués de esta escala fue sometida a la opinión y dictamen de un panel de expertos. Después de recopilar y analizar los aportes de todo el panel, se decidió realizar los cambios indicados por tres o más panelistas. Este proceso de validación de la traducción dio como resultado el instrumento de medición utilizado en este estudio (Martins et al., 2012; Martins, 2015). Además, se realizó una caracterización personal (variables personales),

Como población de estudio se establecieron los profesores de la escuela primaria pública de Portugal que enseñaban en el 1º CEB o que enseñaban Matemáticas en el 2º CEB. Debido a la falta de tiempo y recursos suficientes para recolectar y analizar datos de todos los elementos de la población,

se consideró hacerlo solo en una parte de los elementos del universo objetivo elegido, es decir, en una muestra de la población (Hill & Hill, 2000). Para establecer dicha muestra, y por conveniencia, entre los 23 Cuadros de Zona Pedagógica<sup>3</sup> (QZP) existentes en Portugal, se eligieron los agrupamientos de escuelas, con los niveles educativos deseados, de los QZP de Coimbra, Guarda y Vila Real para la distribución y recogida de los cuestionarios. Esta selección tuvo el cuidado de abarcar regiones del interior y del litoral, áreas urbanas y rurales, con diferentes dimensiones

**Tabla 1.** Profesores participantes por nivel de enseñanza y por QZP

	Coimbra			Guarda			Vila Real			Total	Part.	%
	Total	Part.**	%	Total	Part.	%	Total	Part.	%			
Agrupamientos	39	29	74.4	21	18	85.7	21	17	81	81	64	79
Profesores	Total	Part	%	Total	Part	%	Total	Part	%	Total	Part	%
1° CEB*	802	329	41.0	375	186	49.6	642	363	56.5	1819	878	48.3
2° CEB*	165	95	57.6	106	67	63.2	119	95	79.8	390	257	65,9
Total	967	424	43.8	481	253	52.6	761	458	60.2	2209	1135	50.4

**Nota:** \*Los números totales de maestros fueron proporcionados por los agrupamientos escolares;  
\*\*Part.: Participantes

**Fuente:** Elaborado por los autores

Inicialmente se realizó un contacto telefónico o personal con los responsables de las direcciones de los 81 agrupamientos referenciados (Tabla 1). En este contacto, y luego de aclarar el marco y objetivos del estudio, se solicitó un acuerdo con la dirección de cada uno de los agrupamientos para la distribución y recolección del cuestionario, registrado en la Dirección General de Innovación y Desarrollo Curricular (DGIDC), a los profesores de los respectivos agrupamientos que fueron cubiertos por el estudio. Los cuestionarios fueron distribuidos a los profesores por los responsables indicados por las direcciones de los agrupamientos. El proceso de muestreo fue similar al muestreo aleatorio por “conglomerados” (Pestana y Gageiro, 2000).

La muestra resultante fue grande, con 1098 elementos, comprendiendo una variedad suficiente de casos y reproduciendo fielmente las distribuciones de la población subyacente (Martins 2015). Esta reproducción se logró relativamente bien en esta muestra, en la que los porcentajes para variables como el género, la edad o el ciclo en el que el profesor imparte, fueron respetados por el propio proceso y en relación con los datos disponibles (DGEEC, 2012).

De los 81 grupos de los tres QZP elegidos para obtener datos (48,2% en Coimbra, 25,9% en Guarda y 25,9% en Vila Real) aceptaron participar, 64 (79%), siendo el 45,3 % del QZP de Coimbra, el 28,1% de la QZP Guarda y 26,6% de la QZP Vila Real, es decir, con proporciones similares al total

<sup>3</sup> Recuperado de [www.arlindvsky.net/wp-content/uploads/2011/08/códigos-de-QZP-e-Concelhos.pdf](http://www.arlindvsky.net/wp-content/uploads/2011/08/códigos-de-QZP-e-Concelhos.pdf)

de los agrupamientos (Martins, 2015). El cociente entre el número total de profesores del 2º CEB en el área de contratación de Matemáticas y Ciencias Naturales y el número total de profesores del 1º CEB público en Portugal correspondió a una proporción muy cercana a los valores reales totales del país (Martins, 2015; Martins et al., 2021). Finalmente, se decidió eliminar los cuestionarios que no tenían puntaje asignado a uno o más ítems de la escala, habiéndose validado 1098 cuestionarios para análisis, ya que se eliminaron 3,3% (37) del total de cuestionarios recogidos.

**Tabla 2.** *Edades de los elementos de la muestra, a nivel global, por ciclo educativo y por género*

	<b>Global</b>	<b>1º CEB</b>	<b>2º CEB</b>	<b>Femenino</b>	<b>Masculino</b>
<b>Tamaño de la muestra,</b> <b>N</b>	1098	852	246	874	224
<b>(Porcentaje, %)</b>		(77.6%)	(22.4%)	(79.6%)	(20.4%)
<b>Mínimo</b>	23	23	23	23	25
<b>Máximo</b>	68	68	63	68	61
<b>Promedio</b>	45.5	46.3	42.8	45,0	47.2
<b>Desviación estándar</b>	8.3	7.8	9.5	8.3	8.5
<b>Coefficiente de variación</b>	0.18	0.17	0.22	0.18	0.18
<b>Sin respuestas</b>	8	8	0	8	0

**Fuente:** Elaborado por los autores

Se encontró que la mayoría (79,6%) son mujeres y con un promedio de edad levemente inferior a la de los hombres (Tabla 2). Además, la mayoría de los profesores (77,6%) son del 1º CEB, en que el 82,4% son mujeres y presentan un promedio de edad de 46,3 años  $\pm$  7,8 años. En la 2ª CEB, el porcentaje de mujeres (69,9%) es menor que de los profesores de 1º CEB, bien como el promedio de su edad (42,8  $\pm$  9,5 años). El envejecimiento del profesorado, más sentido en el 1º CEB, también se refleja en la antigüedad. La formación inicial es muy diversa en ambos ciclos y la mayoría de los profesores (70%) completaron su formación inicial en el área específica del ciclo en el que imparten clase. Solo alrededor del 30% de los profesores de la muestra tenían alguna formación académica adicional a la formación inicial, teniendo los del 1º CEB proporciones ligeramente superiores para los distintos tipos de formación post universitaria (Martins, 2015; Martins et al., 2021). En cuanto a la titulación, y de forma global, la mayoría (83,5%) indica la Licenciatura. El Bachillerato solo tiene alguna expresión en los profesores del 1º CEB (Martins, 2015). En cuanto a la formación estadística de los profesores de 2º CEB, la mayoría (87,4%) lo obtuvo en la educación superior, mientras que en el 1º CEB solo el 30,5%. Además, indicaron que no tuvieron ninguna formación ni aprendieron por sí

mismos en el 1° CEB 33% y en el 2° CEB 9% (Martins, 2015; Martins et al., 2021). En cuanto a la enseñanza de la estadística, cabe señalar que el 37,2% de los profesores del 1° CEB indicaron que aún no habían enseñado estadística, siendo este porcentaje residual en el caso de los profesores del 2° CEB (Martins, 2015; Martins et al., 2021).

## **ANÁLISIS DE RESULTADOS**

### **Análisis de la puntuación global de la actitud hacia la Estadística**

A continuación, se presenta el análisis de la puntuación total obtenida por los profesores a través de la EAEE (Estrada, 2002). Dado que los ítems no están redactados en el mismo sentido, todos ellos han sido codificados de modo que una puntuación mayor vaya asociada a una actitud más positiva y viceversa. Por ello se ha invertido la puntuación en los 11 ítems negativos que van desde 1 (“totalmente de acuerdo”) hasta 5 (“Muy en desacuerdo”)

De esta manera, la puntuación total en actitudes, será la suma de las puntuaciones de los 25 ítems, y será la actitud de cada encuestado respecto a la Estadística. Será tanto más favorable esta actitud cuanto más elevada sea esta puntuación.

El total de puntos que cada encuestado puede sacar en la escala de actitudes (tipo Likert) es un número comprendido entre 25, actitud totalmente negativa y 125, actitud altamente positiva. Dado que la neutra o indiferente, se puede considerar una puntuación de 75, todas las puntuaciones superiores serán más favorables cuando mayor sea el valor obtenido en la escala de medida.

Los resultados del análisis global de las actitudes hacia la Estadística se resumen en la Tabla 3. Se puede observar que el promedio es de 87,97 puntos, es decir, es un 17,3% superior al punto intermedio 75 (entre el mínimo de 25 y el máximo posible de 125). Todavía el puntaje total, este presenta una mediana de 88 puntos, que está por encima del valor de una actitud de indiferencia, los 75 puntos.

**Tabla 3.** *Resumen estadístico de la puntuación total*

Puntuación Total	Mínimo posible	Mínimo	Máximo	Máximo posible	Promedio	Punto medio	DE	CV
Global	25	46	119	125	87.97	75	11.87	0.13

**Nota:** Desviación estándar, DE; Coeficiente de variación, CV

**Fuente:** Elaborado por los autores

La amplitud varió entre las puntuaciones mínima de 46 y máxima de 119. Además, presentó una pequeña dispersión ( $CV < 15\%$ , Pestana y Gageiro, 2000, p. 81). En resumen, la mayoría de los profesores tienen puntajes totales en la escala por encima del valor de indiferencia, es decir, las actitudes de los profesores hacia la Estadística son globalmente positivas.

Estos resultados globales están en consonancia con los valores obtenidos por Estrada (2002; 2009a), en los que la media fue 88,8 y la moda 91. En el estudio de Estrada (2002; 2009a), los profesores en servicio presentan una media de puntuación total (91,3) superior a la de los profesores en formación (85,4). Es decir, el promedio del estudio con estos profesores portugueses estuvo entre estos dos promedios. Así mismo, en el estudio comparativo de Aparício et al. (2010), los profesores españoles tenían puntuaciones totales de  $83,9 \pm 7,2$  (promedio  $\pm$  desviación estándar), la de los profesores peruanos fue de  $72,9 \pm 11,1$ , con la media de los profesores en el presente estudio (y para los mismos 22 ítems utilizados, entre estos dos) puntuaciones totales de  $79,6 \pm 12,3$ , pero en una muestra mucho más grande. En otros trabajos encontramos resultados similares así el de León-Montero et al. (2018), con futuros maestros de infantil en España, obtienen resultados que indican una apreciación globalmente positiva de la Estadística. Usando la misma escala EAEE en la investigación de Mayén & Salinas (2016) aunque con estudiantes de bachillerato mexicanos (dos grupos) con puntuaciones totales de  $88,6 \pm 9,8$  y  $88,5 \pm 10,1$  que también indica actitudes globales positivas en este otro colectivo. Finalmente, usando otra escala (basada en la EAEE), los estudios de Oliveira Júnior (2016) y Oliveira Júnior y Vieira (2018), con profesores de asignaturas de Estadística en la educación superior brasileña, también muestran actitudes globalmente positivas y superiores a las de profesores de los primeros años de la enseñanza básica en Brasil.

### **Consistencia interna de la Escala**

Respecto a la fiabilidad de la escala EAEE de 25 ítems, en esta investigación, el coeficiente de consistencia interna, alfa de Cronbach, obtenido fue de 0,869. Este valor está por encima del valor obtenido por Estrada (2002) con profesores en formación y en ejercicio y también por el valor

obtenido por Aparício et al. (2010) con profesores en servicio de España y Perú, aunque en este último estudio solo se utilizaron 22 de los 25 ítems de la escala EAEE (Tabla 4). Estos valores son consistentes con los obtenidos en otros trabajos con estudiantes, como el de Mayén & Salinas (2016) y Carvalho et al. (2017), con alfa de Cronbach entre 0,81 y 0,93 respectivamente.

**Tabla 4.** *Resumen estadístico comparativo de la consistencia interna*

	Portugal		España	España y Perú	España	Perú
	Martins (2015)		Estrada (2002)	Aparício et al. (2010)		
Número de ítems	25	22	25	22		
Alfa Cronbach	0.869	0.874	0.774	0.844	0.753	0.839

**Fuente:** Elaborado por los autores

### Análisis clúster

Además de analizar las puntuaciones globales de la escala, hemos analizado las posibles relaciones entre ítems aislados, para confirmar, por un lado, la composición teórica de los distintos componentes y, por otro, estudiar si algunos de los ítems son redundantes, en el sentido de que miden lo mismo.

El método utilizado fue el método jerárquico con aglomeración, de vecinos más cercanos, en el que las relaciones entre las variables se establecen a través de matrices de semejanza (o disimilitud) y las variables a través de matrices de correlaciones (o distancias) (Everitt et al., 2011; Hair et al., 2009).

Los resultados del análisis clúster de variables (es decir, de las respuestas a los veinticinco ítems), cuyos resultados se muestran en la Tabla 5. Como medida de similaridad, se usó el coeficiente de correlación (que varía teóricamente entre  $-1$  y  $+1$ ), puesto que las variables son numéricas y una correlación fuerte y positiva entre dos ítems indica que, en realidad, las respuestas son similares. Una correlación negativa e intensa, por el contrario, indicaría que las respuestas son opuestas.

**Tabla 5.** *Evolución de la aglomeración en el análisis clúster*

Etapa	Combinaciones de grupos		Coeficientes de correlación	Paso donde el cluster aparece por primera vez		Próxima etapa
	Cluster 1	Cluster 2		Cluster 1	Cluster 2	
1	18	19	0.639	0	0	3
2	10	23	0.631	0	0	3
3	10	18	0.593	2	1	5
4	14	21	0.567	0	0	17
5	10	11	0.565	3	0	6
6	10	24	0.551	5	0	7
7	10	16	0.545	6	0	8
8	9	10	0.542	0	7	9
9	9	12	0.509	8	0	10
10	9	13	0.506	9	0	11
11	5	9	0.493	0	10	12
12	3	5	0.475	0	11	14
13	6	7	0.472	0	0	16
14	3	25	0.442	12	0	15
15	3	22	0.439	14	0	16
16	3	6	0.432	15	13	17
17	3	14	0.427	16	4	19
18	15	17	0.410	0	0	19
19	3	15	0.368	17	18	20
20	3	20	0.307	19	0	21
21	3	4	0.304	20	0	22
22	3	8	0.280	21	0	24
23	1	2	0.275	0	0	24
24	1	3	0.192	23	22	0

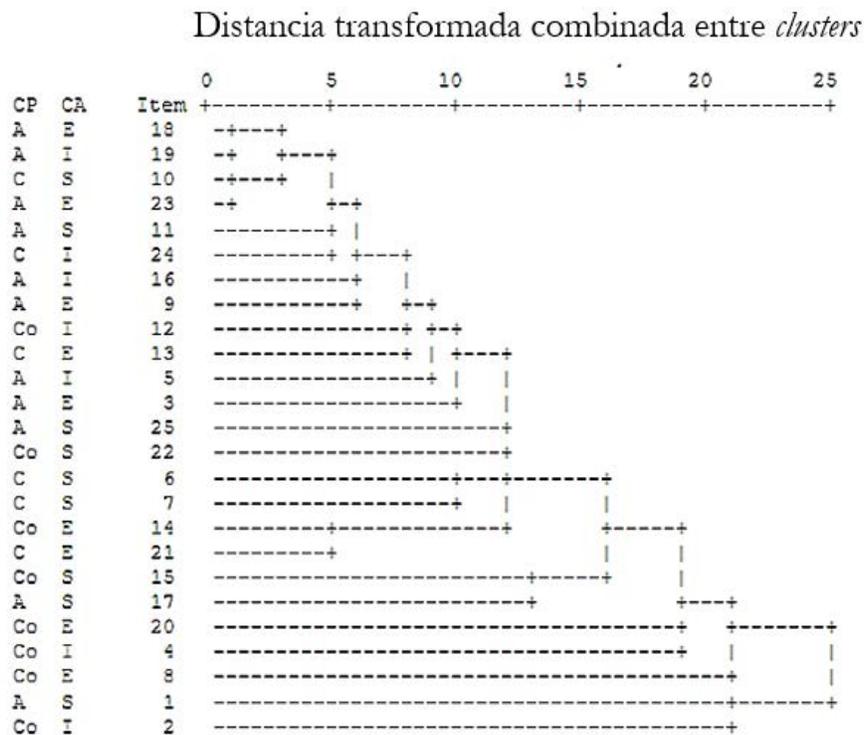
**Fuente:** Elaborado por los autores

Así, las primeras variables en asociarse fueron la 18 y la 19, por presentar el mayor coeficiente de correlación (0.639) en la matriz 25×25. En el segundo paso, 18 y 19 representarán un grupo y serán el nuevo elemento de la nueva matriz (24×24) y ahora se asociarán las variables 10 y 23, cuyo coeficiente de correlación es el segundo mayor (0,631), y así sucesivamente. En el proceso jerárquico, las asociaciones muestran cada vez menor coeficiente de correlación, en este caso la asociación entre la variable 1 y 3, en la iteración 24, muestra el menor de los coeficientes de correlación, 0,192, con solo 3 valores por debajo de 0,3, que fue el valor mínimo utilizado por Estrada (2002, 2009a). Todos los coeficientes son positivos, lo que se esperaba en el sentido de que todos los ítems miden actitudes.

En el análisis cluster, la forma habitual de representar gráficamente las fusiones sucesivas de subgrupos es a través de un dendograma, que es una representación en forma de árbol donde los

"nodos" representan conglomerados y las longitudes de los "tallos" (alturas) representan las distancias a las que los grupos se unen (Everitt et al., 2011). El dendograma esquematiza los conglomerados, aunque en una escala diferente a la escala de distancias (semejanzas o desemejanzas) con valores de 0 a 25. Coeficientes menores, por el contrario, indican aglomeraciones más homogéneas. Leyendo el dendograma obtenido en este análisis (Figura 2), de derecha a izquierda, se puede observar que entre las distancias mayores 21 y 22 se obtienen dos *clusters*. Para una distancia entre 19 y 20 se obtienen cuatro *clusters* y para una distancia entre 12 y 13 se obtienen ocho *clusters*. Debido a las grandes distancias, se puede observar que se necesitan varios *clusters* para obtener una homogeneidad razonable. Además, existe un clúster que incluye la mayoría de los ítems (*cluster* 3, Figura 1).

Figura 1. Dendograma



CP - Componentes pedagógicas (PC)  
 A - Afetiva; C - Cognitiva; Co – Comportamental;  
 Componentes antropológicas (CA)  
 S- Social; E- Educativa; I- Instrumental

Fuente: Elaborado por los autores

En cuanto a los diversos componentes considerados a priori, en el dendograma se puede observar que no existen aglomeraciones que coincidan claramente con estos. Sin embargo, para el CP, las primeras asociaciones muestran un predominio del componente Afectivo, incluso con los ítems

intercalados con algunos ítems del componente cognitivo; esta interrelación fue identificada en Estrada, (2002). Luego, y de forma más agrupada, aparecen los ítems del componente Social, aunque alternados con algunos ítems del componente Educativo. Es decir, en general, los componentes aparecen agrupados o divididos en varios grupos con algunos de sus elementos unidos entre sí. Los elementos para dos conglomerados hasta ocho conglomerados, en cuanto soluciones obtenidas a través del método de conglomerado del vecino más cercano, se resumen en la Tabla. 6

**Tabla 6.** *Elementos de los clusters*

Ítem	8 clusters	7 clusters	6 clusters	5 clusters	4 clusters	3 clusters	2 clusters
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	1
3	3	3	3	3	3	3	2
4	4	4	4	4	3	3	2
5	3	3	3	3	3	3	2
6	3	3	3	3	3	3	2
7	3	3	3	3	3	3	2
8	5	5	5	5	4	3	2
9	3	3	3	3	3	3	2
10	3	3	3	3	3	3	2
11	3	3	3	3	3	3	2
12	3	3	3	3	3	3	2
13	3	3	3	3	3	3	2
14	3	3	3	3	3	3	2
15	6	6	3	3	3	3	2
16	3	3	3	3	3	3	2
17	7	6	3	3	3	3	2
18	3	3	3	3	3	3	2
19	3	3	3	3	3	3	2
20	8	7	6	3	3	3	2
21	3	3	3	3	3	3	2
22	3	3	3	3	3	3	2
23	3	3	3	3	3	3	2
24	3	3	3	3	3	3	2
25	3	3	3	3	3	3	2

**Fuente:** Elaborado por los autores

Como sugieren Reis (1997) y Everitt et al. (2011), la partición se realizó en la etapa a partir de la cual ya no hay cambios significativos en la distancia transformada de combinación entre conglomerados (escala dendograma), en este caso, la de los ocho conglomerados. Sus elementos se muestran en la tabla, donde podemos ver la existencia de un *clúster* que incluye la mayoría de los ítems, como ya se mencionó.

Al final del proceso de aglomeración se destacan los ítems 1 – Me molesta la información estadística en algunos programas de TV y 2 – A través de las estadísticas se puede manipular la realidad, por no formar parte del referido *clúster*.

Además de los ítems 1 y 2, que surgen en etapas anteriores como ítems aislados para formar conglomerados, con ocho conglomerados se agregan en esta situación los ítems 8 - Es habitual explicar a mis compañeros problemas estadísticos que no entendían, 4 - Uso poco la estadística fuera de la escuela, 20 – En las clases de estadística entendía poco de lo que se decía, 15 - No entiendo la información estadística que aparece en la prensa escrita y 17 - Me siento intimidado ante datos estadísticos. De estos siete ítems, cuatro (4, 8, 15 y 20) están asociados al componente pedagógico conductual, evidenciando que la tendencia a decidir en términos de acción en relación a la Estadística de manera concreta y determinada por parte de los profesores es diferente a las ideas, creencias, imágenes y percepciones sobre ella, así como las formas de expresar el sentir en relación a la materia.

Por otro lado, tres de estos ítems (1, 15 y 17) están asociados al componente antropológico social, destacando que los aspectos de la percepción y apreciación del papel de la Estadística en el contexto sociocultural de cualquier ciudadano distan mucho de los aspectos relacionados con:

- el interés por la Estadística y su aprendizaje
- la opinión sobre su utilidad para el estudiante
- la opinión sobre la importancia de su inclusión en el currículo
- la dificultad percibida en relación con el mismo
- la atribución de la utilidad de la Estadística a otros sujetos como forma de razonamiento y como elemento cultural.

Finalmente, cuatro (1, 2, 4 y 8) de los siete ítems mencionados se asocian a los ítems con puntuaciones medias más bajas, por lo que se asocian a una disminución del coeficiente de consistencia interna.

En conclusión, a partir del análisis de conglomerados realizado, se tiene la idea de que los ítems de la escala utilizada evalúen en general un mismo constructo: la actitud hacia la Estadística (Estrada, 2002). Es decir, el modelo teórico de los componentes de las actitudes, que sirvió de base para la escala EAEE, parece reflejarse en los resultados obtenidos y sigue afirmándose como un modelo complejo. Los diversos componentes considerados aparecen mezclados o divididos en varios pequeños grupos, aunque algunos de sus elementos aparecen juntos. La escala EAEE es multidimensional e involucra tres componentes pedagógicos y tres componentes antropológicos interrelacionados, lo que conduce

a nueve subconjuntos de ítems. Además, hay algunos elementos que merecen cierta atención y cuidado, en consonancia con los resultados obtenidos.

### **Análisis factorial exploratorio**

Se puede decir que el análisis factorial es un procedimiento que busca indicar en qué medida diferentes variables se basan en un mismo concepto o factor, indicando cuáles están relacionadas entre sí y cuáles no, a través de la correlación existente entre ellas, vistos como un todo (Loewenthal, 2001). Este método estadístico multivariado permite transformar un conjunto de variables correlacionadas entre sí en un conjunto con menos variables. Estas nuevas variables (variables observables, factores) no están correlacionadas y se componen de combinaciones lineales de las variables iniciales. Los coeficientes en estas combinaciones lineales (los pesos o cargas) son tales que los factores explican la máxima variación en los datos que no están correlacionados. En el análisis factorial, la varianza de los factores se descompone en una parte que se debe a factores comunes (comunalidad) y otra parte debida a factores únicos. Este análisis evalúa la validez de las variables que forman parte de los factores (Gnanadesikan, 1997; Pestana & Gageiro, 2000; Hair et al., 2009).

En este estudio, se utilizó el análisis factorial exploratorio (AFE), ya que solo se pretendía obtener una indicación de la relación entre las variables (Pestana & Gageiro, 2000; Hair et al., 2009). Para validar este AFE del conjunto de 25 variables (ítems) de la EAEE, era imprescindible disponer de una muestra GRANDE (Hair et al., 2009) en este estudio se supera ampliamente al disponer de 1098 cuestionarios validados, así como. un número de cuestionarios por variable (ítems) muy por encima de los 20:1 que propone Williams et al. (2010).

El proceso utilizado para estimar las varianzas y pesos en los factores fue el de componentes principales (PCA). Para los factores en el PCA, se estiman como compuestos o combinaciones lineales ponderadas de los indicadores (es decir, puntajes totales, Kline, 2013). El método de rotación aplicado fue el varimax que produce factores independientes (Damásio, 2012). En este método y por factor, se minimiza el número de variables con pesos elevados así, los pesos mayores o iguales a 0,5 se consideran significativos y son responsables del 25% o más de la varianza (Hair et al., 2009). Estos métodos fueron elegidos para permitir la comparación con el trabajo de Estrada et al. (2013).

La matriz de correlaciones resultante de los datos, así como la matriz de probabilidades asociadas a los mismos, muestran que todas las variables presentan correlaciones significativas al 5% de significación con relación a más de una variable. Para todas las variables existen coeficientes de correlación de Pearson que aseguran cierto grado de compartición de factores comunes y, de esta manera, se obtienen mejores garantías para la aplicación del modelo factorial (Kline, 2013). Los ítems

con correlaciones menos significativas fueron los ítems 1 y 2, con cuatro correlaciones y tres correlaciones, respectivamente. Además, el ítem 8 presentó seis correlaciones negativas y el ítem 2 presentó correlaciones negativas con casi todas las demás variables (solo en cuatro esto no sucedió). Este hecho refuerza la idea de que, en particular, el ítem 2 quizás debería ser eliminado de la escala EAEE en futuras investigaciones y ya ha sido mencionado en trabajos previos por Estrada et al. (2009), Aparício et al. (2010), Estrada et al. (2010a, 2010b), Estrada et al. (2013) y Martins (2015).

En el siguiente paso, y antes de proceder con la extracción de factores, se utilizaron varias pruebas para evaluar la idoneidad de los datos para el análisis factorial. La prueba de Kaiser-Meyer-Olkin es una medida de adecuación de los datos para el análisis factorial y fue de 0,919, indicador de muy buena EPT (Damásio, 2012). En la prueba de esfericidad de Bartlett ( $p=0,00 < 0,05$ ) se concluye que la matriz de correlación no es la matriz identidad, por lo que existirá una correlación entre las variables. Por lo tanto, es admisible el uso de AGE (Pestana & Gageiro, 2000; Hair et al., 2009; Damásio, 2012). Las medidas de adecuación muestral (MSA) aparecen en la diagonal principal de la matriz anti-imagen, y cuanto más cerca de 1 sean estos valores, más garantías hay de la aplicación de la AFE. Si los valores son pequeños, se debe considerar la eliminación de la respectiva variable. Además, al utilizar la extracción de componentes principales (AFcp), los elementos fuera de la diagonal deberían ser pequeños (Pestana & Gageiro, 2000; Hair et al. 2009). Estos supuestos se verifican en la matriz anti-imagen obtenida y, una vez más, avalan la aplicación de AFcp a estos datos. Cabe señalar que las variables con menor MSA fueron nuevamente las de los ítems 1 ( $0,697 < 0,9$ ) y 2 ( $0,509 < 0,9$ ), que tienen el mayor valor absoluto fuera de la diagonal ( $0,249$ ). Este hecho refuerza los comentarios para estos dos ítems y para el ítem 2 en particular.

Las comunalidades representan la proporción de la varianza de cada variable que se explica por los componentes principales retenidos. Su valor varía de 0 (cuando los factores comunes no explican nada de la varianza de la respectiva variable) a 1 (para los factores comunes que explican toda su varianza). Con referencia a un elemento en particular, una baja comunalidad (e.g.,  $0,2$  o  $< 20\%$ ) sugiere que el elemento tiene poco en común con otros elementos y no es importante para el análisis, por lo que puede eliminarse (Hassad, 2007). Los valores de comunalidades en esta investigación oscilaron entre  $0,627$  y  $0,382$ , Tabla 7, lo que indica que todas las variables tienen relación con los factores retenidos. Además, hay un único factor presente en todos ellos, que es la actitud hacia la Estadística.

**Tabla 7.** *Comunalidades*

Ítems	Extracción
1- Me molesta la información estadística que transmiten algunos programas de TV	0.624
2- A través de las estadísticas se puede manipular la realidad	0.627
3 - Me divierto en las clases donde se explican las estadísticas	0.382
4- Raramente uso estadísticas fuera de la escuela	0.543
5- Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas con objetividad	0.413
6- La estadística es solo para científicos	0.482
7- Las estadísticas no sirven para nada	0.536
8- A menudo explico a mis compañeros problemas estadísticos que no entienden	0.475
9- Si pudiera eliminar alguna materia, sería estadística	0.504
10- Las estadísticas ayudan a entender el mundo de hoy	0.809
11- Las estadísticas son fundamentales en la formación básica del futuro ciudadano	0.498
12- Utilizo la estadística para resolver problemas del día a día	0.577
13- En la escuela no se debe enseñar estadística	0.468
14- Para mí los problemas de estadística son fáciles	0.633
15- No entiendo la información estadística que aparece en la prensa escrita	0.482
16- Me gusta la estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas	0.558
17- Me siento intimidado por los datos estadísticos	0.510
18- El mundo de la estadística me parece interesante	0.603
19- Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos	0.547
20- Cuando tomaba clases de estadística entendía poco de lo que se decía	0.407
21- La estadística es fácil	0.652
22- Entiendo mejor los resultados electorales cuando aparecen representaciones gráficas	0.426
23- Me gusta resolver problemas cuando uso estadísticas	0.642
24- Las estadísticas te ayudan a tomar decisiones más informadas	0.569
25- Evito la información estadística cuando la leo	0.391

**Fuente:** Elaborado por los autores

En esta investigación, el número de ítems EAEE es menor a 30 y el número de casos es mayor a 250, por lo que la solución de cinco factores es aceptable, ya que existen cinco factores con autovalores mayores a 1 (Pestana & Gageiro 2000, pág. 399).

La Tabla 8 muestra los porcentajes explicados por cada factor antes y después de la rotación varimax. Considerando los valores antes de la rotación para la explicación de cada factor, los cinco factores retenidos explican acumulativamente el 53,4% de la variabilidad de las 25 variables (ítems de la EAEE). El primer factor explica el 29,2% de la varianza total y los restantes factores retenidos explican entre el 8% y el 5%, mostrando una fuerte caída con relación al primer factor, como en los trabajos de Estrada (2002, 2009a). Solo considerando la contribución de los cinco factores retenidos, el primer factor representa el 54,7% de la varianza explicada de estos factores retenidos. Por lo tanto,

el factor más importante es el primero, siendo similar la importancia relativa de los restantes factores, pero con porcentajes bastante más bajos.

**Tabla 8.** *Varianza total explicada y factores retenidos*

Factores	Extracción inicial de factores			Extracción de factores después de la rotación			Factores retenidos	
	Total	% de la Varianza	% Cumulativo	Total	% de la Varianza	% Cumulativo	% de la Varianza	% Cumulativo
1	7,305	29,218	29,218	5,234	20,936	20,936	54,68%	54,68%
2	2,024	8,096	37,314	3,318	13,272	34,208	15,15%	69,83%
3	1,514	6,055	43,369	1,924	7,697	41,905	11,33%	81,16%
4	1,370	5,481	48,851	1,519	6,077	47,982	10,26%	91,42%
5	1,146	4,584	53,435	1,363	5,453	53,435	8,58%	100,00%

**Fuente:** Elaborado por los autores

En cuanto al porcentaje explicado por cada factor después de la rotación Tabla 9, el valor porcentual de la varianza total explicada por los cinco factores es casi igual al total antes de la rotación, 53,4% (aceptable en ciencias sociales, Hair et al., 2009). Para el porcentaje explicado por cada factor después de la rotación, hay una disminución en el valor del primer factor y pequeños aumentos en los otros factores. Este hecho también es esperable porque la rotación apunta a extremar los valores de los pesos para que cada variable se asocie a un solo factor.

Mediante el método de rotación varimax y luego de nueve iteraciones, se estabilizaron las estimaciones de las varianzas en las variables explicadas por los factores después de la rotación. La Tabla 9 muestra pesos con un valor de 0,4 o superior (Loewenthal, 2001; Hair et al., 2009; Estrada et al., 2013). En esta tabla las variables (ítems) se presentan en orden decreciente de importancia, según los valores de las correlaciones factoriales rotadas (negrita), para los sucesivos factores retenidos. Allí aparecen las variables asociadas a los respectivos componentes de las actitudes que, en términos teóricos, fueron consideradas como base para la construcción de la escala EAEE. Luego, los factores se interpretan en términos de los ítems asociados a ellos y se presenta una designación que identifica sus características esenciales

**Tabla 9.** Pesos que correlacionan los ítems con los factores después de la rotación

Item	Componentes		Factores				
	CP	CA	1	2	3	4	5
24	C	I	0,730				
18	A	E	0,725				
19	A	I	0,715				
16	A	I	0,713				
23	A	I	0,690				
11	C	E	0,657				
10	C	S	0,641	0,512			
22	Co	S	0,622				
5	A	I	0,577				
3	A	E	0,448				
13	C	E		0,634			
9	A	E		0,617			
6	C	S		0,601			
15	Co	S		0,593			
7	C	S		0,580			
17	A	S		0,579	0,410		
25	A	S		0,573			
20	Co	E		0,461			
21	C	E			0,733		
14	Co	E			0,721		
4	Co	I				0,672	
8	Co	E				0,640	
12	Co	I	0,518			0,539	
2	C	I					0,778
1	A	S					0,771

**Nota:** CP - Componentes Pedagógicos: A - Afectivo, C - Cognitivo y Co - Comportamental; CA - Componentes Antropológicos: S - Social, E - Educativo e I - Instrumental

**Fuente:** Elaborado por los autores

El primer factor consta de diez (40%) variables, con pesos entre 0,73 y 0,45, y los ítems: 24- Las estadísticas lo ayudan a tomar decisiones más informadas, 18-El mundo de la estadística me parece interesante, 19-Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos, 16-Me gusta la estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas, 23- Me gusta resolver problemas cuando uso la Estadística, 11-La estadística es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano, 10-Las estadísticas ayudan a entender el mundo de hoy, 22- Entiendo mejor los resultados electorales cuando aparecen representaciones gráficas, 5-Me apasiona la Estadística porque ayuda a ver los problemas con objetividad y 3-Disfruto de las clases donde se explican Estadística. Además, también el ítem 12- Uso la Estadística para resolver problemas del día a día, tiene un peso de  $0,518 > 0,4$  en el primer factor, pero  $0,518 < 0,539$  que es su peso en el cuarto

factor. En cuanto a los componentes pedagógicos, estos ítems están mayoritariamente asociados al componente afectivo (60% de los ítems de este componente y 60% de los ítems del factor), aunque también hay ítems del componente cognitivo y, en menor medida, el componente conductual. En relación a los componentes antropológicos, los ítems de este factor también están más asociados al componente instrumental (63% de los ítems de este componente y 50% de los ítems del factor). Sin embargo, también están presentes ítems del componente educativo y, en menor medida, del componente social. Dada la alusión predominante al aprecio personal y a la utilidad de la Estadística, este primer factor se denomina “Gusto personal y reconocimiento de la utilidad de la estadística”. Una actitud positiva en este factor presupone que el profesor asuma la Estadística como un área de conocimiento y una herramienta por la cual manifiesta su agrado personal que, paralelamente, se asocia al reconocimiento de la utilidad de la Estadística en el marco de las exigencias y necesidades presentes y futuras. Esta situación daría lugar a una enseñanza más motivadora y aplicada, con mayores posibilidades de éxito en la enseñanza de la materia por parte de estos profesores.

El segundo factor consta de ocho (32%) variables, con pesos entre 0,634 y 0,461, y los ítems: 13-La Estadística no debe enseñarse en la escuela, 9-Si pudiera eliminar alguna materia, sería la estadística, 6-La Estadística solo es buena para las personas de ciencias, 15-No entiendo la información estadística que aparece en la prensa escrita, 7-La Estadística no sirve para nada, 17-Me siento intimidado ante datos estadísticos, 25-Evito la información estadística cuando la leo, y 20-En las clases de estadística entendía poco de lo que se decía. Todos ellos están redactados negativamente y por ello las puntuaciones de estos ítems se invirtieron, (Martins et al., 2012). Además, también el ítem 10-La Estadística ayuda a entender el mundo actual, tiene un peso de  $0,512 > 0,4$  en este factor, pero  $0,512 < 0,641$  que es su peso en el primer factor.

En cuanto a los componentes pedagógicos, estos ítems están mayoritariamente asociados al componente afectivo (30% de los ítems de este componente y 38% de los ítems del factor) y al componente cognitivo (38% de los ítems de este componente y 38% de los ítems en el factor) y con porcentajes menores al componente conductual. Respecto los componentes antropológicos, los ítems de este factor también están, en su mayor parte, asociados al componente social (63% de los ítems de este componente y 63% de los ítems del factor) y el resto están vinculados al componente educativo. Siendo predominante la referencia dicotómica entre las cuestiones de la capacidad de comprensión de la Estadística (ciencia y herramienta para entender el mundo que nos rodea) y las cuestiones de su enseñanza (incluyendo el papel que puede tener su enseñanza en el contexto sociocultural de cualquier ciudadano), este segundo factor se denomina “Comprensión académica y valoración de la Estadística”.

Una actitud positiva en este factor presupone que el profesor considera comprender la Estadística, tanto en términos científicos como en su rol más amplio en la sociedad actual y la reconoce como una materia fundamental en la enseñanza de otras áreas. En cambio, una actitud negativa sería un indicio de la necesidad de formar a estos profesores, promover un cambio de su actitud. De esta forma, los profesores estarían mejor preparados para los requerimientos científicos, curriculares y motivacionales que exige la enseñanza de esta disciplina.

El tercer factor consta de dos (8%) variables, con pesos de 0,733 y 0,712, y los ítems: 21 -La estadística es fácil y 14-Los problemas de estadística son fáciles para mí. Además, también el ítem 17- Me siento intimidado ante datos estadísticos - tiene un peso de  $0,41 > 0,4$  en este factor, pero  $0,41 < 0,579$ , que es su peso en el segundo factor. En cuanto a los componentes pedagógicos, estos ítems se asocian al componente cognitivo (13% de los ítems de este componente y 50% de los ítems del factor) y al componente conductual (14% de los ítems de este componente y 50% de los elementos del factor). Respecto a los componentes antropológicos, los ítems de este factor solo están asociados al componente educativo (22% de los ítems de este componente y 100% de los ítems del factor). Como los constituyentes de este factor reflejan la percepción individual de la dificultad que implica la Estadística, tanto en una visión global como en la perspectiva de su uso, este tercer factor se denomina “Dificultad percibida en relación con la Estadística”. Una actitud positiva en el factor presupone que el profesor ve la Estadística y su aplicación como algo fácil. Este hecho puede permitir una mayor facilidad en su enseñanza, pero también puede llevar a asumir esta facilidad de forma generalizada y no tener en cuenta o comprender las dificultades que en realidad pueden experimentar algunos alumnos. De esta manera, podrán no ayudarlos a superar estas dificultades, ni promover su éxito en el aprendizaje. Sin embargo, una actitud negativa puede ser un indicio de la necesidad de capacitar a estos profesores, potenciando el cambio de actitud y su formación.

El cuarto factor consta de tres (12%) variables, con pesos de 0,672, 0,640 y 0,539, siendo los ítems: 4-Raramente uso la Estadística fuera de la escuela, 8-A menudo explico a mis colegas problemas de Estadística que no entienden y 12-Utilizo la Estadística para resolver problemas cotidianos. En cuanto a los componentes pedagógicos, estos ítems solo se asocian al componente conductual (43% de los ítems de este componente y 100% de los ítems del factor). Referente a los componentes antropológicos, los ítems de este factor están asociados al componente instrumental (25% de los ítems de este componente y 67% de los ítems del factor) y también al componente educativo (11% de los ítems de este componente y el 33% de los ítems del factor). Como estos elementos aluden a la tendencia a utilizar la Estadística de forma concreta y específica, tanto a nivel escolar como en la vida

cotidiana, este cuarto factor se denomina “Predisposición a utilizar la Estadística”. Una actitud positiva presupone que el profesor la utiliza con frecuencia y naturalidad en su día a día y valora positivamente el trabajo cooperativo con los compañeros en este campo. Por lo tanto, será posible una mayor capacidad motivacional en la enseñanza, haciendo un nexo natural entre el aprendizaje en el aula y su papel en la sociedad actual.

El quinto factor consta de dos (8%) variables, con pesos de 0,778 y 0,771, siendo los ítems: 2-A través de la estadística se puede manipular la realidad y 1-Me molesta la información estadística que transmiten algunos programas de televisión. En cuanto a los componentes pedagógicos, estos ítems están asociados al componente afectivo (10% de los ítems de este componente y 50% de los ítems del factor) y al componente cognitivo (13% de los ítems de este componente y 50% de los ítems de los elementos del factor). Para los antropológicos, los ítems de este factor sólo se asocian al componente social (13% de los ítems de este componente y 50% de los ítems del factor) y al componente instrumental (13% de los ítems de este componente y el 50% de los ítems del factor). Estos ítems reflejan cómo los profesores se enfrentan a interrogantes sobre la idoneidad del uso y la información estadística transmitida en algunos programas de TV, por lo que este quinto factor puede denominarse “Credibilidad de la Estadística”. Una actitud positiva en el factor presupone que el profesor tiene confianza en la Estadística, como ciencia y como instrumento, así como en la información que se basa en ella, enfatizando el rigor metodológico de su aplicación y el espíritu crítico de las lecturas y análisis estadísticos. Una actitud negativa puede ser un indicio de baja confianza en su aplicación de, lo que puede conducir a su infravaloración. Esta situación puede indicar la necesidad de potenciar en la formación el trabajo con casos reales en los que se contrastan los usos adecuados e inadecuados de la Estadística. Por ejemplo, las situaciones de los medios de comunicación tienen riqueza didáctica y pedagógica y pueden ser transpuestas a la práctica docente.

Estos resultados indican que la escala utilizada es multidimensional, como en los resultados obtenidos por Estrada et al. (2013). En el trabajo de estos autores (considerando solo 22 ítems de la escala EAEF, habiendo eliminado los ítems 2, 7 y 9, y abarcando a 288 profesores españoles y peruanos) se encontraron cuatro factores con más de un ítem (respectivamente, con ocho, cuatro, cuatro y cuatro ítems;) y dos factores compuestos por un solo ítem (ítems 4-Raramente uso la Estadística fuera de la escuela y el ítem 1-Me molesta la información estadística que se transmite en algunos programas de TV), además de un ítem (ítem 5-La Estadística me gusta porque ayuda a ver los problemas de manera objetiva) que no estaba enmarcado en ningún factor y se consideraba un ítem multifactorial. Estos cuatro factores, que explican el 45% de la varianza total, y sus denominaciones

son: *Competencia y valoración académica de la Estadística, Valoración del rol de la Estadística, Utilidad y gusto personal por la Estadística y Disposición y comprensión de la Estadística* (Estrada et al., 2013, pp.14-15).

El mismo AFE también se realizó para los datos de los 1098 profesores portugueses, pero con solo los 22 ítems mencionados y los resultados finales fueron muy similares a los obtenidos con la escala completa (Martins, 2015). En este caso, el quinto factor estaría constituido únicamente por el ítem 1, como en Estrada et al. (2013). Así, para futuros estudios, se prevé la eliminación del ítem 2 (que aparece asociado al ítem 1 con relevancia, como ya se mencionó). Este hecho no cambiaría mucho la escala de la EAEE (Martins, 2015; Martins et al, 2021).

A pesar de las diferencias entre los resultados de la AFE reportados, de manera global, se considera que están presentes las características esenciales de los componentes pedagógico y antropológico propuestos en la elaboración de la escala EAEE. Además, se reforzó la multidimensionalidad de la escala EAEE en la medición de las actitudes de los profesores hacia la Estadística.

## CONCLUSIONES

Este trabajo se basó en la medición y caracterización de las actitudes hacia la Estadística de los profesores del 1º y 2º ciclo de la educación básica portuguesa y tuvo como objetivo general de la investigación la verificación de los factores de una escala de estructura multidimensional de actitudes de profesores hacia la Estadística, la escala EAEE, a través de un análisis multivariado.

Se seleccionó la escala EAEE que aseguraba validez y confiabilidad, con adaptaciones específicas para el contexto portugués. En la aplicación realizada, la escala EAEE mantuvo los niveles de validez y confiabilidad, presentando resultados generales compatibles con los de otros estudios similares y los resultados revelaron una alta consistencia interna y una estructura multidimensional. Para la escala EAEE de 25 ítems utilizada en esta investigación, y para la muestra de 1098 profesores del 1º y 2º CEB de Portugal, se obtuvo un alto nivel de consistencia interna, con un coeficiente alfa de Cronbach de 0,869.

Se concluyó que la actitud hacia la Estadística por parte de los profesores de 1º ciclo y los profesores de matemáticas del 2º ciclo de educación básica en Portugal es globalmente positiva.

Los puntajes promedio para los componentes y para el puntaje global son relativamente altos, estando por encima del valor intermedio entre los valores mínimo y máximo posibles y con dispersiones bajas ( $CV < 15\%$ ; como regla general, Martins, 2015). Estos puntajes fueron superiores a los obtenidos por los profesores peruanos e inferiores a los obtenidos por los profesores españoles. Sin embargo, fueron más positivos que los revelados en varios estudios con estudiantes. Además de

comprobar la alta consistencia interna de la escala utilizada en esta investigación y la comparación con el trabajo de Estrada et al. (2013) se robustece la estructura multidimensional de la escala EAEE. A pesar de las diferencias en relación al modelo teórico, globalmente se encontraron las mismas características de los componentes de las actitudes.

En resumen, este uso de la escala permitió consolidar la escala EAEE como un instrumento a utilizar en otros estudios similares con profesores.

Como en todos los estudios, esta investigación también tuvo limitaciones que se tienen que tener en cuenta. La muestra de este estudio abarcó, en términos geográficos, sólo tres distritos portugueses, lo que fue una restricción en esta investigación. Sin embargo, la muestra mostró características sociológicas y educativas muy similares a las características de la población de profesores portugueses (Martins, 2015; Martins et al., 2021). A pesar del apoyo y buena voluntad de todas las entidades contactadas para la recolección de datos utilizando este instrumento, es muy difícil hacerlo de manera completamente aleatoria sin ningún tipo de apoyo financiero (como fue el caso en esta investigación).

La opción de estudiar con profesores del 1º CEB y profesores de Matemáticas del 2º CEB dejó fuera a los profesores de Matemáticas del 3º CEB, lo que no permitió, en ese momento, establecer una visión global de la educación básica portuguesa. Sin embargo, por el momento, este era el enfoque posible. En el ámbito de la investigación en educación estadística, se espera que esta investigación allane el camino y refuerce el estudio de las actitudes hacia la Estadística en Portugal, particularmente a nivel de los profesores.

Por otro lado, este estudio es heredero de una serie de investigaciones, especialmente iberoamericanas, por lo que sería interesante e importante realizar investigaciones transculturales de las actitudes hacia la Estadística por parte de los profesores que imparten clases en los primeros años de la enseñanza.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alberti, R., Santos, B. & Junior, F. (2020). Atitude do professor em relação à estatística: um estudo de caso utilizando a ferramenta EAPE. *Ciência e Natura*, 42, 1-25.
- Aparício, A., Estrada, A. & Bazán, J. (2010). Uma escala para análise comparativo das atitudes em relação à Estatística em professores de escola. In *Anais do 19º SINAPE – Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*. A. Brasileira de Estatística.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas media y universitarias – Características y medición*. Mensajero.

- Bourne, V. J. (2018). Exploring Statistics Anxiety: Contrasting Mathematical, Academic Performance and Trait Psychological Predictors. *Psychology Teaching Review*, 24(1), 35-43.
- Bourne, V. J. & Nesbit, R. J. (2018). Do attitudes towards statistics influence the decision to study psychology at degree level? A pilot investigation. *Psychology Teaching Review*, 24(2), 55-63.
- Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Silva, J. C., Almiro, J., & Correia, P. (2019). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*. Grupo de Trabalho de Matemática, Despacho n.º 12530/2018.
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5-28.
- Carvalho, M., Freitas, A. & Fernandes, J. (2017). Atitudes em relação à Estatística de alunos do 8º ano. *Rev. de Estudios e Inv. en Psicología y Educación, Extr.*(01), A1-071-076.
- Casas-Rosal, J. C., Villarraga Rico, M. E., Maz Machado, A., Castro Carvajal, D. & León-Mantero, C. (2019). Profesores en formación de la Universidad del Tolima: un análisis de sus actitudes hacia la estadística. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 2(3), 9-19.
- Damásio, B. (2012). Uso da análise fatorial exploratória em psicologia. *Avaliação Psicológica*, 11 (2), 213–228.
- DGEEC (2012). *Perfil do docente 2010/2011*. Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência.
- Eichler, A. & Zapata-Cardona, L. (2016). *Empirical Research in Statistics Education, ICME-13 Topical Surveys*. Springer Open.
- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tese de doutoramento, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Estrada, A. (2009a). *Las actitudes hacia la estadística en la formación de los profesores*. Milenio.
- Estrada, A. (2009b). Las actitudes hacia la estadística de los profesores en formación, incidencia de las variables género, especialidad y formación previa. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 117-131). Facultad de Educación y Humanidades (Melilla) de la Universidad de Granada.
- Estrada, A., Batanero, C., Bazán, J. & Aparício, A. (2009). As atitudes em relação à Estatística em professores: um estudo comparativo de países. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Eds.), *XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* [CD-ROM]. Sociedade de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática.
- Estrada, A., Batanero, C. & Lancaster, S. (2011). Chapter 18 - Teachers' Attitudes Towards Statistics. In C. Batanero, G. Burril & C. Readings (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/LASE Study* (pp. 163-174). Springer Science+Business Media.
- Estrada, A., Bazán, J. & Aparício, A. (2010a). A cross-cultural psychometric evaluation of the attitude toward statistics scale Estrada's in teachers. In C. Reading (Ed.), *ICOTS8 - Proceedings* [CD-ROM].
- Estrada, A., Bazán, J. & Aparício, A. (2010b). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *Unión, Rev. Iberoamericana de Educación Matemática*, 24, 45-56.

- Estrada, A., Bazán, J. & Aparício, A. (2013). Evaluación de las propiedades psicométricas de una escala de actitudes hacia la estadística en profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 3, 5-23.
- Everitt, B., Landau, S., Leese, M. & Stahl, D. (2011). *Cluster Analysis*. (5<sup>th</sup> Ed.), West Sussex: John Wiley & Sons, Ltd.
- Gal, I. & Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Toward an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, 2(2).
- Gal, I., Ginsburg, L. & Schau, C. (1997). Monitoring Attitudes and Beliefs in Statistics Education. In I. Gal & J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS, Press.
- Gnanadesikan, R. (1997). *Methods for Statistical Data Analysis of Multivariate Observations*. (2<sup>nd</sup> Ed.) New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Gomes, C. S., Brocardo, J. L., Pedroso, J. V., Carrillo, J. L. A., Ucha, L. M., Encarnação, M., & Rodrigues, S. V. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO)*. Ministério da Educação.
- Gómez-Chacón, I. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En A. Berciano et al. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 93-114). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Hair, J., Black, B. Babin, B., & Anderson, R. (2009). *Multivariate Data Analysis*. (7<sup>th</sup> Ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Hassad, R. (2007). *Development and Validation of a Scale for Measuring Instructors' Attitudes toward Concept-Based or Reform-Oriented Teaching of Introductory Statistics in the Health and Behavioral Sciences*. Health Sciences Ph.D, U. International, California, EUA.
- Hill, M., & Hill, A. (2000). *Investigação por questionário*. Edições Sílabo.
- Junior, A. & Vieira, M. (2018). Validação e Avaliação das Atitudes de Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em Relação ao Ensino da Estatística. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 11(1), 149-171.
- Kim, H., Wang, X., Lee, B. & Castillo, A. (2017). College instructors' attitudes towards statistics. In A. Chronaki (Ed.), *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Mathematics Education and Society Conference* (Vol.2, pp.611-621). University of Thessaly.
- Kislenko, K. (2009). Mathematics is a bit difficult but you need it a lot: Estonian pupils' beliefs about Mathematics. En J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathwilliamatis Education* (pp. 143-163). Sense Publishers.
- Kline, R. B. (2013). Exploratory and confirmatory factor analysis. Em Y. Petscher & C. Schatsschneider (Eds.), *Applied quantitative analysis in the social sciences* (Chap. 6, print proof, pp. 171-207). Routledge. <http://psychology.concordia.ca/fac/kline/library/k13b.pdf>
- León-Montero, C., Casas, J., Madrid, M., Jiménez-Fanjul, N. & Maz-Machado, A. (2018). Actitudes hacia la estadística en futuros maestros de educación infantil. *Yupana – Rev. de Educación Matemática de la U. Nacional del Litoral*, 10, 8-14.
- Loewenthal, K. (2001). *An Introduction to Psychological Tests and Scales*. (2<sup>a</sup> Ed.). Psychology Press-Taylor and Francis Group.

- Mayén, S. & Salinas, J. (2016). Un Estudio Comparativo de las Actitudes Hacia la Estadística en Estudiantes Mexicanos de Bachillerato. *Ed. Matemática Pesquisa*, 18(3), 1203-1221.
- Martins, J. A., Nascimento, M. M., & Estrada, A. (2011). Attitudes of teachers toward statistics: a preliminary study with portuguese teachers. En M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), *Proceedings o Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)*. Rzeszow, Poland: University of Rzeszow and ESRM. [On line: <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/cerme7/CERME7.pdf>]
- Martins, J. A., Nascimento, M. M., & Estrada, A. (2012). Looking back over their Shoulders: A Qualitative Analysis of Portuguese Teachers' Attitudes Towards Statistics. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 26-44.
- Martins, J. A. S. V. (2015). Estudo das atitudes em relação à Estatística dos professores do 1º ciclo e dos professores de Matemática do 2º ciclo do ensino básico. Tese de Doutoramento. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.
- Martins, J. A., Estrada, A., & Nascimento, M. (2021) Starting over: Factors in the Attitudes Towards Statistics in Portuguese Teachers, *INTED2021 Proceedings*, 6430-6440.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Oliveira Júnior, A. P. (2016). A Escala de Atitudes em Relação ao Ensino da Estatística de Professores do Ensino Superior no Brasil. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1449-1463-591.
- Oliveira Júnior, A. P. & Vieira, M. L. (2018). Validação e Avaliação das Atitudes de Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em Relação ao Ensino da Estatística. *Alexandria – Rev. de Educação em Ciências e Tecnologia*, 11(1), 149-171.
- Pestana, M. & Gageiro, J. (2000). *Análise de dados para ciências sociais*. (2.ª Ed.). Ed. Sílabo.
- Philipp, R. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 257-314). Information Age Pub.
- Ramirez, C., Schau, C. & Emmioglou, E. (2012). The importance of attitudes in statistics education. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 57-71.
- Reis, E. (1997). *Estatística Multivariada Aplicada*. Edições Sílabo.
- Rodriguez-Santero, J. & Gil-Flores, J. (2019). Actitudes hacia la Estadística en estudiantes de Ciencias de la Educación. Propiedades psicométricas de la versión española del Survey os Attitudes Towards Statistics (SATS – 36). *RELIEVE*, 25(1), 1-17.
- SPIEM- Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (2021). Parecer sobre a proposta de “Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico”.
- Schau, C. (2003). *Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36)*. <http://evaluationandstatistics.com/>
- Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. & del Vecchio, A. (1995). The development and validation of a survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.
- Silva, C., Cazorla, I. & Brito, M. (1999). Concepções e atitudes em relação à estatística. En *Actas da Conferência Internacional “Experiências e Expectativas do Ensino da Estatística: Desafios para o Século*

XXI" (pp 18-29). U. Federal de Santa Catarina, Programme of Research and Training in Applied Statistics (PRESTA) e IASE.

Williams B, Onsmann A, Brown T. (2010). Exploratory factor analysis: A five-step guide for novices. *Australasian Journal of Paramedicine*, 8(3), 1-13.

## **FACTOR ANALYSIS OF A SCALE OF ATTITUDES TOWARDS STATISTICS FOR TEACHERS**

### **ABSTRACT**

To better understand the predisposition and commitment of teachers in relation to the teaching and learning process of Statistics, it is necessary to know their attitudes and for this an adequate evaluation instrument is needed. This study presents the factorial analysis of the Scale of Attitudes towards Statistics (EAEE) proposed by Estrada (2002), with a sample of 1098 teachers from the 1st and 2nd cycle of Portuguese basic education. This scale is validated and has good psychometric characteristics. The results obtained indicate a strong internal consistency and confirm its multidimensional structure. Regarding the components of attitudes, despite the differences in relation to the theoretical model, the same characteristics are detected. Finally, it is concluded that the attitude towards statistics on the part of the teachers analyzed was positive, as in previous studies, and the use of the scale in future research is recommended.

Keywords: Scale of attitudes towards Statistics; psychometric characteristics, factor analysis; basic education teachers.

## **ANÁLISE FATORIAL DE UMA ESCALA DE ATITUDES FACE À ESTATÍSTICA PARA PROFESSORES**

### **RESUMO**

No sentido de entender melhor a predisposição e o compromisso dos professores em relação ao processo de ensino e de aprendizagem da estatística, também é necessário conhecer as suas atitudes e para isso é necessário um instrumento de avaliação adequado. Este estudo apresenta a análise fatorial da Escala de Atitudes perante a Estatística (EAEE) proposta por Estrada (2002), com uma amostra de 1098 professores do 1º e 2º ciclo do ensino básico português. Esta escala é validada e possui boas características psicométricas. Os resultados obtidos indicam uma forte consistência interna e confirmam sua estrutura multidimensional. Em relação aos componentes das atitudes, apesar das diferenças em relação ao modelo teórico, as mesmas características são detectadas. Por fim, conclui-se que a atitude em relação à estatística por parte dos professores analisados foi positiva, assim como em estudos anteriores, sendo recomendada a utilização da escala em pesquisas futuras.

Palavras-chave: Escala de atitudes em relação à Estatística; características psicométricas, análise fatorial; professores da educação básica.

*J. ALEXANDRE MARTINS*  
*Instituto Politécnico de Guarda, Guarda, Portugal*  
[jasvm@ipg.pt](mailto:jasvm@ipg.pt)  
<https://orcid.org/0000-0003-3921-6426>

Licenciado en Matemáticas (Universidad Coimbra). Master en Matemática-Física (U. Coimbra). Doctor en Didáctica de las Ciencias y la Tecnología (Didáctica de las Ciencias Matemáticas, UTAD). Es profesor de Matemática y Estadística del Instituto Politécnico de Guarda (ESTH) Líneas de Investigación sobre Educación estadística: Actitudes hacia la estadística y la probabilidad, Estadística y uso de tecnología.

*ASSUMPTA ESTRADA*  
*Universidad de Lleida, Lleida, España*  
[astrada@matematica.udl.es](mailto:astrada@matematica.udl.es)  
<https://orcid.org/0000-0002-3595-9145>

Licenciada en Matemáticas por la U. de Zaragoza y Doctora en Didáctica de la Matemática por la U. Autónoma de Barcelona. Profesora Titular del área de Didáctica de las Matemáticas del departamento de Matemática de la Universidad de Lleida. Líneas de Investigación sobre Educación estadística: Actitudes hacia la estadística y la probabilidad, Estadística y uso de tecnología, formación de maestros.

*MARIA M. NASCIMENTO*  
*Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal*  
[mmsn@utad.pt](mailto:mmsn@utad.pt)  
<https://orcid.org/0000-0002-3913-4845>

Doctora en Matemáticas por la Universidad de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD). Profesora del departamento de Matemáticas de la Escuela de Ciencias y Tecnología de la UTAD, Vila Real, Portugal. Es miembro integrado del LabDCT-UTAD/CIDTFF-Universidad de Aveiro. Líneas de Investigación sobre Educación estadística y probabilidad, uso de tecnología, formación de maestros, pensamiento crítico.

# ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN CHILE CON LESSON STUDY: INNOVACIONES Y BUENAS PRÁCTICAS

SOLEDAD ESTRELLA  
PEDRO VIDAL-SZABÓ  
SERGIO MORALES

### RESUMEN

Este capítulo presenta un modelo de Lesson Study, ha sido desarrollado en Chile por el Grupo de Estudio de Clase del Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Este modelo ha impulsado la integración de la teoría y la práctica, a través de ciclos de anticipación-acción-reflexión, que promueven la argumentación colectiva en el aula mediante el enfoque de resolución de problemas. El propósito de investigación fue analizar ciclos de anticipación, acción y reflexión que manifiestan los profesores en grupos de Lesson Study, mediante dos lecciones innovadoras en estadística temprana, en particular, el caso de una lección pública sobre análisis exploratorio de datos (grado 3) y el caso de una lección de inferencia estadística informal (grados K-4). Desde el análisis cualitativo realizado, constatamos (1) discusiones estadísticas productivas y posicionamiento de conceptos y procedimientos propios de la estadística; y (2) la adquisición de una mayor comprensión de los profesores sobre el contenido estadístico, de su didáctica y del desarrollo conceptual estadístico de los estudiantes, que subyacen en el diseño de las tareas y en el flujo de la lección que investigan y que provocan buenas prácticas desde equipos docentes de Estudio de Clase.

Palabras clave: Estadística temprana; Razonamiento estadístico; Lesson study; Análisis exploratorio de datos; Inferencia estadística informal.

### INTRODUCCIÓN

La sociedad actual requiere formar una ciudadanía que sea competente en evaluar críticamente afirmaciones basadas en datos y en argumentar con fundamentos en la evidencia que entregan los datos (Estrella, 2017). Las transformaciones en la sociedad han llevado a que la estadística descriptiva, la probabilidad y la inferencia estadística sean parte de los currículos escolares del mundo. En consecuencia, la educación estadística ha cobrado importancia, pues como disciplina aboga por el aprendizaje y la enseñanza de la disciplina estadística, indaga en las herramientas, ideas y disposiciones que permiten reaccionar inteligentemente con argumentos a la ingente información y desinformación que nos rodea.

Estrella, S., Vidal-Szabó, P. y Morales, S. (2022). Enseñanza de la estadística en Chile con *Lesson Study*: innovaciones y buenas prácticas. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 137-163). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

En las investigaciones sobre educación, algunos hallazgos indican que una vez que los niños entran a la escuela, ningún factor es tan importante como la calidad de sus profesores. Este papel central que desempeñan los docentes en la calidad de la educación, tanto en educación primaria como secundaria, es el determinante más importante a nivel escolar de los resultados de aprendizaje de los estudiantes. Como señalan Bruns et al. (2019), el impacto de muchos gastos en educación depende en gran medida de cómo los docentes imparten el currículo y utilizan los recursos en el aula.

En Latinoamérica, los sucesivos gobiernos de Chile de los períodos 1990-2009 y 2014-2017, han implementado una serie de políticas docentes con un notable grado de consistencia central, posicionando al país como un caso excepcional, puesto que una primera reforma de la política docente (a principios del año 2000), introdujo evaluaciones periódicas del desempeño docente que incluían la observación del aula como resultado de un proceso de reforma consultivo entre el Colegio de Profesores y el gobierno (Burns et al., 2019).

Desde fines de la década del 2000, en este escenario de observación del aula escolar, el programa de desarrollo profesional docente de Estudio de Clase PUCV, apoya el mejoramiento de calidad de la enseñanza de profesores y sus escuelas, llevando cambios al interior del aula, al propiciar la resolución colaborativa de problemas y discusiones productivas con toda la clase (Olfos et al., 2020). Ello es consistente con los lineamientos otorgados por el Marco para la Buena Enseñanza (Cf., MINEDUC, 2021a), pues da énfasis, tanto a las estrategias de enseñanza bien organizadas y productivas, ancladas en la evaluación formativa, que apoyan la motivación, la competencia y el aprendizaje autorregulado de los estudiantes, como la colaboración entre distintos actores y redes de apoyo, internos y externos del centro educativo, que permitan responder a las necesidades reales de los estudiantes.

Por otra parte, varias investigaciones han destacado la necesidad de fomentar tempranamente el desarrollo del pensamiento estadístico en los estudiantes a través de un enfoque indagativo y de resolución de problemas (Common Core State Standards Initiative, 2010; Franklin et al., 2007; English, 2012; del Pino y Estrella, 2012; Estrella, 2018; Franklin y Mewborn, 2006; National Council of Teacher of Mathematics, 2000, 2009; Vidal-Szabó et al., 2020). Son recientes las investigaciones que abordan el temprano desarrollo del pensamiento estadístico en niñas y niños, vinculado a la enseñanza de profesores, por ejemplo, Estrella y colaboradores (2020) estudiaron factores que afectan el mantenimiento y disminución de la demanda cognitiva en la implementación de una clase de estadística diseñada por un grupo de profesores que enseñan a estudiantes de grado 3; y en Estrella et al. (2022), analizaron el conocimiento pedagógico del contenido estadístico de una educadora de

párvulos en lecciones de Kinder que promueven el razonamiento inferencial informal, en adelante, IIR. También, destaca un libro del área de la educación estadística temprana que aborda la teoría y la conceptualización de la estadística y la probabilidad en los primeros años y el desarrollo de la comprensión de los datos y el azar de los niños de 3 a 10 años (Leavy et al., 2018). Sin embargo, son escasas y recientes las investigaciones que tratan las dificultades de los profesores en relación con tareas estadísticas en los primeros años de escolaridad integrando teoría y práctica.

Esta investigación busca analizar ciclos de anticipación, acción y reflexión que manifiestan los profesores en grupos de Lesson Study, mediante dos lecciones innovadoras en estadística temprana, en particular, el caso de una lección pública sobre análisis exploratorio de datos (grado 3) y el caso de una lección de inferencia estadística informal (grados K-4).

### ANTECEDENTES

A continuación, realizamos una descripción general de los antecedentes acerca del desarrollo de Lesson Study en Chile promovido por el Grupo de Estudio de Clases Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y su modelo propuesto; precisando cómo es entendida la Estadística Temprana y sus alcances educativos.

#### **Lesson Study en Chile**

El Estudio de Clase (EC), también conocido como Lesson Study, se ha posicionado en Chile como uno de los mecanismos de desarrollo profesional docente recomendados por el Ministerio de Educación (MINEDUC) tanto en la formación docente inicial como continua. El Grupo de Estudio de Clase de la PUCV (GEC-PUCV) aportó en este posicionamiento, promoviendo diferentes modalidades de EC en la formación inicial y continua de profesores desde PK al grado 12, tanto en estadística como en matemática (Estrella, Morales et al., 2022; Isoda et al., 2021; Olfos et al., 2020).

Entre los aportes propios del GEC-PUCV en su trayectoria de más de 12 años, fundado y liderado por Raimundo Olfos, se destaca la optimización del proceso de EC en una modalidad de ocho sesiones (dos meses de trabajo conjunto con profesores en servicio) con tareas profesionales explícitas que contemplan un proceso de dos ciclos de EC que finalizan con un plan de la lección mejorada en dos ocasiones tras dos implementaciones (Estrella et al., en prensa). El GEC-PUCV ha consolidado dicho modelo de Lesson Study empírico con ciclos de anticipación, acción y reflexión que involucran a docentes en un proceso de investigación estructurado y colaborativo, situado en el contexto de la escuela y enfocado en el pensamiento del estudiante y su desarrollo. En particular, este modelo de Lesson Study promueve, desde un enfoque abierto, la construcción colectiva y personal de conocimiento estadístico para la enseñanza y aprendizaje en el aula escolar. Otro aporte distintivo es

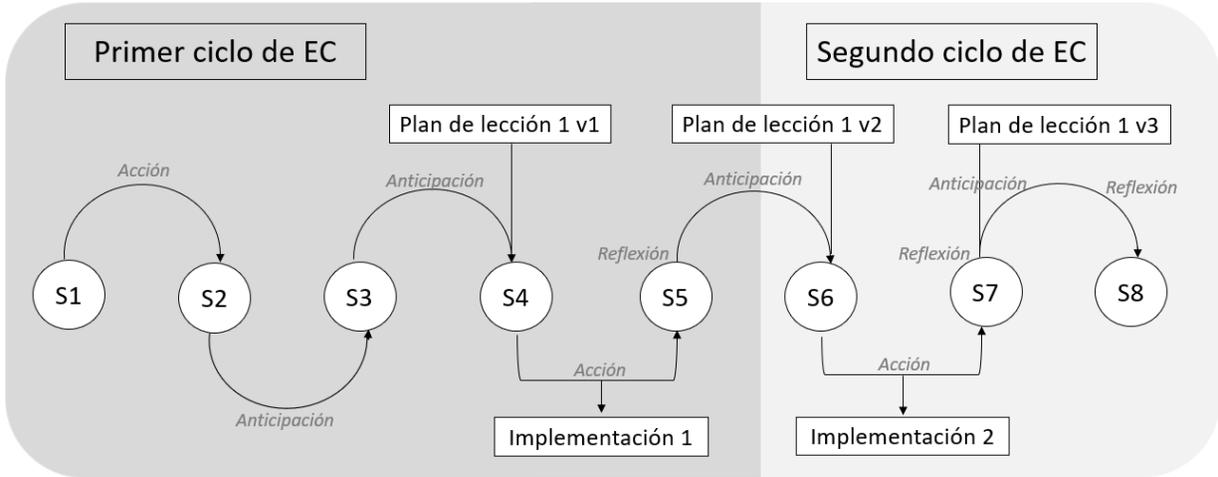
la difusión permanente de los resultados de estas experiencias de desarrollo profesional docente, mediante la organización de jornadas de clases públicas (open lessons), publicaciones de artículos y capítulos de libros (Estrella et al., en prensa). Así, el modelo GEC-PUCV conecta la investigación con la práctica, y está caracterizado por su duración, por ciclos que enfatizan la anticipación, acción y reflexión docente, y por la difusión que amplía la comunidad de aprendizaje docente en que surge. Para más información, consultar en <https://estudiodeclases.cl/>.

### **Modelo de Lesson Study por GEC-PUCV**

Este modelo sitúa el enfoque de resolución de problemas como el estilo de la lección a desarrollar e implementar en el EC. Este enfoque de enseñanza involucra a los estudiantes en la resolución de problemas (matemáticos o estadísticos) con sentido para ellos, atendiendo de manera simultánea a propósitos tanto cognitivos como afectivos (Isoda y Olfos, 2009; Morales, 2021). Una lección, bajo este enfoque, se compone de cinco momentos (Isoda et al., 2007; Stigler y Hiebert, 1999): activar conocimientos previos, presentar el problema, resolver el problema por parte de los estudiantes, compartir métodos de resolución en el pleno, y resumir aprendizaje de la lección. Estos momentos permiten que los estudiantes reflexionen, compartan sus ideas, discutan y disfruten del proceso de construcción de nuevos conocimientos sobre la base de los ya adquiridos.

Asimismo, el modelo propuesto es útil como herramienta analítica de la enseñanza llevada a cabo por profesores que experimentan un EC (Estrella et al., en prensa). Durante este proceso, los docentes se involucran en actividades profesionales colaborativas que dan forma a construcciones teóricas acerca de la enseñanza, con el fin de anticipar rutas de aprendizaje que pueden experimentar los estudiantes durante la lección; la acción de implementación de las construcciones teóricas, provistas en un plan de la lección, favorece la validación de hipótesis y la reformulación de las mismas, mediante la observación y las reflexiones acerca de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje, involucrando así a los docentes en ciclos de actividades profesionales específicas durante el EC (Figura 1).

**Figura 1.** Modelo de Lesson Study de ocho sesiones, orientada por ciclos de anticipación, acción y reflexión



**Fuente:** Elaboración propia desde Estrella et al. (en prensa).

La Figura 1 muestra el Modelo de Lesson Study propuesto por GEC-PUCV que involucra ciclos de acción, anticipación y reflexión al interior de un proceso compuesto de ocho sesiones, bajo el cual durante cuatro sesiones (S1-S4) se diseña un Plan de la lección situado en el Enfoque de Resolución de Problemas; luego, entre las sesiones S4 y S5 se implementa la primera versión del plan de la lección; en las sesiones S5 y S6 se sigue un proceso de mejora del Plan de la lección para obtener una segunda versión que es implementada entre las sesiones S6 y S7. En la sesión S7 se realiza una reformulación del plan anterior para alcanzar un Plan de la lección final producto del proceso previsto en el Modelo de Lesson Study. La sesión S8 finaliza con reflexiones acerca del proceso de Lesson Study experimentado.

Los ciclos presentados en la Figura 1 e integrados al modelo propuesto remiten al: (i) ciclo de acción que intenciona la creación de sentido del EC en el marco de un conocimiento nuevo en relación con el diseño del Plan de la lección (S1-S2) y sus implementaciones (dadas entre S4-S5 y S6-S7); (ii) ciclo de anticipación que busca adelantarse frente a posibles dificultades de los estudiantes durante las implementaciones del Plan de la lección (propuestas en S2-S3-S4) y proponer intervenciones docentes adecuadas que contribuyan a la superación de dichas dificultades en los estudiantes por medio de propuestas de devoluciones específicas (refinadas en S5-S6 y S7-S8); y (iii) ciclo de reflexión que da énfasis a un posicionamiento crítico de los profesores para mejorar la enseñanza y promover de mejores oportunidades de aprendizaje a partir del análisis de las implementaciones realizadas y del contraste de estas con las hipótesis de enseñanza formuladas en el Plan de la lección (S5, S7 y S8).

Considerando que el aprendizaje tiene lugar dentro de una comunidad de EC y en interacción con otros, identificamos el ciclo de anticipación, acción y reflexión que se complementa y fortalece durante el proceso de EC. En particular, las actividades de anticipación consideran la respuesta docente al currículo escolar y a sus problemáticas locales, se trata de proveer ciertas rutas de aprendizaje de los estudiantes que orientan el plan de la lección que se investiga, adelantándose a las posibles dificultades de los estudiantes para proponer devoluciones.

### **Estadística temprana**

A partir del GIET —Grupo de Investigación en Estadística Temprana de la PUCV, <https://estadisticatemprana.cl/>— hemos propuesto que la Estadística Temprana sea un programa de investigación emergente y específico en el marco de la Educación Estadística que releva el desarrollo del pensamiento estadístico en las personas, a través de nuevos enfoques de enseñanza y evaluación para el aprendizaje de la Estadística y la formación docente en el contexto formativo de niñas, niños y jóvenes desde pre-kínder hasta el grado 12.

En programa de investigación de la Estadística Temprana pone de relieve la innovación del trabajo estadístico con datos en el aprendizaje de niñas y niños (English, 2010; Estrella, 2018; Leavy y Hourigan, 2018; Vidal-Szabó et al., 2020), también ha estado visibilizando la necesidad de proponer y caracterizar algunos diseños de enseñanzas (e.g., Estrella y Vidal-Szabó, 2017; Makar y Fielding-Wells, 2011) y reconocer un conocimiento especializado de los profesores que enseñan estadística (e.g., Estrella et al., 2020; Vidal-Szabó y Estrella, 2020, 2021). Así, las áreas de interés de la Estadística Temprana, en parte, incluyen el uso de representaciones —como listas, tablas, diagramas y gráficos de datos—, el desarrollo progresivo del pensamiento relacionado con el trabajo estadístico, el diseño de trayectorias de aprendizaje estadístico para desarrollar razonamientos complejos, y junto con el anterior y en consecuencia ir posicionando la disciplina Estadística en la asignatura escolar de Matemática para permitir enseñanzas basadas en experiencias auténticas, en que los estudiantes desde los primeros años escolares, puedan explorar y analizar una variedad de datos en contextos diversos, enfrentando la incertidumbre, además de razonar, argumentar y comunicar sus hallazgos e ideas creativas (Estrella et al., 2022).

Desde esta perspectiva, los alcances educativos relacionados con el pensamiento estadístico a nivel escolar se traducen en desarrollar el conocimiento y el saber hacer, necesarios para comprender, analizar y actuar críticamente y con escepticismo en escenarios de incertidumbre, obteniendo mayor comprensión del comportamiento de los datos, con el propósito de aproximarse a respuestas de

preguntas estadísticas de interés, a su vez, comunicando niveles de confianza, y tomando decisiones basadas en la evidencia de los datos (Estrella y Olfos, 2012; Estrella et al., 2022). Incluso, hace una década, del Pino y Estrella (2012, p. 56) señalan que “dada la complejidad de muchos conceptos [en Estadística Descriptiva e Inferencia y en Probabilidad] es imprescindible entonces iniciar la formación tempranamente, incluso desde el nivel de educación preescolar”. Puesto que este tipo de pensamiento se desarrolla de forma progresiva y se sustenta en ideas fundamentales relacionadas con el trabajo estadístico, tales como datos, distribución, variabilidad, representaciones, incertidumbre e inferencia, entre otras (Burrill y Biehler, 2011; Garfield y Ben-Zvi, 2008). Las áreas de investigación de la Estadística Temprana, incluyen el uso de representaciones (listas, tablas, diagramas y gráficos de datos); el desarrollo progresivo del pensamiento estadístico, inferencial y probabilístico; el diseño de trayectorias de aprendizaje para desarrollar razonamiento complejo; el posicionamiento de la disciplina Estadística en la asignatura escolar de Matemática que permita una enseñanza con experiencias auténticas, en que los estudiantes desde los primeros años escolares, puedan explorar y analizar una variedad de datos y contextos, enfrentando la incertidumbre, razonando, argumentando y comunicando sus hallazgos e ideas creativas (Estrella et al., 2022).

### **MARCO CONCEPTUAL**

A continuación, se describen aspectos propios del análisis exploratorio de datos, de la inferencia estadística informal y de la argumentación colectiva que sustentan las tareas centrales de los Planes de Clase desarrollados por equipos docentes en un proceso de Estudio de Clases.

#### **Análisis exploratorio de datos y la Inferencia estadística informal**

Como parte fundamental de la formación escolar, el análisis exploratorio de datos (EDA) propuesto por Tukey (1977), se caracteriza por tener un carácter flexible, en que los datos tienen un rol protagónico, en términos de poder razonar, comprender e hipotetizar a partir de ellos, lo que también contribuye al desarrollo del razonamiento estadístico (e.g., English, 2012; Estrella et al., 2018). El EDA contempla gran variedad de técnicas para analizar el comportamiento de los datos de forma más eficaz.

Los currículos escolares de muchos países se han centrado en la estadística descriptiva y han prestado poca atención a la inferencia estadística informal (Ben-Zvi et al., 2012; Ben-Zvi et al., 2015). Esto también es válido para el currículo escolar chileno que propone la estadística descriptiva en los primeros años, para plantear en secundaria un enfoque más formal de la estadística inferencial (Estrella, 2016).

Zieffler y colaboradores (2008, p. 42) plantearon "¿cómo utilizar mejor el conocimiento informal de los estudiantes en la enseñanza formal [acerca de la inferencia estadística]?". Estos autores sugirieron que estudiar la inferencia estadística informal a una edad temprana puede facilitar la transición posterior a los procedimientos formales. Varios grupos de investigadores han intentado responder a esta pregunta, involucrando a los estudiantes en actividades centradas en algunos aspectos de la inferencia estadística (Ben-Zvi et al., 2015). Algunas de las primeras investigaciones sobre la inferencia informal han sido desarrolladas por Ben-Zvi (2006), Makar y Rubin (2009), Pfannkuch (2006), Rossman (2008) y Zieffler et al. (2008). Específicamente, se ha señalado que la inferencia estadística informal y el razonamiento que lo acompaña (IIR) se compone de: afirmaciones más allá de los datos (e.g., Zieffler et al., 2008), expresadas con niveles de incertidumbre (e.g., Ben-Zvi et al., 2012), el uso de datos como evidencia (e.g., Makar y Rubin, 2009; Pfannkuch et al., 2015), la consideración del agregado (e.g., Konold et al., 2015), y la integración del conocimiento del contexto (e.g., Langrall et al., 2011). Incluso, algunos investigadores sostienen que el IIR tiene el potencial de dar más coherencia en el currículo de estadística como una línea constante que se vuelve más compleja a medida que los estudiantes progresan (Bakker y Derry, 2011).

Pfannkuch y Ben-Zvi (2011) indican que la explicación y exploración de las características del pensamiento estadístico y de las ideas claves que sustentan la estadística han contribuido a proponer una enseñanza con el uso del EDA que atiende a la construcción de la comprensión conceptual a partir de diversas representaciones de datos y resúmenes numéricos, y han dado sustento al currículo cuyo objetivo debiese propugnar progresivamente al razonamiento de los estudiantes desde la alfabetización estadística. Algunos autores han apuntado que el EDA desconecta el análisis de los datos del concepto fundacional de incertidumbre y su espíritu inicial, desvinculando el azar de los datos (Biehler et al., 2013; Pratt et al., 2008).

Ben-Zvi (2016) y Makar et al. (2011) sostenían que es necesario pasar desde la muestra de datos a la población y llegar a que las conclusiones se conviertan en hipótesis sobre la población, refiriéndose la iniciación a la inferencia a través de una propuesta pedagógica distinta del EDA, como la inferencia estadística informal. Callingham y Watson (2017) proponen que el encuentro de la estadística y la probabilidad en el mundo cotidiano requiere de las ideas de muestreo, representación de datos, media, variabilidad, azar e iniciación a la inferencia. Así, Inferencia Estadística Informal (ISI) ha surgido como una forma de construir sobre el EDA los vínculos entre datos y azar.

### **Argumentación colectiva (AC)**

Es un modelo de colaboración que involucra al profesor y sus estudiantes, mientras expresan sus razonamientos, y tiene el potencial de crear espacios de comunicación y participación en el aula, en que los estudiantes tienen oportunidades para representar, comparar, explicar, justificar, confrontar y validar las propias ideas (en el sentido de Krummheuer, 1995, 2015).

En el aprendizaje de la estadística escolar, los argumentos y habilidades argumentativas son de gran relevancia, tanto por la buena convivencia de los ciudadanos en la sociedad, como por el avance científico y por el desarrollo de una educación integral. Entre las habilidades que promueve el currículo chileno de matemática, se señala “la habilidad de argumentar se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. La argumentación y la discusión colectiva sobre la solución de problemas, escuchar y corregirse mutuamente” (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018, p. 217).

Varios investigadores han estudiado la argumentación colectiva en el aula de matemáticas, entendida como cualquier instancia en que el profesor y estudiantes establecen una afirmación que se puede asociar a la argumentación (Krummheuer, 1995), pudiéndose considerar que el trabajo conjunto en una AC busca determinar la validez de una afirmación. Así, participar en discusiones de una manera estadística puede enmarcarse como una argumentación colectiva de carácter interaccional, ya que la argumentación involucra a varias personas que llegan a una inferencia y proveen evidencia que la apoya.

La investigación en AC en matemática implica examinar el aprendizaje de los estudiantes y cómo las ideas llegan a ser compartidas por el colectivo (Krummheuer, 2015). Para el análisis sistemático de argumentos, varios estudios chilenos en educación matemática y en educación estadística usan el modelo simple de argumentación de Toulmin (e.g., Estrella et al., 2017; Goizueta y Planas, 2013; Solar et al., 2021; Solar y Deulofeu, 2016). El modelo de Toulmin (1958/2003) se puede asociar al razonamiento estadístico, pues considera una combinación de las Conclusiones (“claim”, declaraciones cuya validez está siendo establecida), datos (“data”, evidencia proporcionada para las conclusiones), garantía (“warrant”, declaraciones que conectan datos con las conclusiones), respaldos (“backing”, que explican las razones que respaldan la garantía), refutaciones (“rebuttals”, que establecen las restricciones que se aplican a las conclusiones) y calificadores modales (“modal qualifier”, especifica el grado de certeza, la fuerza de la afirmación).

Entendemos que la argumentación es el intento de convencer a alguien de la validez de una afirmación, y en este sentido, Ben-Zvi (2006) precisaba que inferir es comparable a argumentar, ya que es necesario construir argumentos persuasivos (formales o informales).

La pregunta de investigación que se utilizó para estructurar el estudio y orientar el análisis de los datos recopilados fue, ¿Qué aspectos propios del modelo de Lesson Study manifiestan los profesores del equipo de docentes en los Estudio de Clase?

## METODOLOGÍA

La presente investigación adopta un enfoque cualitativo de tipo interpretativo y se enmarca en un estudio de dos casos de tipo instrumental (Merriam, 1988; Stake, 1998). Cada caso se escoge para ilustrar el modelo de Lesson Study que GEC-PUCV ha explorado, caracterizado, fundamentado y situado en el desarrollo profesional docente, cuyo enfoque es integrar aspectos teóricos y prácticos de la enseñanza de la matemática y la estadística a nivel escolar.

Dentro de las ventajas de un estudio de caso, se encuentra el potencial de implicar a los investigadores para afianzar una autorreflexión que permite comprender más profundamente los casos en estudio, reconociendo la necesidad de construcción conjunta de la realidad percibida, vía relaciones e interpretaciones que se crean (Simons, 2011). En particular, la elección de los dos casos representativos que abordamos en este capítulo, en parte, permiten ilustrar el modelo de Lesson Study propuesto de manera prospectiva.

### Sujetos y contexto de implementación del EC

El equipo docente de EC está constituido tanto por profesores en servicio pertenecientes a escuelas de primaria, como por didactas expertos en EC y Estadística Temprana. Este equipo docente se reunía semanalmente en sesiones de 90 min durante 8 semanas. En general, las actividades consideradas en el EC conforman cuatro etapas de trabajo: (*etapa 1*) en las sesiones 1-2, los profesores experimentan situaciones auténticas referidas al IIR y al EDA, reflexionando sobre los elementos que caracterizan al IIR y/o al EDA; (*etapa 2*) en las sesiones 3-4 los profesores identifican necesidades de los estudiantes, formulan objetivos, establecen una tarea que permite promover el IIR y/o el EDA, anticipan posibles dificultades y probables respuestas de los estudiantes, delineando posibles intervenciones y devoluciones por parte del docente que implementa, además de determinar aspectos a evaluar; (*etapa 3*) en las sesiones 5-6 se implementa el diseño del plan de la lección, luego se comparten experiencias de los profesores a partir de dicha implementación, asimismo, los profesores en un rol de investigadores junto con los didactas expertos revisan, ajustan y rediseñan el plan de la lección considerando sugerencias y recomendaciones en base con lo sucedido; (*etapa 4*) en las sesiones 7-8 se

revisan registros audiovisuales en videograbaciones y registros escritos en notas de campo que abarcan las intervenciones de estudiantes para identificar bondades del plan de la lección y entre los profesores se discuten las actividades del proceso, describiendo la experiencia ganada durante EC llevado a cabo, a través de preguntas focalizadas (ver Figura 1).

La realización de las sesiones para ambos casos que se estudian (ver Tabla 1), bajo el modelo de Lesson Study del GEC-PUCV, contó con el apoyo de los equipos directivos de las escuelas que participaron. Además, se gestionaron todos los consentimientos informados de los apoderados de los estudiantes partícipes de las lecciones implementadas y de las profesoras del equipo docente de EC. Todas las sesiones se realizaron en línea, mediante la plataforma de conferencias Zoom, dada la situación de contingencia por COVID-19 a nivel mundial.

**Tabla 1.** *Constitución y contexto específico de los equipos docentes de EC para cada caso*

Caso	Equipo docente del EC	Contexto específico
Caso 1: Análisis exploratorio de datos y Argumentación colectiva	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Dos facilitadores con experiencia en Lesson Study</li> <li>- Un profesor de secundaria</li> <li>- Dos profesoras de primaria en servicio de dos escuelas chilenas de la región de Valparaíso.</li> </ul>	Una profesora que implementa la tercera versión del plan de lección, en modalidad de clase pública, con 8 años de experiencia profesional. En un curso de 3°, conformado por 14 estudiantes (cinco niñas y nueve niños) de 8 a 9 años de edad, de una escuela de la región de Valparaíso en Chile.
Caso 2: Inferencia estadística informal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Seis facilitadores con experiencia en Lesson Study</li> <li>- Dos educadoras de párvulos</li> <li>- Una educadora diferencial</li> <li>- Tres profesores de educación básica de 1° a 4° año básico</li> </ul>	Seis profesores que se desempeñan en una Escuela Municipal de la ciudad de Viña del Mar de la región de Valparaíso en Chile, y enseñan desde Kínder al grado 4.

**Fuente:** Elaboración propia

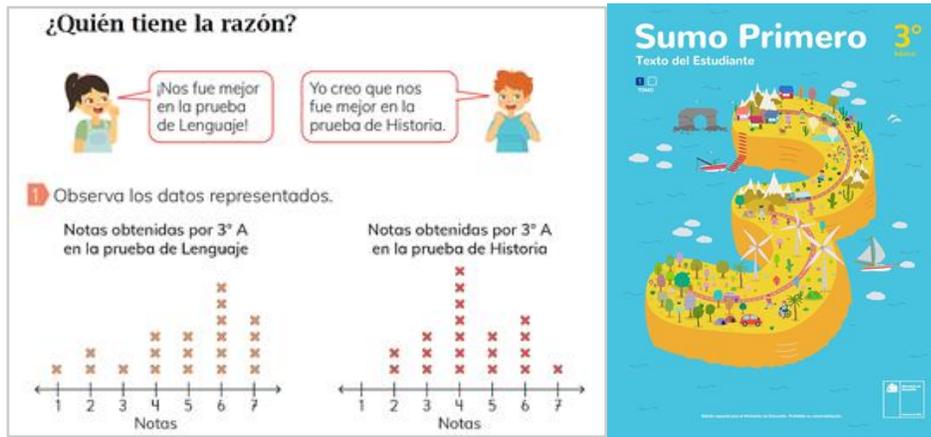
### Tareas centrales de los planes de lección de los Casos 1 y 2

En el *Caso 1*, la tarea *¿Quién tiene la razón?* fue seleccionada de un texto escolar de grado 3 (ver Figura 2) y busca que los estudiantes realicen inferencias a través del uso de evidencias que proporcionan los datos representados en dos gráficos de puntos, involucrándose procesos de argumentación colectiva y de análisis exploratorio para comparar datos en dichos gráficos. Esta tarea usa las notas de dos pruebas como conocimiento contextual que resulta familiar para los estudiantes,

y considera la escala numérica de notas en Chile que varía de 1,0 a 7,0 con nota mínima de aprobación es 4,0.

El análisis a priori de la tarea incluyó la identificación de cinco posibles estrategias de comparación de datos representados en los dos gráficos de puntos (ver Figura 2). Notar que se contaban con la misma cantidad de datos en ambos gráficos, pero distinta distribución de frecuencias, lo que permitía tomar una postura argumentada ante el comportamiento de los datos, dada la comparación de notas de un mismo curso en dos pruebas.

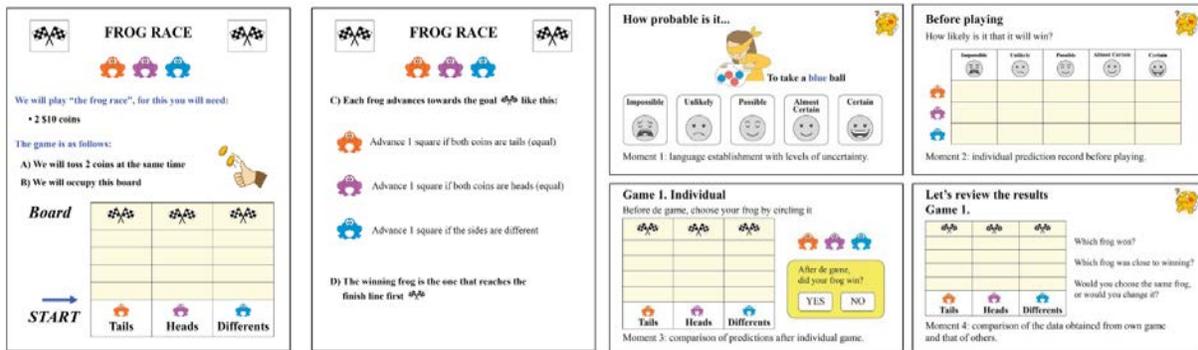
**Figura 2.** Tarea creada por GEC-PUCV



**Fuente:** Texto de matemáticas del Estudiante de grado 3 (MINEDUC, 2021a, p. 49)

En el *Caso 2*, la tarea presentaba aspectos propios de la inferencia estadística informal, pues requería que los estudiantes hiciesen una generalización basada en datos como evidencia y que expresaran el grado de certeza. Esta tarea corresponde a un juego no justo, sustentado en las características no equiprobables del experimento aleatorio de lanzar dos monedas (ver Figura 3).

**Figura 3.** Tarea creada por GIET



**Fuente:** Estrella et al. (2022)

Antes de comenzar, cada jugador debe elegir solo una de tres ranas que cree que puede alcanzar la meta antes que las otras. El juego termina cuando una de las ranas ha llegado a la meta. Los resultados de cada lanzamiento constituyen los datos y los tableros permiten a los jugadores registrar y observar los datos obtenidos (ver Figura 3). Además, se consideró que cada tablero representa un diagrama de frecuencias y, después de completar varios juegos por los estudiantes (muestras obtenidas), se usaban para que ellos visualizarán el comportamiento de los datos y expresaran su razonamiento inferencial informal, es decir, comunicaran sus argumentos mediante generalizaciones detonadas por la pregunta: Si juega más veces, ¿qué rana elegirías? ¿Por qué?

El análisis a priori de la tarea incluyó la identificación de ciertos argumentos completos, si se manifestaban los siguientes elementos: usar los datos como evidencia, generalizar más allá de los datos, y expresiones con grados de certeza. También se consideraron argumentos incompletos si faltaba alguno de dichos elementos; o bien, argumentos incorrectos si no contaba con ninguno.

### **Recogida de los datos cualitativos**

Para el *Caso 1*, a partir de la lección implementada en línea, transmitida en directo vía streaming y almacenada en el canal de YouTube de *Sumo Primero en Terreno* —programa de desarrollo profesional docente impulsado por la División de Educación General del MINEDUC en convenio con la PUCV (2019 al 2021), involucró a profesores en servicio que se desempeñaban en la asignatura matemática en los grados 1 a 4 de primaria— se recolectaron los datos cualitativos correspondientes a las intervenciones de la profesora tras implementar la lección y las producciones orales de los estudiantes (ver clase pública en <https://www.youtube.com/watch?v=anTadMQqKA0>) y que luego el Grupo de Investigación en Estadística Temprana de la PUCV (GIET) examinó en profundidad, compartiendo dichos análisis en modalidad taller en el mismo canal de YouTube, vía streaming (ver en [https://www.youtube.com/watch?v=wslTujp\\_V74](https://www.youtube.com/watch?v=wslTujp_V74)), el cual fue realizado en Muestras Regionales del programa *Sumo Primero en Terreno*, cuyos propósitos se centraron en reflexionar en torno a fortalezas y aspectos a mejorar en la interpretación de las producciones matemáticas de los estudiantes de la clase pública, en la gestión de discusiones estadísticas de la lección *¿Quién tiene la razón?* El lineamiento de esta lección es coherente con el enfoque de resolución de problemas propuesto por Isoda y Olfos (2009, 2021).

Por su parte, para el *caso 2* se analizaron las respuestas de los profesores que dieron en las sesiones 7-8, videograbadas desde la plataforma Zoom, situadas en la última etapa del modelo de Lesson Study, las cuales remiten a sus logros de aprendizajes docentes, tras diseñar, implementar y revisar el plan de lección que promovía el IIR en sus estudiantes de K a 4. Las respuestas, de forma

interactiva, fueron registradas por escrito en Padlet (plataforma web que permite escribir en línea, a través de *post it* virtuales), en donde se presentan solo la parte de la dimensión de los descubrimientos propiciados por la técnica de revisión activa 4F (*Facts/Hechos*, *Feelings/Emociones*, *Findings/Descubrimientos* y *Future/Futuro* de Greenaway, 2015) que contempló un análisis más acabado y prospectivo de acuerdo con la experiencia vivida, a partir del modelo de Lesson Study.

### **Procedimiento de análisis**

Para estudiar los casos 1 y 2 —que ilustran la operacionalización del modelo de Lesson Study que integra teoría y práctica— se da uso a la identificación de evidencias de los ciclos de anticipación, acción y reflexión, que se complementan y fortalecen entre sí en las respuestas de los profesores. Así, los investigadores clasificaron secciones de respuestas de los profesores, según si se estaba manifestando algún aspecto de anticipación, acción y/o reflexión de manera dominante (se evidencia como una idea protagónica en el fragmento narrativo) o recesiva (se evidencia como una idea secundaria en el fragmento narrativo), ratificando la mayoría de las clasificaciones y consensuando discrepancias. A saber, en cada ciclo, se tomó en cuenta los aspectos de:

- **Anticipación** que considera la respuesta docente al currículo escolar y a sus problemáticas locales junto con la búsqueda de investigaciones asociadas, las cuales conformarán el plan de la lección a investigar, adelantándose a las posibles dificultades de los estudiantes para proponer devoluciones (e.g., anticipar una estrategia a usar por los estudiantes).
- **Acción** que intenciona la creación de sentido en el marco de un conocimiento nuevo, que lleva al diseño de una tarea central de la lección que se investiga junto a las implementaciones del plan (e.g., investigar la tarea en torno al currículo escolar).
- **Reflexión** que integra el análisis crítico de las implementaciones del plan de la lección —contrastando las hipótesis iniciales acerca de su enseñanza y los logros potenciales de aprendizaje de sus estudiantes promovidos en el plan de la lección que se va mejorando— que determina aspectos a mejorar en el diseño del plan para fortalecer las oportunidades de aprendizaje en las próximas implementaciones (e.g., examinar las bondades y oportunidades de mejora del plan de la lección).

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

A continuación, se precisan los resultados encontrados al analizar dos casos de lecciones de estadística escolar distintas, ambas con el enfoque de resolución de problemas y la argumentación. Una que proponía una tarea central de EDA otra, cuya tarea central correspondía a inferencia estadística informal. Además, los casos difieren en los grados escolares en que fueron implementados

los planes de las lecciones elaboradas por equipos docentes y en el número de profesores que las diseñaron y llevaron al aula. Ambos casos son analizados (y consensuados) en aspectos propios del modelo de Lesson Study, y muestran el dinamismo y complementariedad del ciclo de anticipación, acción y reflexión que se promueve para el desarrollo profesional docente.

### **CASO 1: lección del grado 3 sobre análisis exploratorio de datos y argumentación colectiva**

Tras la tercera implementación del plan de la lección, en la clase pública del grado 3, la profesora Francesca pudo narrar su experiencia profesional de la enseñanza realizada, motivada por la pregunta ¿Qué análisis haces de la clase realizada? Los siguientes fragmentos en la Tabla 2, corresponden a lo narrado por la profesora, elegidos como ejemplos representativos de los ciclos que promueve el modelo de Lesson Study. En Tablas 2 y 3, hemos diferenciado por colores los aspectos de anticipación (en naranja), de acción (en azul) y reflexión (en verde) para distinguir la manifestación de los ciclos del modelo.

Desde la Tabla 2, se observa que la docente presenta varios aspectos de anticipación-acción-reflexión provocados por el modelo de Lesson Study que vivenció como participante activa. En su narrativa inmediata, post implementación ella da muestra de todas las categorías del modelo, en especial la anticipación y la reflexión, propia del momento de su narrativa, lo que indicaría una comprensión profesional del aprendizaje vivido por sus estudiantes en torno a la lección planificada.

La profesora Francesca expresa aspectos de anticipación, por ejemplo, al indicar en [3] que “Los chicos argumentaron, lograron hacer esto de extraer [información] de los datos argumentar, dar las garantías de por qué ellos habían escogido [la prueba de] Lenguaje, comparando estos diagramas de puntos”, ante lo cual la anticipación realizada en el equipo de docentes permitió que la profesora pudiera reconocer argumentos y procedimientos estadísticos que lo sustentaba en virtud de las estrategias de comparación previstas en el plan de la lección. Asimismo, ella manifiesta aspectos de acción, por ejemplo, en [1] indica que “uno lo va implementando [plan de la lección] antes con otro curso, la implementamos con otros niños, con otra escuela [segunda implementación]”; así, expresa su valoración de lo aprendido en las implementaciones del plan de la lección, que le permiten tomar decisiones profesionales durante su enseñanza. La profesora también comunica aspectos de reflexión, por ejemplo, en [4] menciona “desde la gestión de la clase [planificada] también se obtienen esos resultados [de aprendizaje]”, y [2] “Es cierto que logramos el objetivo de argumentar” refiriéndose a cómo la planificación le ha permitido regular la gestión de la lección provocando los resultados de aprendizajes esperados en sus estudiantes.

**Tabla 2.** *Análisis de la narración de la profesora Francesca tras la implementación*

Fragmentos narrativos de la profesora	Ciclos		
	1	2	3
1. Fue una muy buena clase, creo yo. Bueno, uno lo va implementando [plan de la lección] antes con otro curso, la implementamos con otros niños, con otra escuela [segunda implementación]. Uno se va haciendo como una idea que van a decir mis niños [argumentos de sus estudiantes]. Así que fue para mi bien positivo.	X	X	x
2. Es cierto que logramos el objetivo de argumentar, nos costó un poco representar las ideas con los chicos porque no manejaban mucho la herramienta Zoom, nosotros en la escuela trabajamos a través de Meet. Si bien es cierto, hicimos como un ensayo con esta herramienta Zoom, les costaba un poco manejar el mouse en la pantalla y poder representar [la estrategia a usar]. Entonces ahí creo que tuvimos alguna pequeña dificultad.		x	X
3. Fue una muy buena clase. Los chicos argumentaron, lograron hacer esto de extraer [información] de los datos argumentar, dar las garantías de por qué ellos habían escogido [la prueba de] Lenguaje, comparando estos diagramas de puntos. Me pareció muy buena participación de los niños y creo que se cumplió el objetivo de la clase.	X		x
4. Me parece también que la gestión de la clase fue bastante buena. Este vínculo que uno genera con los estudiantes es súper importante para poder obtener aprendizaje. Y me parece que, desde la gestión de la clase [planificada] también se obtienen esos resultados [de aprendizaje].	x	x	X
5. Había una estrategia que era la noción de frecuencia acumulada [conocimiento didáctico del contenido estadístico], pensé que podía salir al saber cuánto era el total de estudiantes. Que me dijeran 10 niños en lenguaje, la mitad del curso había sacado mejor nota. Como que lo pensé en ese momento, pensando en que pudiesen utilizar esa estrategia.	X		X

**Nota:** Las categorías consideradas son [1] anticipación; [2] acción; [3] reflexión. Además, “X” manifiesta una categoría dominante, mientras que “x” manifiesta una categoría recesiva.

**Fuente:** Elaboración propia

El siguiente episodio de la lección, da cuenta del actuar de la profesora que permitió a los estudiantes argumentar y que, con sus seis intervenciones, provocó una argumentación colectiva en que interactuaban conjuntamente ella y sus estudiantes en torno a la resolución de la tarea, propiciando la comunicación de una de las estrategias ya anticipada en el plan de lección, esto es, una nueva categoría de la variable notas: “mejores notas”, 6 y 7.

Francesca: ¿Quién tiene la razón? ¿Estudiante3?

Estudiante3: [Les fue mejor] en la prueba de Lenguaje

Francesca: ¿Cómo supiste tú que en la prueba de Lenguaje [les fue mejor]?

Estudiante3: Porque hay más [notas] 6 y 7.

Francesca: Muy bien. Porque hay muchos más [notas] 6 y 7 que en [la prueba de] Historia. ¡Oye que son inteligentes!

Estudiante2: En [la prueba de] Lenguaje

Francesca: Estudiante2 ¿por qué tu me dices que en [la prueba de] Lenguaje? Gracias Estudiante3.

Estudiante2 ¿Por qué tu me dices en [la prueba de] Lenguaje?

Estudiante2: Lo mismo

Francesca: ¿Qué es lo mismo? A ver, explícame con tus palabras. Porque yo no sé qué es lo mismo.

Estudiante2: Porque la [prueba] de historia tiene menos [notas] 6 y 7.

Francesca: Muy bien. La [prueba] de Historia tiene menos [notas] 6 y 7. Me parece excelente.

La tarea tenía las características del análisis exploratorio de datos, pues requería que los estudiantes se enfocasen en analizar el comportamiento de los datos representados en dos diagramas de puntos, y les demandaba argumentar y tomar una postura basada en esa evidencia. Esta lección proporcionó discusiones estadísticas productivas en el aula —por ejemplo, discutir acerca de la estrategia de crear una nueva categoría de notas iguales o superiores a 6, argumentando que más notas 6 y 7 en una Prueba puede entenderse como menos 6 y 7 en la otra Prueba— y posicionó conceptos y procedimientos propios de la estadística, en particular, al cuestionar el uso de las frecuencias de la categorías, interpretar las categorías de la variable en diagramas de puntos, argumentar mediante el comportamiento de los datos, entre otras actividades.

### **CASO 2: lección de los grados K- 4 sobre inferencia estadística informal**

En el caso 2, las profesoras vivenciaron el diseño, implementación y revisión de una lección, cuya tarea central involucraba el desarrollo de un razonamiento inferencial informal lo que implicó que los estudiantes en cada nivel educativo (de 5 a 9 años de edad) pudieran comparar y compartir sus respuestas con sus compañeros, las cuales eran escritas y también verbales.

Al término del proceso del modelo de Lesson Study, las respuestas de los docentes permitieron reconocer en su narrativa la expresión de al menos una componente del IIR, esto es, como evidencia usar datos; generalizar más allá de los datos; expresar la incertidumbre (ver Tabla 3).

**Tabla 3.** *Análisis de la narración de seis profesores de K-4 tras el proceso de EC*

Fragmentos narrativos de profesores	Ciclos		
	1	2	3
E1: Realizar mediaciones con los estudiantes que no influyeran en las respuestas de los otros niños y que promuevan el pensamiento inferencial. Pienso que esta habilidad [razonamiento inferencial informal] es algo innato en ellos, pero que debe ser estimulada y reforzada.	X	x	x
E2: Principalmente, incluir espacios lúdicos dentro de la enseñanza al igual que el uso de imágenes en los niveles de incertidumbre. Plantear situaciones en las que los niños y niñas puedan intervenir de manera más espontánea, también fue un aprendizaje. Finalmente, me cambia un poco la percepción de lo estructurada que es la matemática y en el caso de la estadística puedo incorporar este razonamiento inferencial informal.	X	X	x
E3: El principal aprendizaje fue, el poder explotar en mayor medida el análisis y trabajo que nos entregan los datos [conocimiento del contenido estadístico], explorar con preguntas de profundidad [el razonamiento de los estudiantes], sin duda, es una estrategia [de enseñanza] que no había utilizado ya que siempre se analizan, pero de manera más concreta, [...], creo que viviendo este nivel de profundidad y extensión del análisis, enriquece el trabajo de todos.	x	x	X
E4: La importancia y lo enriquecedor que resulta el trabajo colaborativo entre docentes [investigar la lección en un grupo de EC]. Incentivar a los niños y niñas a analizar basándose en datos concretos [aspecto clave de la tarea estadística]. Incluir niveles de incertidumbre [aspecto del razonamiento inferencial informal] a través de vocabulario y estrategias lúdicas.	x	X	X
E5: Uno normalmente, ocupa las matemáticas siempre como una ciencia exacta y que no permite ninguna incertidumbre, que es lo que es. Sin embargo el generar en los niños el pensamiento de que ellos pueden, digamos, descubrir a través de lo que observan, [...] porque uno pasa este contenido de gráficos y de toda esta parte de matemática pero nunca como niveles de incertidumbre [conocimiento del contenido estadístico], digamos y ninguno de los contenidos lo ve de esa manera, entonces que los niños razonen, piensen, hacerlos pensar, hacerlos analizar, buscar la pregunta adecuada [devolución] además para ellos, eso fue muy enriquecedor, el buscar, buscar, buscar hasta que el niño descubra, digamos, que uno lo hace en sus clases, trata de hacerlo habitualmente, de que ellos descubran, pero aquí que ellos se den cuenta, a través de lo explícito que es mirando un gráfico [de los propios datos generados] mirando lo que a ellos mismos le sucedió lo que ellos mismos experimentaron es una cosa distinta.	X	X	X
E6: Me motivó el trabajo colaborativo que se realiza en estas instancias [investigar la lección en un grupo de EC]. Además, el hecho de abordar contenidos estadísticos me llamó mucho la atención, pues siento que en la práctica docente se aborda poco este contenido [estadístico]. Finalmente, también me motivó conocer más sobre el razonamiento inferencial informal, considerando que la matemática se ve tan estructurada y uno acostumbra a pensar que se obtienen resultados exactos, la idea de inferir me llamó la atención.		X	X

**Nota:** Las categorías consideradas son [1] anticipación; [2] acción; [3] reflexión. Además, “X” manifiesta una categoría dominante, mientras que “x” manifiesta una categoría recesiva.

**Fuente:** Elaboración propia

Los docentes presentan aspectos del ciclo de anticipación-acción-reflexión sustentado por el modelo de Lesson Study. Los docentes E2, E4 y E5 muestran al menos dos aspectos del modelo, lo que indicaría un mayor aprendizaje profesional docente en la experiencia vivida.

En particular, los docentes E1, E2 y E5 expresan aspectos de anticipación, puesto que se enfocan en el pensamiento de los estudiantes, incluyendo posibles dificultades y la búsqueda de preguntas adecuadas para ellos. Por ejemplo, E1 señala como importante “realizar mediaciones con los estudiantes que no influyeran en las respuestas de los otros niños y que promuevan el pensamiento inferencial” y E5 expresa “... que los niños razonen, piensen, hacerlos pensar, hacerlos analizar, buscar la pregunta adecuada [devolución] además para ellos, eso fue muy enriquecedor, el buscar, buscar, buscar hasta que el niño descubra”.

Mientras que los docentes E2, E4, E5 y E6 manifiestan aspectos de acción en el marco del IIR como conocimiento nuevo, centrado en la tarea que se gestionó en el plan de la lección investigada colaborativamente. Por ejemplo, E2 manifestaba la valoración de incluir espacios lúdicos en la enseñanza, al enunciar que “plantear situaciones en las que los niños y niñas puedan intervenir de manera más espontánea, también fue un aprendizaje” y E4 señalaba “incluir niveles de incertidumbre [aspecto del razonamiento inferencial informal] a través de vocabulario y estrategias lúdicas”, valorando la importancia de incluir el IIR a temprana edad.

Los docentes E3, E4, E5 y E6 expresan aspectos de reflexión con análisis crítico y discusión de las implementaciones. Por ejemplo, E4 sostiene que “la importancia y lo enriquecedor que resulta el trabajo colaborativo entre docentes [investigar la lección en un grupo de EC]”, en concordancia E6 expresaba: “me motivó el trabajo colaborativo que se realiza en estas instancias [investigar en un grupo de EC]”, y el docente E3 reflexiona sobre lo siguiente “creo que viviendo este nivel de profundidad y extensión del análisis [las lecciones implementadas], enriquece el trabajo de todos” lo cual muestra el espíritu de una comunidad de aprendizaje que investiga su propia práctica profesional.

## CONCLUSIONES

En este capítulo indagamos en aspectos de anticipación, acción y reflexión del modelo de Lesson Study diseñado por GEC-PUCV que son experimentados por profesores en servicio durante el desarrollo del proceso de Estudio de Clases. Específicamente, hemos analizado las narrativas de profesores que trabajaron en lecciones innovadoras de los grados de K a 4 sobre, por un lado, sobre inferencia estadística informal (que actualmente no está explícita en el currículo escolar chileno, pero si está incluida en los estándares de formación inicial docente de profesores de matemática (MINEDUC, 2021b)) para mostrar cómo los profesores pueden contribuir a conectar importantes

conceptos de la estadística, reconocer conceptos estadísticos significativos y promover con ello la anticipación al pensamiento de los estudiantes. Y, por otro lado, sobre una lección de análisis exploratorio de datos, junto con un episodio de argumentación para mostrar la acción del rol docente en el reconocimiento de la importancia de las garantías y el planteamiento de apoyos a la argumentación colectiva en el aula.

Los casos analizados muestran cómo las acciones, anticipaciones y reflexiones docentes desarrolladas en el EC promueven cambios en el discurso del profesor que, posiblemente, repercuten en el aprendizaje al interior del aula y se tornan en buenas prácticas. Los análisis muestran que los profesores que conforman un equipo de EC pueden alcanzar un dominio y comprensión de las posibilidades y restricciones conceptuales de la estadística que poseen sus estudiantes, y de los conceptos de la estadística que son relevantes, incluyendo aquellos exigidos por el currículo escolar.

Entre las fortalezas del Estudio de Clases está el aprender colaborativamente algo nuevo con colegas de una misma escuela (incluso de distintas escuelas), junto con construir un plan de lección que se investiga para su mejora, situada en la realidad en donde cobra un sentido educativo de interés. Cualquier modelo de desarrollo profesional docente busca cambios en los profesores, en sus conocimientos, autoeficacia, y especialmente en su práctica docente; para que ello ocurra, el modelo de Lesson Study propone que el profesor se anticipe, actúe y reflexione sobre su tarea profesional de enseñanza con foco en el aprendizaje de sus estudiantes.

La experiencia que viven los equipos docentes, bajo el modelo de Lesson Study con el enfoque de resolución de problemas, ha permitido que puedan anticipar posibles dificultades de aprendizaje, organizar la acción docente con nuevas perspectivas —tales como una comprensión más profunda de cómo los estudiantes argumentan al analizar exploratoriamente los datos y cómo desarrollan el razonamiento inferencial informal a través de las hipótesis de enseñanza plasmadas en el Plan de la lección, sujetas a evaluación y validación por el equipo docente, a partir de sus implementaciones—, reflexionar sobre la acción regulada mediante la anticipación de las reacciones de los estudiantes.

En ambas experiencias, la gestión de la lección (que se basa en gran medida en el plan de la lección acordado y refinado) muestra en las respuestas docentes de los equipos de EC su avance y también retos pendientes, ya que para los profesores chilenos en servicio la comprensión de los conceptos estadísticos básicos sigue siendo un desafío (Vidal-Szabó y Estrella, 2021). Ello requiere de un apoyo continuo y a largo plazo, con el fin de contribuir a un desarrollo profesional docente sostenido en el tiempo, especialmente en comunidades de aprendizaje al interior de las escuelas que

propicien a una mayor comprensión de conocimientos especializados del profesor que enseña estadística y se enriquezca con efectividad el aprendizaje de niñas y niños.

Los casos presentados han sido publicados el presente año para difundir buenas prácticas profesionales de profesores y profesoras que se atreven a innovar en su quehacer con miras a impactar los aprendizajes en nuestras aulas. El modelo de Lesson Study ha permitido dinamizar estos ciclos en comunidades de docentes que aprenden juntos, promoviendo el autoconocimiento de la propia tarea de enseñar, generando actitudes profesionales de reflexión colaborativa sobre y en la acción, e iluminando la cultura de enseñanza, evaluación y aprendizaje de los profesores.

### Agradecimientos

Al financiamiento de ANID Fondecyt 1200346; FONDEF ID20i10070; VRIEA PUCV 039.439/2020; and ANID/ PIA/ Basal Funds for Centers of Excellence FB0003. Se reconoce la contribución de GIET PUCV.

### REFERENCIAS

- Bakker, A. y Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 5-26. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538293>
- Ben-Zvi, D. (2006, July 2-7). Scaffolding students' informal inference and argumentation. In A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching of Statistics (CD-ROM), Salvador, Bahia, Brazil. Voorburg*. International Statistical Institute. [https://iase-web.org/documents/papers/icots7/2D1\\_BENZ.pdf](https://iase-web.org/documents/papers/icots7/2D1_BENZ.pdf)
- Ben-Zvi, D. y Aridor, K. (2016). Children's wonder how to wander between data and context. In D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The Teaching and Learning of Statistics* (pp. 25-36). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-23470-0\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-23470-0_3)
- Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K. y Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM*, 44(7), 913-925. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3>
- Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291-303. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9593-3>
- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 643-689). Springer New York. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2\\_21](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_21)
- Bruns, B., Macdonald, I. H. y Schneider, B. R. (2019). The politics of quality reforms and the challenges for SDGs in education. *World Development*, 118, 27-38. <https://doi.org/10.1016/j.worlddev.2019.02.008>
- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Springer Netherlands. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_10](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10)

- Callingham, R. y Watson, J. The development of statistical literacy at school. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 181-201. <https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.223>
- del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64. <https://doi.org/10.7764/PEL.49.1.2012.5>
- English, L. (2012). Data modeling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 15-30. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9377-3>
- Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En P. Salcedo (Ed.), *Alternativas pedagógicas para la educación matemática del siglo XXI* (pp. 173- 194). Universidad Central de Venezuela.
- Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. En A. Leavy (Ed.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 239-256). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7\\_14](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_14)
- Estrella, S. y Olfos, R. (2012). La taxonomía de comprensión gráfica de Curcio a través del gráfico de Minard: una clase en séptimo grado. *Revista Educación Matemática*, 24(2), 119-129. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525862002>
- Estrella, S., Méndez-Reina, M., Olfos, R. y Aguilera, J. (2022). Early statistics in kindergarten: Analysis of an educator's pedagogical content knowledge in lessons promoting informal inferential reasoning. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 11(1), 1-13. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-07-2021-0061>
- Estrella, S., Morales, S., Olfos, R. y Salinas, R. (en prensa). Estudio de e-Clases en Chile: cambios percibidos por profesores que diseñan, mejoran e implementan una tarea que desarrolla el razonamiento inferencial informal desde PK-3. En A. Richit, J. da Ponte y E. Soto (Eds.). Livraria da Física.
- Estrella, S. y Vidal-Szabó, P. (2017). Alfabetización estadística a través del estudio de clase Representaciones de datos en primaria. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 12-17.
- Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R. y Espinoza, G. (2020). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(3), 293-310. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-018-09423-y>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assesment and instruction in statistics education (GAISE) report: a preK-12 curriculum framework*. ASA. [https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/gaise/gaiseprek-12\\_full.pdf](https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/gaise/gaiseprek-12_full.pdf)
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9>
- Goizueta, M. y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 31(1), 61-78. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285704/373676>
- Greenaway, R. (2015). *Reviewing Skills Training*. Routledge International Handbook of Outdoor Studies.

- Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases*. Ediciones Universitarias de Valparaíso. <https://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/upload/ProblemSolvingIsodaOlfos.pdf>
- Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases japonés en matemáticas*. Ediciones Universitarias Valparaíso.
- Isoda, M., Olfos, R., Estrella, S. y Baldin-Yamamoto, Y. (2022). Two contributions of japanese lesson study for the mathematics teacher education: the effective terminology for designing lessons and as a driving force to promote sustainable study groups. *Educacao Matemática em Revista*, 23(1), 98-112.
- Konold, C., Higgins, T., Russell, S. y Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 305-325. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9529-8>
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning. Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Lawrence Erlbaum.
- Krummheuer, G. (2015). Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics classroom interaction. In A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 51–74). Springer.
- Langrall, C., Nisbet, S., Mooney, E. y Janssen, S. (2011). The role of context expertise when comparing data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 47-67. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538620>
- Leavy, A. y Hourigan, M. (2018). El papel de la similitud perceptiva, el contexto y la situación al seleccionar atributos: consideraciones hechas por niños de 5 a 6 años en entornos de modelado de datos. *Educ Stud Math* 97, 163-183. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9791-2>
- Makar, K. y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistical Education Research Journal*, 8(1), 82-105. <https://iase-web.org/ojs/SERJ/article/view/457>
- Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538301>
- Merriam, S. B. (1988). *Investigación de estudios de caso en educación: un enfoque cualitativo*. Jossey-Bass.
- Ministerio de Educación [MINEDUC] (2018). *Matemática. Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Autor. <https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/>
- Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2021a). *Marco para la Buena Enseñanza*. Autor. <https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/MBE-2.pdf>
- Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2021b). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática*. Autor. <https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/Matematica-Media.pdf>
- Morales, S. (2021). *Caracterización de la capacidad de enseñanza de la matemática: un caso de estudio de clases de primaria y preescolar* (Tesis de doctorado no publicada). Valparaíso: PUCV. <https://catalogo.pucv.cl/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=435706>
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2009). Navigating through data analysis and probability in prekindergarten-grade 2 (Vol. 1). Author.
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [CCSSO]. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Author.
- Olfos, R., Estrella, S. y Isoda, M. (2020). A Chilean Educational Initiative to Mitigate the Impact on Mathematics Learning in Grade 1 Students During the Covid-19 Lockdown. *Inter Faculty: Journal of Interdisciplinary Research in Human and Social Sciences*, 10, 175-186. <https://doi.org/10.15068/00162401>
- Pfannkuch, M. (2006). Informal Inferential Reasoning. In A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. IASE. [https://iase-web.org/documents/papers/icots7/6A2\\_PFAN.pdf?1402524965](https://iase-web.org/documents/papers/icots7/6A2_PFAN.pdf?1402524965)
- Pfannkuch, M. y Ben-Zvi, D. (2011). Developing teachers' statistical thinking. In C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 323-333). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_31](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_31)
- Pfannkuch, M., Arnold, P. y Wild, C. J. (2015). What I see is not quite the way it really is: Students' emergent reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 343-360. <https://www.jstor.org/stable/43589970>
- Pratt, D., Johnston-Wilder, P., Ainley, J. y Mason, J. (2008). Local and global thinking in statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 107-129. [https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ7\(2\)\\_Pratt.pdf](https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ7(2)_Pratt.pdf)
- Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19. [https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ7\(2\)\\_Rossman.pdf](https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ7(2)_Rossman.pdf)
- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Ediciones Morata.
- Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(56), 1092-1112. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13>
- Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J. y Ulloa, R. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(7), 977-1005. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686>
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Free Press. [https://www.researchgate.net/publication/44824783\\_The\\_teaching\\_gap\\_Best\\_ideas\\_from\\_the\\_world's\\_teachers\\_for\\_improving\\_education\\_in\\_the\\_classroom](https://www.researchgate.net/publication/44824783_The_teaching_gap_Best_ideas_from_the_world's_teachers_for_improving_education_in_the_classroom) New York NY The Free Press
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (updated ed.). Cambridge University Press. Original work published 1958.
- Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Addison-Wesley.

- van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P. y Bakker, A. (2019). Repeated sampling with a black box to make informal statistical inference accessible. *Mathematical Thinking and Learning*, 22(2), 1-23. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1617025>
- Vidal-Szabó, P. y Estrella, S. (2020). Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico. En Y. Morales-López y Á. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2019* (pp. 1036-1042). Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Vidal-Szabó, P. y Estrella, S. (2021). Conocimiento Estadístico Especializado en Profesores de Educación Básica, basado en la taxonomía SOLO. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(4), 134-148. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.81>
- Vidal-Szabó, P., Kuzniak, A., Estrella, S. y Montoya, E. (2020). Análisis Cualitativo de un Aprendizaje Estadístico Temprano con la Mirada de los Espacios de Trabajo Matemático orientado por el Ciclo Investigativo. *Revista Educación Matemática*, 32(2), 216-245. <https://doi.org/10.24844/EM3202.09>
- Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58. [https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ7\(2\)\\_Zieffler.pdf](https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ7(2)_Zieffler.pdf)

## **TEACHING OF STATISTICS IN CHILE WITH LESSON STUDY: INNOVATIONS AND GOOD PRACTICES**

### **ABSTRACT**

This chapter presents a Lesson Study model, which has been developed in Chile by the Grupo de Estudio de Clase of Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. This model has promoted the integration of theory and practice, through cycles of anticipation-action-reflection, which promote collective argumentation in the classroom through the problem-solving approach. This integration is illustrated in the chapter through two innovative lessons in early statistics, in particular, the case of a public lesson on exploratory data analysis (grade 3), and the case of an informal statistical inference lesson (grades K-4). From the qualitative analysis carried out, we verified (1) productive statistical discussions and positioning of concepts and procedures typical of statistics; and (2) the teachers' acquisition of a greater understanding of the statistical content, of its didactics and of the statistical conceptual development of the students, which underlie the design of the tasks and the flow of the lesson that they investigate and that provoke good practices from Lesson Study teaching teams.

Keywords: Early statistics; Statistics education; Statistical reasoning; Lesson study; Exploratory data analysis; Informal statistical inference

## **ENSINO DE ESTATÍSTICA NO CHILE COM ESTUDO DE AULA: INOVAÇÕES E BOAS PRÁTICAS**

### **RESUMO**

Este capítulo apresenta um modelo de Lesson Study, que foi desenvolvido no Chile pelo Grupo de Estudo de Classe do Instituto de Matemática da Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Esse modelo tem promovido a integração teoria e prática, por meio de ciclos de antecipação-ação-reflexão, que promovem a argumentação coletiva em sala de aula por meio da abordagem problematizadora. Essa integração é ilustrada no capítulo por meio de duas aulas inovadoras em estatística inicial, em particular, o caso de uma aula pública sobre análise exploratória de dados (3ª série) e o caso de uma aula informal de inferência estatística (3ª série). A partir da análise qualitativa realizada, verificamos (1) discussões estatísticas produtivas e posicionamentos de conceitos e procedimentos típicos da estatística; e (2) a aquisição por parte dos professores de uma maior compreensão dos conteúdos estatísticos, da sua didática e do desenvolvimento conceitual estatístico dos alunos, que fundamentam o desenho das tarefas e o fluxo da aula que investigam e que provocam bons práticas das equipes de ensino do Lesson Study.

Palavras-chave: Estatísticas iniciais; Educação estatística; Raciocínio estatístico; Lesson study; Análise exploratória de dados; Inferência estatística informal

SOLEDAD ESTRELLA  
*Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile*  
[soledad.estrella@pucv.cl](mailto:soledad.estrella@pucv.cl)  
<https://orcid.org/0000-0002-4567-2914>

Dra. Soledad Estrella es profesora de educación matemática y educación estadística en el Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Lidera desde hace una década el Grupo de Investigación en Estadística Temprana, GIET, y es cofundadora del Grupo de Estudio de Clases, GEC-PUCV. Su investigación se centra en el aprendizaje y la enseñanza basados en el contexto, el sentido del dato, las trayectorias de aprendizaje de la estadística, y la resolución de problemas colaborativa y creativa. Participa activamente en la comunidad nacional de educación matemática, desempeñándose como Vicepresidenta de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (2021-2022) y es miembro del Consejo Internacional de la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe, periodo 2022-2025, REDUMATE, ICMI-CIAEM.

PEDRO VIDAL-SZABÓ  
*Universidad del Desarrollo, Santiago, Chile*  
[pedro.vidal@pucv.cl](mailto:pedro.vidal@pucv.cl)  
<https://orcid.org/0000-0002-3320-9789>

Pedro Vidal-Szabó es Doctor en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Actualmente se desempeña como parte del equipo central del programa Sumo Primero en Terreno impulsado por la División de Educación General del MINEDUC en convenio con la Universidad del Desarrollo. Ha participado en varios proyectos de investigación relacionados con la Estadística Temprana. Sus áreas de interés son la formación docente y la formación escolar en el contexto de la Educación Estadística.

SERGIO MORALES  
*Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile*  
[sergio.morales@pucv.cl](mailto:sergio.morales@pucv.cl)  
<https://orcid.org/0000-0001-5980-6816>

Sergio Morales es Doctor en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Actualmente realiza su posdoctorado en el Instituto de Matemática de la PUCV. Tiene experiencia como profesor de secundaria y universitario, en la formación de profesores y en la ejecución de distintos proyectos educativos. Ha desarrollado investigaciones en el área de la estadística temprana, la formación de profesores y desarrollo profesional docente como Coordinador Nacional del Programa Sumo Primero en Terreno (2019-2021).



# DESIGN IDEAS ON PRIMARY TEACHER EDUCATION FOR TEACHING STATISTICS – EXPLORATORY INSIGHTS FROM GERMANY

DANIEL FRISCHEMEIER

## ABSTRACT

This chapter reports on two different courses for the education of future primary school teachers in statistics education in Germany. Such courses require specific design ideas to shape statistical thinking in future teachers and to prepare them for teaching in class. These design principles include the use of digital tools, real data, project-based learning, linking content and pedagogical content knowledge, etc. The different concepts behind these courses and their rationale are presented in this chapter. Please note that these two courses presented in this chapter are not supposed to be comparable. Moreover, these two courses are supposed to show how and in which way the education of primary teachers (which design ideas, which activities, which forms of assessment) in statistics can be realized.

Keywords: Early statistical thinking, design ideas, (pre-service) teacher education, TinkerPlots

## INTRODUCTION & MOTIVATION

Statistical reasoning and thinking have become increasingly important in recent years. Data is omnipresent, and not only since the Covid 19 pandemic and the rapid emergence of fake news we do all know how important it is to deal competently with data (Engel, 2017). This competent handling and statistical thinking should and can already be promoted in primary school (Ben-Zvi, 2018). An overview of research and practice examples on *early* statistical thinking can be found in Leavy et al. (2018). For Germany, the national educational standards for data and chance recommend that pupils should know (Hasemann and Mirwald, 2012):

- ...how to record data about objects or events.
- ...how to document them, especially if they are fleeting (transitory).
- ...how to present the collected data clearly in tables and diagrams for other people
- ...that it can be helpful or even necessary to organize the data to increase its information value.
- ...how to extract information from such representations and then use it (p. 145).

However, a crucial point is to bring ideas such as those of Hasemann and Mirwald (2012) regarding early statistical thinking into the primary classroom. In the collection by Batanero et al. (2011), it is reported that teachers lack not only pedagogical and technological content knowledge in various areas Frischemeier, D. (2022). Design ideas on primary teacher Education for teaching statistics – Exploratory insights from Germany. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 165-187). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

such as graphical competence, understanding measures of center, variability, and sampling but also content knowledge for teaching statistics. Therefore, it is important to develop special statistics courses for prospective primary school teachers. Of course, the background varies from country to country and even from university to university. This chapter provides some exemplary and selective insights in the university education of statistical thinking of primary school teachers in Germany and aims to identify *fundamental* ideas for designing such courses. We present the implementation of these ideas by introducing two different course designs for primary teacher education in statistics that were developed in the context of design-based research (Cobb et al., 2003). For this purpose, we summarize studies we have conducted over the years and we will report selected findings of these studies in this chapter: Frischemeier (2017), Podworny et al. (2017), Frischemeier and Biehler (2018), and Frischemeier et al. (2021). Please note that both courses which are presented in this chapter were designed for different purposes and are not supposed to be compared. Moreover, this chapter aims to show how teacher education can be realized at the tertiary level. Each of both of the courses aims to enhance specific knowledge for teaching statistics at the primary level.

### **DIFFERENT FACETS OF TEACHERS' KNOWLEDGE IN STATISTICS**

As mentioned earlier, our main idea was to develop courses in statistics for future primary teachers. Pfannkuch and Ben-Zvi (2011) formulate three goals that a course on teacher education in statistics should pursue concerning the knowledge components of future teachers:

The first goal is to develop and improve teachers' understanding of statistics since it is generally acknowledged that they lack statistical knowledge, good statistical thinking, and points of view that are now required by new curricula [...]. The second goal is to enable teachers to understand the prior knowledge, beliefs, and reasoning prevalent in their students, the value of listening carefully to their students' emerging reasoning processes, and how to build and scaffold students' conceptions. The third goal is to facilitate teachers' understanding of how curricula, technology, and sequences of instructional activities build students' concepts across the year levels (p. 324).

In this quote, different facets of teachers' knowledge are mentioned. We will reflect on these different knowledge facets in the following: In his early work, Shulman (1986) distinguished between content, pedagogical content, and pedagogical knowledge. These knowledge domains relevant to us, such as content knowledge (CK) and pedagogical knowledge (PCK) are specified in the pedagogical literature. Hill et al. (2008) divide content knowledge (CK) into common content knowledge (CCK), mathematical horizon knowledge, and specific content knowledge (SCK). Ball et al. (2008) describe the term horizon knowledge “[as] an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum” (p. 403). Pedagogical content knowledge (PCK), according

to Ball et al. (2008), can be divided into the knowledge of content and students (KCS), knowledge of content and teaching (KCT), and knowledge of curriculum (KC); furthermore, KCS is, among other things, knowledge about typical strategies (correct, incorrect) and errors for engaging in learners' mathematical thinking. KC is the knowledge of how mathematical concepts and skills are taught in different contexts. KCT includes knowledge about didactic approaches (e.g., different levels of representation).

The use of a digital tool adds another domain of knowledge needed by teachers: technological knowledge. In terms of the technological component (Mishra & Koehler, 2006) through the use of digital tools in our course, the TPACK framework specifies the domain of technological knowledge. Mishra and Koehler (2006) develop a framework for the domain of technological knowledge with seven components: content knowledge (CK), pedagogical knowledge (PK), technological knowledge (TK), technological pedagogical knowledge (TPK), technological content knowledge (TCK), pedagogical content knowledge (PCK), and the intersection of all components, technological pedagogical content knowledge (TPACK).

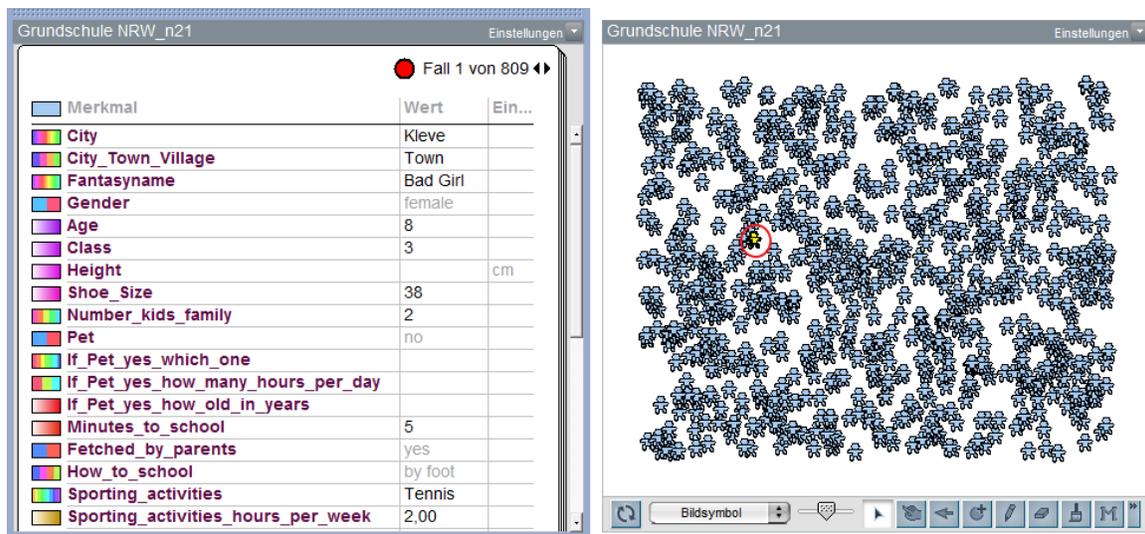
The use of digital tools in statistics is crucial – for different reasons from a learner's perspective: At first, an adequate digital tool (for the potential of digital tools in primary school classrooms see Walter, 2018) allows to concentrate learners to the content and interpretation of statistical data rather than on procedures to create graphs, etc. It allows to change between statistical displays and representations, reduces the cognitive load of learners, and enables them to explore real, large, and multivariate datasets. Digital tools in statistics classrooms can also be considered tools for teachers. Here the tools can take an important didactical role so that the teacher can use the tools for teaching and demonstration purposes. An overview of digital tools in statistics education is given in Biehler et al. (2013). For our purposes, we see especially the digital tool TinkerPlots as an adequate digital tool in primary school classrooms and teacher education. According to Biehler et al. (2013) TinkerPlots

is designed for creating many simulation models without the necessity of using symbolic input. In addition, TinkerPlots meets the third requirement of Biehler's (1997) framework by making students participate in the construction and evaluation of methods by providing a graph construction tool for young students who can invent their elementary graphs, whereas most other tools provide only a readymade selection of standard graphs (Biehler et al., 2013, p. 658).

In our courses, we used TinkerPlots (Konold & Miller, 2011) as a digital tool for data exploration. To give a very short insight into this tool, we see in Figure 1 the TinkerPlots screen with a given imported dataset (collected data on the leisure time and media activities from 809 primary

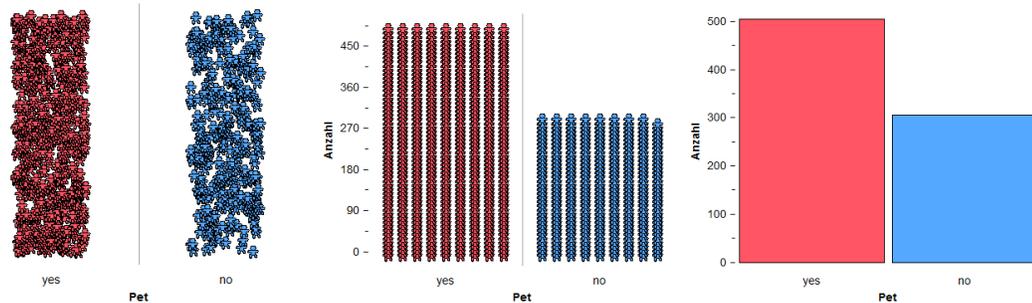
school students in Germany): on the left-hand side there are the data cards of the 809 students, on the top the specific data card displayed is for a student whose fantasy name is “Bad Girl”. The data card represents a case (the case of “Bad Girl”) and the collection of 809 data cards represents a sample of cases, which all share a set of common attributes each of which is a statistical variable. We can extract the following information from this data card: “Bad Girl” comes from Kleve (a city in North-Rhine Westfalia), is a girl, is eight years old and is in grade 3, has shoe size 38, and does not have a pet. Each data card is allocated in a bijective manner to one of the 809 data symbols in the corresponding plot (see Figure 1 right). Bad Girl, in this case, is circled (Figure 1, right).

**Figure 1.** TinkerPlots screen with data cards stack (left) and graph (right)



Using the operations separate, stack, and order, learners can structure the data to create their statistical displays or conventional displays like bar graphs for example for the distribution of the variable “own\_a\_pet” (Figure 2).

**Figure 2.** TinkerPlots graph of the distribution of the variable “own\_a\_pet” with separated symbols (left) separated and stacked symbols (centered) and conventional bar graph in TinkerPlots (right)



What do teachers need to know for teaching statistics at the primary level? For some knowledge facets, we provide a statistics example for future primary teacher courses:

- CK: calculating the arithmetic mean and the median and weighing what is appropriate in each situation to describe the center of distribution of a numerical variable.
- TK: how to use TinkerPlots (e.g., starting the program).
- TCK: how to use TinkerPlots to realize distribution visualization (e.g., creating a bar graph) or to calculate the arithmetic mean or median.
- TPK: how to use TinkerPlots in a teaching-learning environment to explore data (e.g., using this software to change the display of data).
- PCK: typical (mis)conceptions students have in analyzing data and how to respond to them.
- TPACK: how to use TinkerPlots software to promote statistical thinking in learners.

To enhance these different knowledge facets as mentioned above, we decided to design courses for primary pre-service teacher education. We will outline design ideas in the following paragraph.

### **DESIGN IDEAS FOR COURSES IN STATISTICS**

Our main idea was to develop statistics courses for pre-service teacher education at the primary level. We draw on design-based research and the components of the *Statistical Reasoning Learning Environment* (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Our courses are designed according to these requirements:

- (a) Framing the teaching unit/sequence in the PPDAC cycle (Wild & Pfannkuch, 1999).
- (b) Focus on fundamental ideas in statistics (Burrill & Biehler, 2011).
- (c) Use of real and motivating data sets (Engel, 2007).
- (d) Integrating appropriate technological tools that allow learners to explore data and develop their statistical reasoning skills (Biehler et al., 2013).
- (e) Stimulate communication between learners involving statistical reasoning and promote viable exchanges focused on central statistics ideas in a collaborative environment (Roseth et al., 2008)
- (f) Conduct formative assessments (Stratmann et al., 2009)

Conducting a full data analysis cycle (a) such as the investigative **PPDAC** (Wild & Pfannkuch, 1999) cycle is also a fundamental design idea of a statistics course. Within this approach, learners are expected to (1) define a statistical problem and **P**ose questions, (2) **P**lan and prepare a

data collection, (3) collect **D**ata (including data management and cleaning), (4) **A**nalyze data, and (5) interpret the analyzed data to reach **C**onclusions that answer the statistical question.

Aspect (b) focuses on the main fundamental ideas in statistics such as data, representation, and variability (Burrill & Biehler, 2011).

Design idea (c) is to use real and motivating data sets (Engel, 2007). “Data are not merely numbers, but *numbers with a context*” (Moore, 1990, p. 96) and context plays a fundamental role in statistics. However, real data sets and interesting contexts for learners are also important so that they can combine their contextual and statistical knowledge to reach inferential conclusions (Frischemeier & Schnell, 2021).

The fundamental aspect and design idea (d) are to enable learners to investigate large and meaningful data sets. The use of appropriate digital tools (for an overview see Biehler et al., 2013) reduces the cognitive load on learners and enables them to explore larger data sets and quickly change the representation (transnumeration, see Wild & Pfannkuch, 1999) to gain deeper insights into the data in terms of an exploratory data analysis (Pratt et al., 2011).

A statistics course must not only refer to the results from software exploration but also support students in communicating their findings of data exploration. This essential step is reflected in design principle (e). One way can be in the form of statistical reports (Franzis, 2005; Biehler, 2007); but students need to be supported in this kind of activity – peer feedback (Van Boxtel et al., 2000) is an important component and collaborative learning environments can encourage and support students in their communication process (Roseth et al., 2008).

A final design aspect (f) is that the learning process of the participants needs to be monitored in terms of formative assessment. Portfolios, for example, offer a good way to document the learning process over the course (Stratmann et al., 2009).

With the perspective of our course design, the implementation of the above design ideas, and the aim to develop teachers’ knowledge facets for teaching statistics at the primary level, we develop different settings for the education of future primary teachers in statistics.

## **RESEARCH QUESTIONS AND METHODOLOGY**

The main aim of this chapter is to present two different concepts for primary pre-service teacher training in statistics. The main research question is: To what extent can the design ideas mentioned above be successfully implemented in teacher training courses for statistics at the primary level? We developed two different approaches to primary teacher education in statistics according to these design ideas within a design-based research framework (Cobb et al., 2003). We present course

settings, show exemplary activities for the participants, and investigate the development of cognitive and affective components of the participants before, during, and after the course.

## **COURSE CONCEPTS FOR DEVELOPING TEACHERS' STATISTICAL THINKING**

For different purposes, we have designed, conducted, and evaluated two different course settings for prospective primary statistics teachers' education: a lecture *on Stochastics and its didactics* and a seminar on *Developing statistical reasoning with TinkerPlots*. Both courses are different in their intention and target group. *Stochastic and its didactics* is a weekly lecture accompanied by a weekly seminar. It is compulsory for prospective primary school teachers at the University of Paderborn and the participants of this course are in their 3rd or 4th semester of their Bachelor's degree. *Developing statistical reasoning with TinkerPlots* is a seminar in the Master's program (1st or 3rd semester) at the University of Paderborn. The course is optional and deepens the contents of the course *Stochastic and its didactics*. Both courses were developed in the context of design-based research (Cobb et al., 2003). We see these two types of courses as typical for teacher education in teaching statistics – *Stochastic and its didactics* as a compulsory basic course and *Developing statistical reasoning with TinkerPlots* as an optional on-top course.

In the following, we describe the design of the two courses. As is common in design-based research, we collected data during the courses to monitor participants' learning processes. For the first course, we collected data on the final exam, affective aspects, and student's attitudes towards the course content; for the second course, we also collected data on participants' cognitive development, worksheets, statistical reports, etc. We will first report on the design and realization of the course and then put our focus on the evaluation of participants' cognitive and affective issues.

### **Design and Realization of the Course Stochastics and its Didactics (Lecture)**

*Stochastics and its didactics* is a semester-long course and in the following, we refer to the course, which was held in the summer semester of 2017 when 211 prospective primary teachers took part in the course. The course lasted 14 weeks with 90 minutes of lecture and 90 minutes of seminar per week. The main aim of the course is to provide basic statistical content knowledge in the areas of data analysis, combinatorics, and probability. In addition, participants acquire pedagogical content knowledge for teaching these areas in primary schools. Since we consider the use of technological tools in working with data (exploring large, multivariate datasets, using the tool to switch between different representations, interactivity, etc.) and probability (simulation) as inevitable, we see the development of TPACK as an important part of the course. The main design ideas that were implemented in this course are:

- (a) Implementation of the PPDAC cycle

- (b) The focus is on fundamental ideas in statistics.
- (c) The use of real and motivating data.
- (d) The use of digital tools.
- (e) The implementation of collaborative work.
- (f) Formative assessment.

In Table 1, we see the specific learning objectives, learning activities, and forms of examination in the course *Stochastics and its didactics*. The relationship is established according to the constructive alignment framework (Biggs, 1996). In the *Learning objectives* column, we have also mentioned which facets of teacher knowledge are promoted in the course. In the column *Learning activities with TinkerPlots*, we demonstrate exemplarily how and with which concrete learning activities we tried to realize the learning objectives mentioned in column 1. Finally -as mentioned in the Cognitive Alignment framework- the *form of assessment* is a crucial component. This is mentioned and exemplified in column 3. For the table and further details on the course “stochastics and its didactics” see also Frischemeier et al. (2021).

Let us look at two exemplary activities. A representative activity to improve statistical content knowledge was the task in Figure 3. This was a typical example task we implemented to improve the statistical content knowledge of our participants. Participants had to determine the median of the distribution in Figure 3 and compare the location of the median with the arithmetic mean of the distribution. In this way, the participants had to apply their content knowledge about the definition of the median and the definition of the mean, identify the median and mean for this specific dataset and compare the location of the two measures.

**Figure 3.** Exemplary activity to expand content knowledge

Given is the distribution of a numerical variable with six points. Unfortunately, the scale is no longer legible.



a) Despite the illegible scale, you can draw in the median. Draw the median as accurately as possible in the figure above.

b) Is the arithmetic mean in the figure above to the left of the median, to the right of the median, or on the median?

A distinctive activity to enhance CK, TCK and KCS was the *Frog project* (Eichler & Vogel, 2013) – see Figure 4. In this project, participants were asked to experience the entire PPDAC cycle for themselves.

**Figure 4.** *Sample activity to improve CK, TCK, KCS, knowledge of content and curriculum (adapted from Eichler & Vogel, 2013; taken from Podworny et al., 2017)*

**Long jump of paper frogs – Do light paper frogs jump better than heavy ones?**

At the end of the year 4, there will be a competition between the classes in the paper long jump. The class 4a decides to take frogs of light paper (80g / m<sup>2</sup>), the class 4b tinkers frogs made of heavy paper (120g / m<sup>2</sup>). - What frogs are jumping better?



**Task 1** You should plan and carry out an experiment yourself (in groups of three), with which you can find out whether you would rather send a light or a heavy frog into the race. Put yourself in the role of students of grade 4 and carry out the above-described experiment. The following key questions / ideas can help you in your investigation:

- Write down your assumptions and justifications, which frog will jump the furthest.
- Plan the experiment: Tinker a paper frog of light weight and a heavy paper. Think about the role (jump, measure, record) in your experiment.
- Leading questions: How often should a test frog jump? How can you measure it?
- Enter your individual results in a data table in TinkerPlots.
- Guidance questions for evaluation: Which value of a test frog should be taken for assessment - mean value, highest value, medium value, most frequent value? How far do the values spread - does this influence your decision? How do you want to display the measured values?
- Collect the results of the whole class in TinkerPlots and compare the two frog species with TinkerPlots
- In the end decide what frog you want to send in the race and justify your decision.

**Task 2** Discuss the didactic-methodological value of this task and the implementation in classroom in primary school together. Here are some suggestions for discussion:

- Assess the feasibility of this task for the pupils. What prerequisites do pupils in primary school need to carry out this experiment?
- Assess this task with regard to the objectives and aims of your teaching.
- Which possible ways and argumentations of your students may arise?
- Which problems can arise during the work on this project?

In Task 1 of this project, the participants were asked to carry out the *Long jump of the paper frogs* project independently. This means that they go through all phases of the PPDAC cycle:

- (1) Denote their assumptions about which frog will jump the furthest (Problem phase).
- (2) Plan the experiment: Prepare paper frogs and think about possible measurement issues: How often should a frog jump? How can this be measured? (Planning phase).
- (3) Collect the data of each group and enter the data in TinkerPlots (Data phase).
- (4) Analyze the data with TinkerPlots (Analysis phase).
- (5) Decide which frog is better based on the data. (Conclusion phase).

**Table 1.** *Learning objectives, activities, and assessment in the course Stochastics and its didactics (adapted from Frischemeier et al., 2021)*

Learning objectives	Learning activities with TinkerPlots	Form of assessment
Plan, conduct, and evaluate statistical surveys with software support (CK, TCK).	Survey <i>Students' data set</i> , plan, create, collect data and evaluate w/o software in subtasks (Wild & Pfannkuch, 1999).	Component of the portfolio.
Create graphical representations (pie, column, and bar charts, pictograms, dot plots, histograms, box plots, scatter plots) for uni- and bivariate data w/o software, support and interpret them at the different stages according to CK, TCK, KCT (Friel et al., 2001)	Experience statistics according to the EIS principle (enactive, iconic, symbolic) on several levels (explorations in embodied cognition activities, data card activities, as well as a critical reflection on newspaper reports based on real data sets).	Presentation and discussion in small groups, Diagrams of the presentations as part of the portfolio. Creating graphical representations of given data without software support as part of an assignment in the exam.
Model, simulate and evaluate multi-stage random experiments with/without software (CK, TCK, horizon knowledge).	Manual simulation of random experiments, computer-assisted simulation of random experiments, e.g., for the task <i>Eye sum of the throw of two dice: 5 or 8?</i>	Documentation of the simulation as part of the portfolio. Modeling and evaluation of multi-stage random experiments without software as part of a task in the written exam.
Learn about and perform randomization tests as an introduction to statistical inference (CK, TCK, horizon knowledge).	Manual and computer-assisted randomization tests.	Documentation of the implementation as part of the portfolio. Interpret a randomization test as part of an assignment in the exam.
Know and reflect on didactic literature and textbooks on classroom management (KCS, knowledge of content, and curriculum).	Critical reading of articles from teaching practice, textbooks, and their reflection concerning possible (mis)conceptions.	Analysis as elaboration for the portfolio.
Link scientific content with concrete lesson planning (CK, TCK, KCS, knowledge of content and curriculum).	Experience distributional comparisons in a project, analyze data and reflect on results from a didactic point of view ( <i>Frogs</i> , Eichler & Vogel, 2013), conduct hypothesis tests experimentally with randomization tests.	Project reports as part of the portfolio.

All these components asked the participants to use their content and technological content knowledge so that the prospective teachers experience a statistical project and experiment for themselves. In the next step (task 2) the participants were then asked to reflect on the project from a didactical point of view and consider this project in the light of its didactic-methodological value and how this project can be realized in primary school classrooms. The four questions were supposed to enhance the pedagogical content knowledge and the content of knowledge and curriculum, for instance, the participants had to think about the prerequisites of primary school pupils, think about different objectives of the task, think of possible student ways and argumentation and anticipate possible problems students may have when working on the task.

### **Developing Statistical Reasoning with TinkerPlots (Seminar)**

*Developing statistical reasoning with TinkerPlots* is a one-semester seminar (15 weeks, 90 minutes each); we refer to the course of the winter term 2011/12 in which 22 prospective teachers for primary education participated. The seminar aims to deepen basic statistical content knowledge, especially in the area of data analysis. The seminar builds on the basic course *Stochastics and its didactics*. The design idea of the seminar is that the participants are involved in statistical project work. The course is structured along the five phases of the P P D A C cycle, see the design principles discussed earlier. The design ideas that were implemented in this course were the same as in the other course *Stochastics and its didactics*.

To promote discussion and collaborative work in the project phases, we introduced cooperative learning environments such as a *Think-pair-share* setting to support peer learning and feedback from peers and experts (Roseth et al., 2008). Participants first engage in a particular activity alone (think phase), then discuss their findings with peers (pair phase), and finally discuss their findings in class with an expert/teacher (share phase). The main objective of this seminar was to develop statistical content and technological content knowledge. Thematically, the course consists of four modules:

- Module 1: Generating statistical questions and problems, preparing data collection.
- Module 2: Introduction to univariate data analysis with TinkerPlots.
- Module 3: Bi- and multivariate data analysis with TinkerPlots.
- Module 4: Statistical report writing.

The activities were open, for example, participants were given a multivariate data set with open-ended subtasks to explore the data. The activity in Figure 5 and its exploration with TinkerPlots

was typical and representative of the tasks and activities in the whole seminar. The *Kinder Uni data set* is a multivariate and real data set with 28 variables on the leisure time activities of primary school pupils in Germany. First, the participants should familiarize themselves with the task and the data set, so the first sub-task is to consider which variables are taken into account. In step (ii), the participants are expected to develop an appropriate statistical question. With this question in mind, in step (iii) participants are asked to create suitable graphs in TinkerPlots, and in step (iv) to describe the plots and summarize their interpretation and results in a statistical report to answer the question in step (ii).

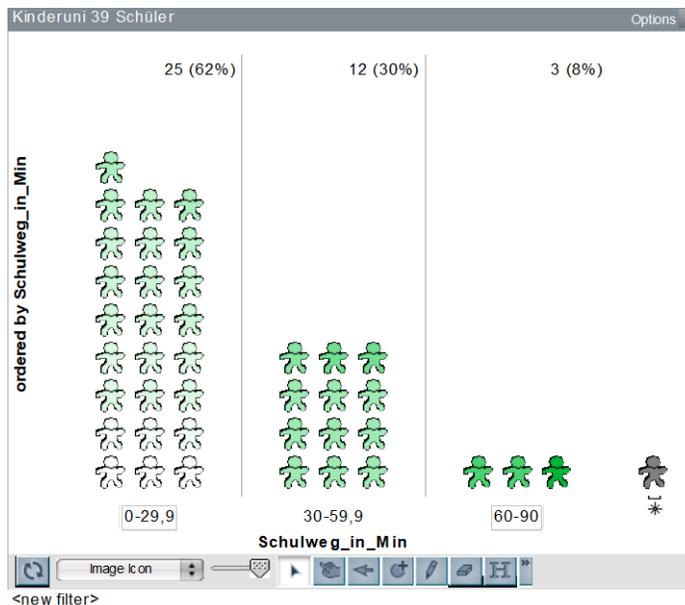
**Figure 5.** Task “KinderUni” is a typical statistical investigation task in Module 2

**„KinderUni“ task**

(i) Explore the dataset “KinderUni”. Which variables are taken into account?  
 (ii) Generate an appropriate statistical question!  
 (iii) Create suitable graphs in TinkerPlots, which help you to answer the statistical question posed in (ii). Take also further explorations into consideration!  
 (iv) Describe your TinkerPlots graphs created in (iii). Interpret them and summarize your findings in a statistical report.

Exemplary concerning the statistical question “How many kids have a way to the school of 30 or more minutes?”, some participants created the TinkerPlots graph displayed in Figure 6. For the description of the graph, the participants mentioned „We can see that 12+3 pupils have a way to the school of 30 minutes or more.“ This type of investigation task was designed to enhance participants’ statistical content and technological content knowledge.

**Figure 6.** Exemplary answer in the Task “KinderUni” with regard to the statistical question “How many kids have a way to the school of 30 or more minutes?”



Please note that this KinderUni task was described here from an exemplary point of view – there were further tasks that were similar to the KinderUni task and include the subtasks (i) to (iv).

## EVALUATION OF THE DIFFERENT COURSE SETTINGS

In the framework of design-based research, we collected data along two courses.

### Evaluation of the Course *Stochastics and its Didactics* (Lecture)

For the course *Stochastics and its didactics* in the summer semester of 2017 (Podworny et al., 2017), we evaluated the cognitive and affective issues of the 211 participants. On the one hand, we asked them to complete a pre-evaluation at the beginning and a post-evaluation at the end of the course; on the other hand, we analyzed the homework assignments of the prospective teachers that were part of their cumulative portfolios (Stratmann et al., 2009). In total, we collected 211 portfolios and rated the tasks with “+” if it was a good performance, “o” for acceptable, and “-” for poor performance. In Table 2, we show the distribution of the performance categories across the topics of the course.

**Table 2.** *Rating of homework in the cumulative portfolios (taken from Podworny et al., 2017)*

Topic	Rating		
	+	o	-
Data analysis	0.69	0.18	0.13
Combinatorics	0.73	0.06	0.21
Chance experiments	0.69	0.12	0.19
Total	0.70	0.14	0.16

The participants showed a positive performance, with more than two-thirds of the homework being rated as “+”, and 84% of homework activities were rated as good or acceptable (“+” or “o”). A further indicator of improvement in participants’ cognitive processes is their performance on the final test, which 191 out of 211 students passed (90.5%). From a different perspective, we collected data on participants’ affective components. The development of the rating of three exemplary items (“I feel competent to teach statistics in primary school”; “I think statistics is interesting”; and “I feel insecure when dealing with statistical problems”) are shown in Tables 3-5.

**Table 3.** *Evaluation of the item “I feel competent to teach statistics in primary school” – taken from Podworny et al. (2017)*

Item 1	Pretest	Posttest
Does not apply at all	19.58	0.96
Does not apply	48.68	7.69
Applies	28.57	72.12
Fully applies	3.17	19.23

**Table 4.** Evaluation of the item “I think statistics are interesting” – taken from Podworny et al. (2017)

Item 2	Pretest	Posttest
Does not apply at all	9.52	6.73
Does not apply	34.92	25.96
Applies	48.68	54.81
Fully applies	6.88	12.50

**Table 5.** Evaluation of the item “I feel unsure when dealing with statistical problems.” – taken from Podworny et al. (2017)

Item 3	Pretest	Posttest
Does not apply at all	2.65	7.69
Does not apply	42.33	58.65
Applies	43.92	28.85
Fully applies	11.11	4.81

With a look at tables 3, 4, and 5, we can conclude that we can observe in all three items a positive development of the affective components of our participants from pre- to post-evaluation.

Finally concerning our evaluation of the cumulative portfolios and the final exam we can say that the participants gained statistical content knowledge, pedagogical content knowledge, and technological content knowledge. In addition to this, the project work like the frog project proved to be a successful activity to enhance and develop the statistical content knowledge, pedagogical content knowledge, and technological content knowledge of the participants. Concerning the evaluation of the affective attitudes in the pre/post-comparison of the surveys, we can say that the attitudes of the participants concerning their self-efficacy, and their attitudes towards statistics and when dealing with statistical problems, developed from pre- to post-test in a positive way.

### Evaluation of Course Developing Statistical Reasoning with TinkerPlots (Seminar)

To get an impression of the development of statistical content and technological content knowledge of the participants over the different points in time of the course *Developing statistical Reasoning with TinkerPlots*, we evaluated the development of performance in the *KinderUni* activity as an example. This evaluation aimed to assess the quality of the statistical investigations. Due to a large amount of data, we used qualitative content analysis (Mayring, 2015). We decided to weigh subtasks (ii), (iii), and (iv) with a maximum of two points, as these tasks are fundamental for statistical investigations, while we only assigned one point to the simpler subtask (i).

The coding process is explicitly shown in Table 6. For subtask (i), one point is awarded if the variables of the *KinderUni* data set were described. If these variables were not described, 0 points were

awarded. For coding the quality of the statistical question (ii), the procedure was more complex. A maximum of two points were awarded if the question considered the relationship of two variables – a maximum of one point was awarded if the question contained one variable. According to further work from Biehler (2001) and Arnold (2013), different levels of quality can be identified for one-variable questions and two-variable questions. For example, one-variable questions which only ask for yes/no, do not necessarily lead to deep data explorations; this type is coded with 0.5 points. In contrast, one-variable questions that consider features of the distributions (as the median) are coded with 1 point.

**Table 6.** *Coding framework for KinderUni task adapted from Frischemeier & Biehler (2018)*

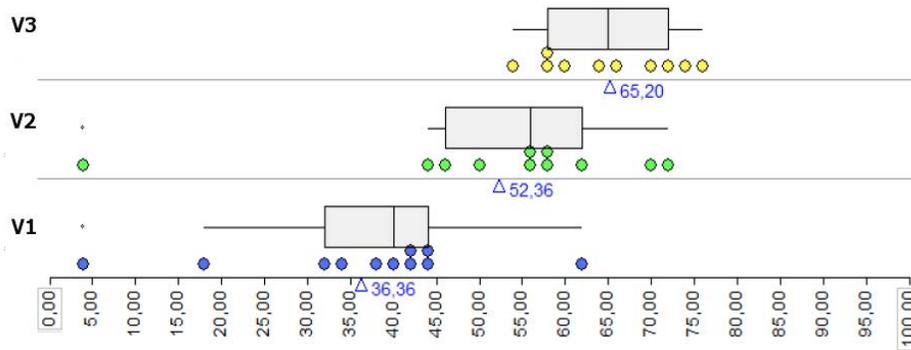
Subtask	Code	Rating points
(i)	subtask (i) done correctly	1
	... not done correctly	0
(ii)	one-variable-questions, which have just “yes” or “no” as the answer	0.5
	... that concern a characteristic of a distribution	1
	two-variable-question leading just to a “yes”/”no” – answer	1
	... leading to working out differences between the distributions	2
	... (open and complex)	2
(iii)	Informative TinkerPlots graph, stacked and further explorations	2
	..., stacked and no further explorations	1.5
	..., not stacked, and further explorations	1.5
	..., not stacked and no further explorations	1
	Non-informative TinkerPlots graph/missing graph	0
(iv)	Component of TinkerPlots graph described and question (ii) answered correctly	2
	... described and question (ii) not answered correctly	1
	... not described and question (ii) answered correctly	1
	... not described and question (ii) not answered correctly	0

A similar distinction applies to questions with two variables. For example, questions with two variables can also be asked as yes/no questions (“Is there a difference between boys and girls in the amount of time they spend using computers?”). These types of questions are rated with 1 out of 2 points. Although they offer an exploration of the relationship between two variables, a yes/no question does not lead to a sophisticated statistical investigation. Questions that are more open-ended and therefore lead to a more complex investigation, such as “In what ways does computer use differ between boys and girls?” or “What are the differences between boys and girls in terms of how they spend their free time?” are rated with 2 out of 2 points. For subtask (iii), participants were asked to

create graphs in TinkerPlots to help to answer their statistical questions. They were also encouraged to do further explorations. Here, participants got a maximum of 2 points if they created an informative graph that was stacked and if further exploration was done. In subtask (iv), participants were asked to describe and interpret their TinkerPlots graphs and summarize their findings in a report. If they described a component of the graph and answered a question (ii) like “How many kids have a way to the school of 30 or more minutes?” with a statement like “We can see that 12+3 pupils have a way to the school of 30 minutes and more” 2 out of 2 points were awarded. For more details on coding, see Table 6 and Frischemeier and Biehler (2018).

We coded the written statistical reports of our participants’ *KinderUni* task in different phases: In the “think” phase, all pairs first worked on the activity alone and produced the preliminary version of the report. Then two pairs came together, discussed the products, and gave feedback: Pair 1 gave feedback on Pair 2’s statistical report and vice versa. After this phase, the pairs had time to revise and improve their reports. Finally, all pairs presented their reports in the plenary, where their results were discussed and the teacher gave expert feedback on each statistical report. After this feedback phase, participants were again asked to revise and improve their reports to produce a final version. For our data analysis, we evaluated the preliminary versions of the statistical reports (V1,  $n=11$  documents), the versions of the reports after peer feedback (V2,  $n=11$  documents), and the versions after expert feedback (V3,  $n=10$  documents). The development of the quality of the performance on the *KinderUni* task is shown in Figure 7.

In Figure 7, we see a positive development in the course *Developing statistical reasoning with TinkerPlots*. In the initial version of the statistical report, participants gain 36% of the maximum points (8) on average, after peer feedback, the quality of the reports improved to 52%, and after peer- and expert feedback, participants achieved 65% of the maximum points on average. Looking at the different areas (i)-(iv), it is noticeable that especially the quality of the statistical questions (task-component (ii)) remained quite stable over time. Feedback did not seem to be effective in improving the quality of the statistical questions. However, the qualities of statistical questions are fundamental and a prerequisite to sophisticated data analysis. As a consequence of the findings of this study, we have developed materials and teaching-learning arrangements to support learners (and teachers) in developing statistical questions (Frischemeier & Leavy, 2020). These insights should be taken into account for future courses.

**Figure 7.** *Success rates of the statistical investigations in stages V1 to V3 (Frischemeier & Biehler, 2018)*

### SUMMARY & CONCLUSIONS

As important findings, we can state that the fundamental design ideas we used throughout this chapter proved to help developing the different facets of knowledge for prospective primary teachers. Especially the following design principles which were implemented in both courses proved to be helpful and could and should be realized in future courses: (a) Implementation of the PPDAC cycle; (b) focusing on fundamental ideas in statistics like data, representation and variability; (c) The use of real and motivating data (survey data like KinderUni data on leisure time and media activities, experimental data like Frog data); (d) The use of digital tools (TinkerPlots); (e) The implementation of collaborative work and peer feedback (feedback and support are necessary), and (f) Formative assessment (e.g., in form of a cumulative portfolio). The activities we introduced in this chapter like the frog project or the statistical investigation task (KinderUni task) proved to be helpful and can be used or adapted for other course settings to develop the different knowledge facets for preservice teachers. In addition to that also evaluation instruments like the coding manual in table 6 can be used for further teaching or research issues to evaluate the products of learners when working on statistical investigation tasks.

Specifically to the teaching methods used in the courses, we can say that peer- and expert feedback could improve and develop statistical content knowledge, pedagogical content knowledge, and technological content knowledge concerning creating (w/o TinkerPlots), describing and interpreting statistical displays. Statistical questions and their quality have an important role in a deep and elaborated data exploration. As it could be shown in our exploratory evaluation, it was difficult to improve the quality of statistical questions with peer and expert feedback. Therefore in courses in the future, there has to be an emphasis on the development of the quality of statistical questions. TinkerPlots proved to be an adequate digital tool for teachers to gain statistical content knowledge

and technological content knowledge and to support the teachers to learn about data exploration with digital tools. Especially they were engaged to explore large and multivariate data, experiencing the process of creating statistical displays (e.g., bar graphs) using the TinkerPlots operations separate, stack and order, and easily change between different statistical representations.

Although the courses in statistics teaching for prospective teacher education are related to a specific background (university) and country (Germany), the results of our analysis and the ideas presented can be generalized and helpful for other purposes. Many of the design ideas implemented in the courses described in this chapter can be applied at the primary level to enrich statistics courses for prospective teachers in general, and can even be adapted for other purposes and course environments. The courses cannot be compared, because they differ in their origin, setting, and intention. Nevertheless, we hope to provide the reader with useful ideas, activities, and evaluation schemes for pre-service teacher training courses in statistics.

### ACKNOWLEDGMENTS

I am very grateful to Audy Salcedo and Danilo Diaz-Levicoy for inviting me to contribute this chapter to this important book. Furthermore, I thank Audy and Danilo so much for their very helpful and constructive comments and feedback on this manuscript.

### REFERENCES

- Arnold, P. M. (2013). *Statistical investigative questions - An enquiry into posing and answering investigative questions from existing data*. <https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/21305>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0>
- Ben-Zvi, D. (2018). Foreword. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education* (pp. vii-viii). Springer.
- Biehler, R. (1997). Software for Learning and for Doing Statistics. *International Statistical Review*, 65(2), 167-189.
- Biehler, R. (2001). Statistische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern - Konzepte und Ergebnisse empirischer Studien am Beispiel des Vergleichens empirischer Verteilungen. In M. Borovcnik, J. Engel, & D. Wickmann (Eds.), *Anregungen zum Stochastikunterricht* (pp. 97-114). Franz Becker.
- Biehler, R. (2007, August 2007). Assessing students' statistical competence by means of written reports and project work IASE Satellite Conference on Assessing Student Learning in Statistics, Guimaraes, Portugal. <https://doi.org/10.52041/SRAP.07601>

- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technology for Enhancing Statistical Reasoning at the School Level. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K.-S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-689). Springer Science + Business Media. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2\\_21](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_21)
- Biggs, J. B. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. *Higher education*, 32(3), 347-364. <https://doi.org/10.1007/BF00138871>
- Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_10](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10)
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Eichler, A., & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall* (2 ed.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-00118-6>
- Engel, J. (2007). Daten im Mathematikunterricht: Wozu? Welche? Woher? *Der Mathematikunterricht*, 53(3), 12-22.
- Engel, J. (2017). Statistical Literacy for active Citizenship: A Call for Data Science Education. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 44-49. <https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.213>
- Franzis, G. (2005). An Approach to Report writing in statistics courses. IASE/ISISatellite Conference on Statistics Education, Sydney, New South Wales, Australia. <https://doi.org/10.52041/SRAP.05104>
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158. <https://doi.org/10.2307/749671>
- Frischemeier, D. (2017). *Statistisch denken und forschen lernen mit der Software TinkerPlots*. Springer Fachmedien Wiesbaden. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-15323-6\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-15323-6_1)
- Frischemeier, D., & Biehler, R. (2018). Stepwise development of statistical literacy and thinking in a statistics course for elementary preservice teachers. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 756-763). DCU Institute of Education and ERME.
- Frischemeier, D., & Leavy, A. (2020). Improving the quality of statistical questions posed for group comparison situations. *Teaching Statistics*, 42(2), 58-65. <https://doi.org/10.1111/test.12222>
- Frischemeier, D., & Schnell, S. (2021). Statistical investigations in primary school—the role of contextual expectations for data analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 1-26.
- Frischemeier, D., Podworny, S., & Biehler, R. (2021). Integration fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Komponenten in Form von Schnittstellenaktivitäten in der Lehramtsausbildung Mathematik Primarstufe am Beispiel einer Veranstaltung zur Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ mit Unterstützung durch digitale Werkzeuge. In R. Biehler, A. Eichler, R. Hochmuth, S. Rach, & N. Schaper (Hrsg.), *Lebrinnovationen in der Hochschulmathematik* (S. 227-250). Wiesbaden: Springer Spektrum. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-62854-6\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-662-62854-6_11)

- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning. Connecting Research and Teaching Practice*. Springer.
- Hasemann, K., & Mirwald, E. (2012). Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer, & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (pp. 141-161). Cornelsen Scriptor.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0372>
- Konold, C., & Miller, C. (2011). *TinkerPlots 2.0*. In Key Curriculum Press.
- Leavy, A., & Hourigan, M. (2018). The role of perceptual similarity, context, and situation when selecting attributes: considerations made by 5-6-year-olds in data modeling environments. *Educational Studies in Mathematics*, 97(2), 163-183. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9791-2>
- Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Papanastasiou, E. (2018). *Statistics in Early Childhood and Primary Education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7>
- Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: theoretical background and procedures. In A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 365-380). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13)
- Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *The Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Podworny, S., Frischmeier, D., & Biehler, R. (2017). Design, Realization and Evaluation of a statistics course for preservice teachers for primary school in Germany. In A. Molnar (Ed.), *LASE Satellite Conference 2017: Teaching Statistics in a Data Rich World*. IASE. <https://doi.org/10.52041/SRAP.17309>
- Pratt, D., Davies, N., & Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 97-107). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_13](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_13)
- Roseth, C. J., Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2008). Collaboration in learning and teaching statistics. *Journal of statistics education*, 16(1), 1-15. <https://doi.org/10.1080/10691898.2008.11889557>
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stratmann, J., Preussler, A., & Kerres, M. (2009). Lernerfolg und Kompetenz: Didaktische Potenziale der Portfolio-Methode im Hochschulstudium. *Zeitschrift für Hochschulentwicklung*, 4(1), 90-103. <https://doi.org/10.3217/zfhe-4-01/07>
- Van Boxtel, C., Van der Linden, J., & Kanselaar, G. (2000). Collaborative learning tasks and the elaboration of conceptual knowledge. *Learning and instruction*, 10(4), 311-330. [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(00\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(00)00002-5)

Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps*. Springer Fachmedien: Wiesbaden.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-19067-5>

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

## **IDEAS PARA DISEÑAR LA FORMACIÓN DOCENTE PRIMARIA PARA LA ENSEÑANZA DE ESTADÍSTICAS - PERSPECTIVAS EXPLORATORIAS DE ALEMANIA**

### **RESUMEN**

Este capítulo informa sobre dos cursos diferentes para la formación de futuros profesores de primaria en educación estadística en Alemania. Estos cursos requieren ideas de diseño específicas para formar el pensamiento estadístico de los futuros profesores y prepararlos para la enseñanza en clase. Estos principios de diseño incluyen el uso de herramientas digitales, datos reales, aprendizaje basado en proyectos, vinculación de contenidos y conocimientos pedagógicos, etc. En este capítulo se presentan los diferentes conceptos en los que se basan estos cursos y su justificación. Tenga en cuenta que los dos cursos presentados en este capítulo no son comparables. Además, se supone que estos dos cursos muestran cómo y de qué manera se puede llevar a cabo la educación de los profesores de primaria (qué ideas de diseño, qué actividades, qué formas de evaluación) en las estadísticas.

Palabras clave: Pensamiento estadístico temprano, ideas de diseño, formación de profesores (pre-servicio), TinkerPlots.

## **IDEIAS DE PROJETO PARA A EDUCAÇÃO PRIMÁRIA DE PROFESSORES PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA - INSIGHTS EXPLORATÓRIOS DA ALEMANHA**

### **RESUMO**

Este capítulo relata dois cursos diferentes para a educação de futuros professores do ensino primário em estatística na Alemanha. Tais cursos requerem ideias de concepção específicas para moldar o pensamento estatístico nos futuros professores e para os preparar para o ensino na aula. Estes princípios de concepção incluem a utilização de ferramentas digitais, dados reais, aprendizagem baseada em projectos, ligação de conteúdos e conhecimentos pedagógicos de tendas, etc. Os diferentes conceitos por detrás destes cursos e a sua fundamentação são apresentados neste capítulo. É de notar que estes dois cursos apresentados neste capítulo não são supostos serem comparáveis. Além disso, estes dois cursos devem mostrar como e de que forma a formação de professores primários (que ideias de concepção, que actividades, que formas de avaliação) em estatística pode ser realizada.

Palavras-chave: Pensamento estatístico precoce, ideias de concepção, (pré-serviço) formação de professores, TinkerPlots

DANIEL FRISCHEMEIER  
*University of Münster, Germany*  
[dfrische@uni-muenster.de](mailto:dfrische@uni-muenster.de)

<https://orcid.org/0000-0002-8957-7660>

Daniel Frischemeier (born 1984) has been working in the field of mathematics and statistics education since 2009. He received his Ph.D. degree in mathematics education at the University of Paderborn in 2016. Since 2021 he is an associate professor for mathematics education at the primary level at the University of Münster. His major research interests concentrate on the development of statistical reasoning and thinking of learners from different age levels ranging from primary school to tertiary

education. Fundamental aspects of his research focus on the use of digital tools in statistics education and data science education.



# LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN LOS CURRÍCULOS DE INFANTIL Y PRIMARIA: IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

CLAUDIA VÁSQUEZ  
ÁNGEL ALSINA

## RESUMEN

En este estudio se caracteriza cómo las orientaciones curriculares abordan la estadística y la probabilidad en Educación Infantil y Educación Primaria. Para ello, en primer lugar, se analiza la presencia explícita de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares de dos países (Chile y España); en segundo lugar, se examina el sentido que se otorga a su enseñanza y aprendizaje; y, por último, las implicaciones que ello conlleva para la formación del profesorado que se desempeñará en estos niveles educativos. Los resultados muestran, en el caso de la Educación Infantil, una nula presencia de los contenidos vinculados al estudio de la estadística y la probabilidad. Por su parte, en Educación Primaria, la presencia de este bloque de contenido es levemente mayor, sin embargo, es baja en comparación con otros ejes de contenidos. En consecuencia, una implicación directa es que el profesorado otorgue realce a la estadística y la probabilidad en el proceso de enseñanza, aún más considerando su rol protagonista en el desarrollo de habilidades para el siglo XXI. Para ello, es necesario que el profesorado diseñe tareas enfocadas en la comprensión conceptual por sobre de lo procedimental.

Palabras clave: Educación Estocástica; Educación Infantil; Educación Primaria; Currículo.

## INTRODUCCIÓN

La incorporación de contenidos vinculados al estudio de la estadística y de la probabilidad en los planes de estudio de la matemática escolar de la Educación Secundaria goza de larga data y se remonta, por ejemplo, en el caso de los Estados Unidos, al año 1923 cuando el *National Committee on Mathematical Requirements of the Mathematical Association of America* recomienda por primera vez el estudio de la estadística en los grados 7-12 en *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education* (MAA, 1923). Desde entonces, numerosos países han optado por incorporar temáticas vinculadas a la estadística y la probabilidad en sus currículos, principalmente en los currículos de la etapa de Educación Secundaria. No obstante, a finales de la década de los 80 del siglo pasado se observa un punto de inflexión, dado que el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (*National Council Teachers of Mathematics* [NCTM]), hace notar la necesidad de que los estudiantes de los Vázquez, C. y Alsina, Á. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria: implicaciones para la formación del profesorado. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 189-214). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

grados K-12 (4-16 años) comprendan el sentido de los datos y, de este modo, favorecer el desarrollo de su conciencia social (NCTM, 1989). Para ello, proponen abordar temas de estadística y probabilidad como un eje de contenidos. Algunos años más tarde este planteamiento se ve reforzado en los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2003), adelantando el estudio de la estadística y la probabilidad desde los 3 años. En estas orientaciones se recomienda el desarrollo de conceptos y procedimientos que vayan siendo cada vez más complejos, y de este modo garantizar que al finalizar la escolaridad los estudiantes cuenten con un conocimiento sólido tanto de la estadística elemental como de las nociones básicas de la probabilidad. Con dicho propósito se plantean un conjunto de estándares de contenido que contemplan el desarrollo de las siguientes fases a lo largo de los distintos niveles educativos: “formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas; seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos; desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos; y comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad” (NCTM, 2003, p. 51). Sin duda, estos lineamientos han influido fuertemente en los currículos de diversos países, provocando que el estudio de la estadística y la probabilidad vaya ganando terreno en los currículos de Educación Matemática desde edades tempranas (Vásquez y Cabrera, 2022).

No obstante, la enseñanza de estos temas sigue constituyendo un reto para el profesorado, especialmente para aquellos que se desempeñan en los niveles de Educación Infantil y Educación Primaria, quienes, en muchos casos, no han recibido preparación durante su formación inicial para enseñar estos temas y, por tanto, muchas veces evitan su enseñanza o bien la sitúan como uno de los últimos temas a tratar, lo que claramente es un obstáculo y resta significado, desencadenando que en muchas ocasiones su enseñanza se centre en lo algorítmico (Vásquez y Alsina, 2021). Por consiguiente, es importante prestar atención a la investigación desarrollada en el área, en especial, aquella vinculada directamente al aula escolar, pues estas investigaciones son todavía escasas y poco se conoce respecto de cómo abordar la enseñanza de la estadística y de la probabilidad en los distintos niveles educativos.

En tal dirección, cobran especial importancia las orientaciones curriculares, pues éstas enmarcan el conocimiento del profesorado. Esto ha provocado que el estudio del currículo de matemáticas a nivel escolar se consolide como una línea de investigación en Educación Matemática (Reys et al., 2010). Por otro lado, la interpretación que realiza el profesorado del currículo impacta en sus prácticas de enseñanza y en su desarrollo profesional (Choppin et al., 2018).

En consideración a lo anteriormente expuesto, por medio de este estudio se busca caracterizar el contenido de estadística y probabilidad (sentido estocástico) propuesto por las actuales orientaciones

curriculares de Chile y España para la Educación Infantil y la Educación Primaria. Lo anterior, con la finalidad de dar luz respecto de cómo abordar la enseñanza de la estadística y la probabilidad, e informar acerca de cuestiones imprescindibles para una enseñanza eficaz, por ejemplo: ¿cómo llevar al aula escolar de primaria el estudio de la estadística y la probabilidad? ¿cuáles son las grandes ideas generadoras de aprendizaje en los temas de estadística y probabilidad en Educación Infantil y Primaria? y ¿cómo evolucionan estas ideas? Para alcanzar el objetivo planteado, en primer lugar, se analiza la presencia de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares de los países antes indicados. Luego, se explora el sentido propuesto para su enseñanza y, por último, se estudian las ideas fundamentales de la estocástica (Burrill y Biehler, 2011) presentes ya sea explícita o subyacentemente en tales orientaciones curriculares.

### **EL SENTIDO ESTOCÁSTICO Y LAS IDEAS FUNDAMENTALES DE LA ESTOCÁSTICA**

Uno de los grandes desafíos involucrados en el estudio de la estadística y la probabilidad en el aula escolar es facilitar que los estudiantes adquieran una comprensión profunda del sentido estocástico, entendido como aquel que “expresa un uso acertado de las nociones de la estadística y la probabilidad para abordar situaciones de incertidumbre. Se centra en formular preguntas para después recoger, organizar y presentar datos de diversa índole. Está relacionado con utilizar y validar métodos con los que analizar esos datos... En general, conlleva la interpretación crítica y el análisis de la información y la capacidad para desenvolverse en situaciones de incertidumbre con rigor y objetividad, para poder tomar decisiones y explicarlas” (Muñoz y Murcia, 2015, p. 7). Ello con el propósito de que los estudiantes desarrollen los conocimientos y habilidades que les permitan interpretar y valorar críticamente los datos para una toma de decisiones fundamentada; y, al mismo tiempo, favorecer la comprensión de fenómenos aleatorios en contextos cotidianos. Por consiguiente, es de gran importancia sentar las bases para la adquisición del sentido estocástico en las edades tempranas. A pesar de ello, las investigaciones en torno a la estadística, la probabilidad y su enseñanza, se centran mayoritariamente en estudiantes de Educación Primaria y Educación Secundaria, siendo escasas aquellas respecto de experiencias de enseñanza de la estadística y probabilidad en infantil y en los primeros cursos de Educación Primaria (Vásquez y Alsina, 2016). Sin embargo, gran parte de tales investigaciones indican que los niños de infantil, pese a su corta edad, cuentan con ideas intuitivas asociadas a conceptos fundamentales de estadística y probabilidad (Alsina, 2012; Shaughnessy, 1992; Vásquez y Alsina, 2019). Ideas que les servirán de base para, poco a poco, alcanzar un aprendizaje formal de tales conceptos en los niveles superiores. Por tanto, resulta de especial interés identificar

aquellas ideas vinculadas a la estadística y la probabilidad que deberían abordarse con distintos grados de profundidad desde las primeras edades. Aún más si consideramos que estas debieran “enseñarse en las matemáticas escolares y todo alumno debería conocerlas al salir de la escuela secundaria” (Burrill y Biehler, 2011, p. 58). Se hace necesario pues, llevar su enseñanza al aula escolar de manera tal que los niños adquieran progresivamente una comprensión en profundidad de nociones y conceptos asociados a su estudio, en pos de desarrollar una alfabetización estadística y probabilística (Gal, 2002, 2005, 2012). En este sentido, es necesario indagar en la presencia de estas ideas en los currículos de Educación Infantil y Educación Primaria y, más específicamente, en cómo éstas se desarrollan y profundizan a lo largo del currículo escolar en tales niveles educativos. Las ideas fundamentales de la estocástica han sido estudiadas por diversos autores (e.g. Batanero y Borovnick, 2016; Burrill y Biehler, 2011), identificando conjuntos de ideas en relación con la estadística y la probabilidad. Este estudio se sitúa desde la perspectiva de Burrill y Biehler (2011), quienes consideran a las ideas de: datos, variación, distribución, representación de datos, asociación y correlación, probabilidad, muestreo e inferencia, como fundamentales para llevar a cabo procesos de instrucción idóneos en relación con la estadística y la probabilidad.

**Datos.** De acuerdo con Moore (1991) la estadística es la ciencia de los datos cuyo propósito es el razonamiento a partir de los datos empíricos, donde el contexto desempeña un rol fundamental, pues “la estadística requiere de una forma diferente de pensar, porque los datos no son sólo números, ellos son números en un contexto. En matemáticas el contexto oscurece la estructura. En análisis de datos, el contexto proporciona significado” (Moore y Cobb, 1997, p. 801). Por tanto, es importante que los estudiantes trabajen con datos provenientes de situaciones reales, que frecuentemente requieren de interpretaciones y razonamientos de alto nivel (Batanero et al., 2013).

**Variación.** Es una idea característica de la estadística, cuyo propósito es cuantificar, controlar y predecir la variabilidad (Batanero et al., 2011); estudiándose tanto el modelo como los residuos (Engel y Sedlmeier, 2011). En este sentido, es importante que los estudiantes perciban la variabilidad de los datos, de los resultados de un experimento aleatorio, en una variable aleatoria en las muestras o distribución muestral, de manera que manejen modelos que permitan controlarla y predecirla (Reading y Shaughnessy, 2004).

**Distribución.** La enseñanza de la estadística se debe centrar en el desarrollo de la capacidad de leer, analizar, criticar y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos (Shaughnessy, 2007). De acuerdo con Bakker y Gravemeijer (2004), la idea de tratar de describir y predecir propiedades de

los agregados de datos y no de cada dato aislado constituye una característica esencial del análisis estadístico.

**Representación de datos.** Al revisar diversos medios de comunicación podemos observar que la información se está comunicando principalmente a través de tablas y gráficos estadísticos que buscan presentar de manera rápida los datos. Por tanto, es importante considerar la transnumeración (Pfannkuch y Wild, 2004), componente del razonamiento estadístico, que consiste en obtener nueva información respecto de las características de un conjunto de datos a partir del uso de diferentes gráficos o representaciones que permitan identificar diferentes aspectos de los mismos datos. Este proceso implica una transformación de los datos recolectados en diversas representaciones con el fin de promover la comprensión de una situación real.

**Asociación y correlación entre dos variables.** Este es un concepto importante para la toma de decisiones, frente al cual es necesario educar, pues no se alcanza de manera espontánea (Estepa, 2004). A partir de tales conceptos es posible explorar la naturaleza de las relaciones entre variables estadística tanto para datos categóricos como numéricos, incluyendo a la regresión para modelar asociaciones estadísticas (Engel y Sedlemeier, 2011).

**Probabilidad.** Es una herramienta esencial para el desarrollo de conceptos estadísticos y de la estadística inferencial (NCTM, 2003). Así, en el estudio de la probabilidad, es importante destacar y diferenciar su uso como un modelo matemático para predecir el comportamiento en situaciones aleatorias y su uso como herramienta para el razonamiento estadístico. Cabe señalar que, como indica Batanero (2005), la probabilidad tiene un significado polifacético que no se limita a una única perspectiva, sino que es imprescindible abordarla desde su conjunto de significados: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático, que conforman la Teoría de la Probabilidad (Batanero, 2005). Estos significados están relacionados dialécticamente, ya que la probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad.

**Muestreo e inferencia.** Nos permiten explorar la relación entre las características de las muestras con las de la población, a fin de considerar qué datos y cómo recopilarlos hasta extraer conclusiones con un cierto grado de certeza (Harradine et al., 2011). De acuerdo con Batanero et al. (2013), es en la Educación Secundaria cuando es posible una aproximación a una comprensión informal de la inferencia. Esto se alcanzaría por medio de la discriminación entre la posición central y variabilidad en las distribuciones de datos, y el uso de estas dos características para decidir cuándo dos distribuciones son iguales o diferentes (Rubin et al., 2006).

## La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria: implicaciones para la formación del profesorado

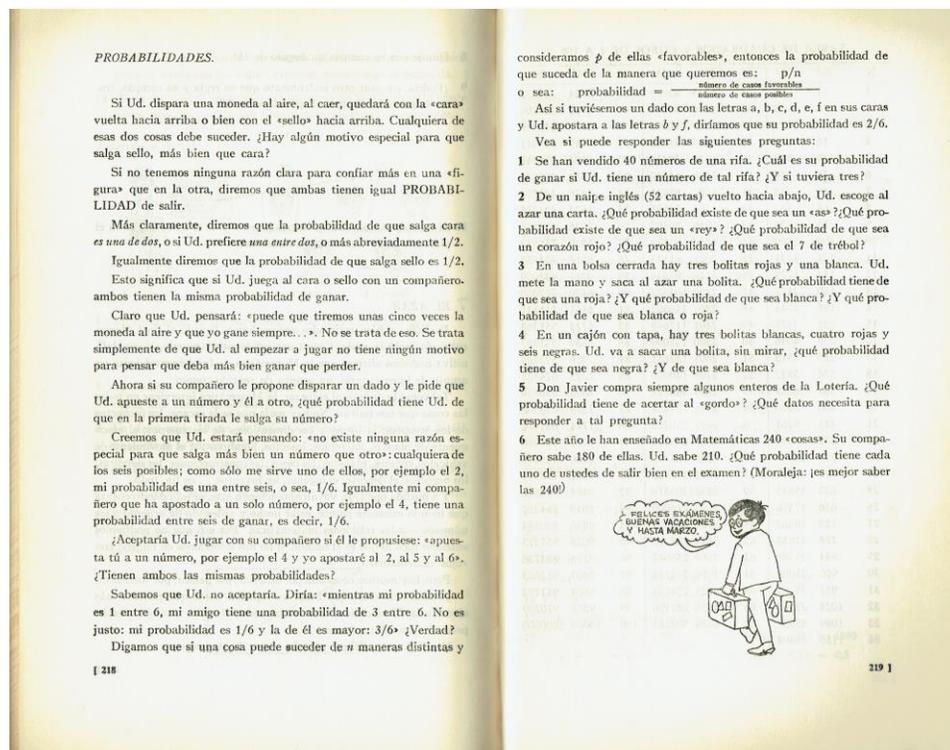
Por consiguiente, es importante que los profesores conozcan y comprendan estas ideas, para poder transmitir las adecuadamente en los procesos de instrucción (Burrill y Biehler, 2011). Tales ideas deberán constituirse en un tejido de significancia que se inicia en edades tempranas, y que transcurre y se profundiza gradualmente en los distintos cursos en pos de desarrollar la alfabetización estadística y probabilística, el pilar fundamental para el desarrollo del sentido estocástico.

### LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN LOS CURRÍCULOS DE EDUCACIÓN INFANTIL Y EDUCACIÓN PRIMARIA DE CHILE Y ESPAÑA

Los países de habla hispana no han sido ajenos al desafío de incorporar el estudio de la estadística y la probabilidad desde temprana edad y la inclusión de temas vinculados a la estadística y la probabilidad en el currículo escolar de matemáticas.

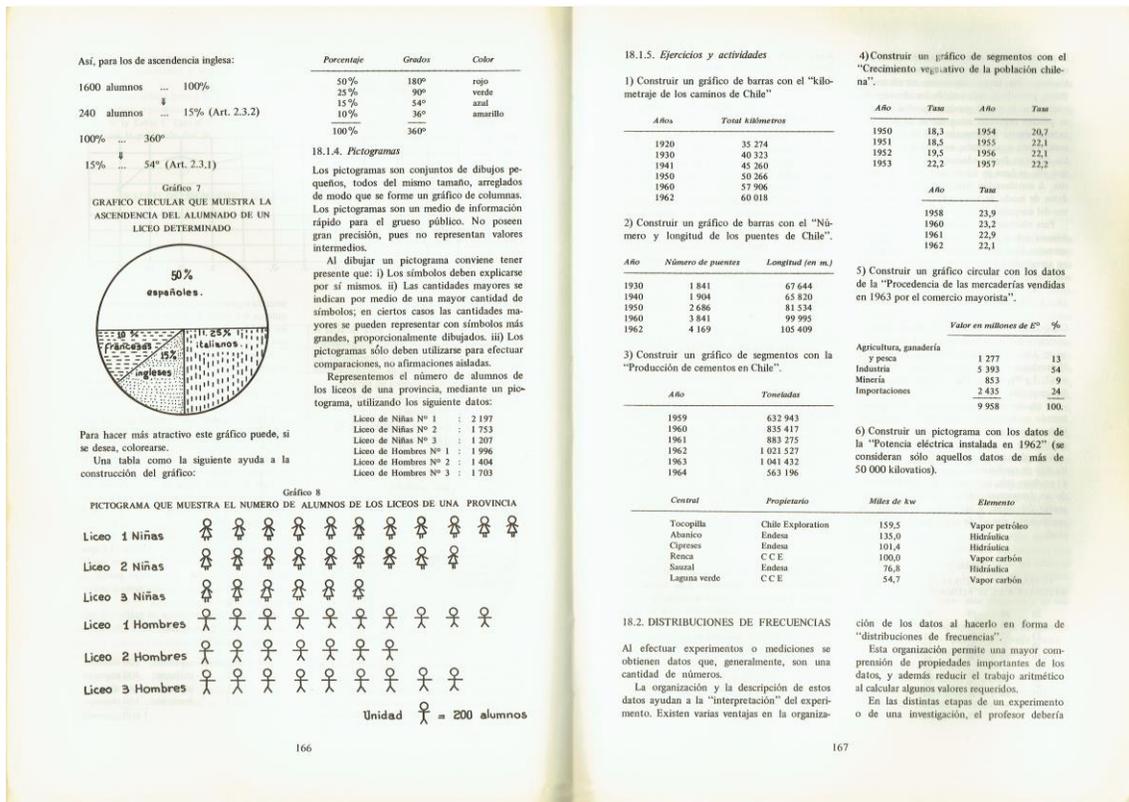
En el caso de Chile, esta tendencia se viene observando al menos desde mediados de la década de los 60: tanto en los programas de estudio como en los libros de texto de los últimos cursos de Educación Primaria de aquella época, es posible encontrar actividades relacionadas con el estudio de promedios de datos, gráficos de barras, pictogramas, azar y probabilidades, entre otros, como se puede observar, por ejemplo, en las Figuras 1 y 2.

Figura 1. Actividades cálculo de probabilidades



Fuente: Villalobos y Parra (1963)

Figura 2. Actividades gráficas y distribuciones de frecuencias



Fuente: Cortés (1970)

Con posterioridad, en la década de los 80 se promulga el Decreto 4002 con fuerza de Ley que fija nuevos objetivos, planes y programas para la Educación Primaria, especificando para la asignatura de matemática que los estudiantes del 2º ciclo de Educación Primaria (10-14 años), deben conocer y aplicar elementos de estadística descriptiva. Luego, en el año 1996, a partir del Decreto 40 de la Ley Nº 18.962 Orgánica Constitucional de Enseñanza, se modifican los objetivos y contenidos para la Educación Primaria. Y, en el caso de la asignatura de matemática, se propone una agrupación de los contenidos que giran en torno a cuatro ejes temáticos: números, operaciones aritméticas, formas y espacio, y resolución de problemas. Es en el eje de números que encontramos el subtema llamado "tratamiento de la información" el cual está presente desde los 8 años. Así, a través de este subtema se pretende que los estudiantes recolecten, interpreten y analicen datos provenientes de situaciones del entorno local, regional y nacional y comuniquen sus resultados por medio de la comparación de datos, promedios y valor más frecuente y medidas de tendencia central, además de utilizar distintos tipos de representaciones estadísticas como tablas de frecuencias relativas, y gráficos circulares entre otras.

En el año 2002, se modifican los objetivos y contenidos para la asignatura de matemática, incluyendo para el 3º y 4º grado la interpretación y organización numérica en tablas y gráficos de barras, para que luego los estudiantes de los cursos superiores se centren en el aprendizaje de diversas temáticas vinculadas a la estadística, por ejemplo: medidas de tendencia central, tablas y gráficos estadísticos.

Más recientemente, en el año 2009, se realiza un ajuste al currículo, el cual organiza la asignatura de matemática en torno a los ejes curriculares de: números, álgebra, geometría y datos y azar. Así, a través de este último eje, por primera vez, la estadística y la probabilidad es situada en el currículo al mismo nivel de importancia que los otros temas, con el propósito de introducir a los estudiantes en el tratamiento de datos y modelos para el razonamiento en situaciones de incerteza. Para ello, se plantea abordar temas de estadística desde los 6 años (recolección, interpretación y análisis de datos) y temas de probabilidad desde los 10 años (uso de lenguaje asociado a la probabilidad, experimentos aleatorios, cálculo de probabilidades).

Consecutivamente, con el propósito de adaptar el currículo a los requerimientos del mundo actual, se definen las actuales Bases Curriculares para la Educación Parvularia (MINEDUC, 2018) y las Bases Curriculares para la Educación Básica (MINEDUC, 2012, 2016), que señalan los contenidos a enseñar en los niveles de infantil y primaria respectivamente. En el caso del currículo de matemática para la Educación Infantil (MINEDUC, 2018), si bien no se señala explícitamente el estudio de la estadística y la probabilidad, es posible identificar objetivos de aprendizaje ligados a la comprensión del número que, de una u otra manera, sientan las bases para la construcción de algunas de sus nociones básicas (Vásquez et al., 2018), tales como: el recuento de objetos, la organización de los datos para clasificarlos, compararlos y representarlos; o bien, cuando emplean cuantificadores (*más que, menos que, igual que*), al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas. Ello con el propósito de que “empiecen a desarrollar progresivamente los primeros conocimientos para interpretar los datos de manera crítica y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, que son habilidades imprescindibles para los ciudadanos del siglo XXI” (Alsina, 2022, p. 181).

En lo que respecta al currículo de matemática para la Educación Primaria, se observa que, a través del eje de contenido de datos y probabilidades, se aborda el estudio de estos temas de manera articulada, gradual y continua desde los 6 años, con la finalidad de que “todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades” (MINEDUC, 2012, p. 5).

En concreto, a partir de esta breve cronología, podemos evidenciar que, en el caso de la Educación Primaria, el estudio de la estadística y la probabilidad ha estado presente en currículo escolar chileno de matemática desde hace varias décadas.

Todo ello con el propósito de que los estudiantes al finalizar su etapa escolar cuenten con las competencias necesarias para desenvolverse como ciudadanos críticos, tanto en el mundo laboral, cotidiano y en la universidad.

En el caso de España, la estadística se introduce de manera explícita en el currículum de Educación Primaria en el marco de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE), de 3 de octubre de 1990, con un bloque de contenidos denominado “Organización de la información”, mientras que la probabilidad no se incorpora hasta 2006, con la Ley Orgánica de Educación (LOE) 2/2006, de 3 de mayo, dentro de un bloque de contenidos denominado “Tratamiento de la información, azar y probabilidad”. Anteriormente a estas leyes, en las Orientaciones Pedagógicas de 1970 se habían introducido algunas cuestiones muy puntuales como por ejemplo “la capacidad de representación gráfica”, aunque “las nociones de estadística” se situaban a partir de los 12-13 años (MEC, 1970); en los Programas Renovados de 1980 se introduce la estadística descriptiva a partir de los 11-12 años: en concreto, se afianza el estudio, clasificación y agrupación de datos estadísticos para confeccionar tablas y la interpretación de gráficos, dada la utilidad que tiene la estadística descriptiva para el estudio de fenómenos y su cuantificación. Adicionalmente, se empiezan a estudiar las medidas más conocidas de tendencia central y de dispersión, aplicándolas al estudio de fenómenos estadísticos de una variable (Casellas Beltrán et al., 1981). Después de estos primeros intentos de incorporar conocimientos de estadística y probabilidad en primaria, como se ha indicado, progresivamente se va ampliando su presencia hasta llegar a la actualidad. En el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de Educación Primaria, la estadística y la probabilidad se presentan como un cuerpo cohesionado de conocimientos, dentro del bloque “sentido estocástico”. Acerca de este sentido, se indica que “se orienta hacia el razonamiento y la interpretación de datos y la valoración crítica, así como la toma de decisiones a partir de información estadística. También comprende los saberes vinculados con la comprensión y la comunicación de fenómenos aleatorios en situaciones de la vida cotidiana” (MEFP, 2022a, p. 93). Así, pues, el foco se pone en llevar a cabo investigaciones estadísticas básicas (formulación de cuestiones que pueden responderse mediante datos, recolectarlos o considerar diversas muestras de datos, analizar los datos e interpretar los resultados del análisis) y la habilidad para reconocer cómo este proceso es crucial para todo razonamiento estocástico que incluye datos. A su vez, de acuerdo con el CEMat (2021), el sentido

estocástico se concreta en la habilidad para reconocer la necesidad de los datos, para transnumerar y de tomar decisiones en situaciones acordes con la edad.

En lo que se refiere a la legislación educativa española de educación infantil, lamentablemente la estadística y la probabilidad todavía no está presente de forma explícita: por ejemplo, en la Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil (MEC, 2008), únicamente se mencionan algunos conocimientos numéricos relativos a la cuantificación y comparación cuantitativa entre colecciones de objetos (Alsina, 2013), que pueden interpretarse como un primer acercamiento a las tablas de recuento y de frecuencias. En este mismo documento legislativo, la omisión a la probabilidad es absoluta; en el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de Educación Infantil (MEFP, 2022b), la tendencia es similar: Alsina (en prensa) señala que aparece un único conocimiento en torno a la probabilidad, curiosamente en el primer ciclo, que se puede relacionar con la identificación de la posibilidad de ocurrencia de los hechos, y dos conocimientos en el segundo ciclo vinculados con las fases del ciclo de investigación estadística: la recolección (y organización) de datos y la interpretación crítica de información (únicamente a través de medios digitales), aunque no se especifica a qué tipo de información se refiere. En relación a estos conocimientos, por un lado, resulta curioso que, en lo que respecta al desarrollo de estrategias para identificar y evitar situaciones de riesgo o peligro, no haya una continuidad en el segundo ciclo que permita a los niños ir apropiándose de términos vinculados a la probabilidad como imposible, seguro, etc.; por otro lado, sorprende que se mencionen estrategias de búsqueda, reelaboración y comunicación de información, sin nombrar ninguna de ellas (p. ej., tablas y gráficos estadísticos), o bien que se incentive la interpretación crítica de información recibida a través de medios digitales, sin considerar los datos que surgen de contextos reales cercanos a los niños.

Así, a partir de lo antes expuesto, podemos decir que, en el caso del currículo escolar español de matemática, se observa la presencia de conceptos asociados a estadística y probabilidad al menos desde la década del 70 del siglo anterior.

## **METODOLOGÍA**

El enfoque de este estudio es cualitativo-interpretativo, pues considera técnicas cualitativas y cuantitativas para la recolección y el análisis de los datos. En concreto, se ha realizado un análisis de contenido (Krippendorff, 2013), además del recuento de indicadores u objetivos de aprendizaje presentes en los currículos de matemáticas y que se relacionan con temas de estadística y probabilidad.

La muestra fue intencionada y está conformada por las orientaciones curriculares vigentes de Chile y España para los niveles de Educación Infantil y Educación Primaria que se indican en la Tabla 1. Las unidades de análisis corresponden a los ejes temáticos asociados a temas de estadística y probabilidad, junto a sus respectivos descriptores y objetivos de aprendizaje.

**Tabla 1.** *Documentos curriculares analizados*

País	Referencia	Documento
Chile	MINEDUC (2018)	Bases Curriculares: Educación Parvularia.
	MINEDUC (2012)	Bases Curriculares: Educación Básica Matemática.
España	MEFP (2022b)	Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil.
	MEFP (2022a)	Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

**Fuente:** Elaboración propia.

Para el análisis se consideraron las siguientes categorías: a) presencia explícita de la estadística y la probabilidad en los currículos de Matemáticas para Educación Infantil y Educación Primaria, lo que informa sobre la presencia o ausencia de un eje de contenido vinculados al estudio de estos temas; b) sentido propuesto para llevar a cabo la enseñanza de la estadística y la probabilidad en los currículos. Para ello, se realizó un análisis de cada una de las descripciones otorgadas al eje de estadística y probabilidad en los distintos currículos, en busca de patrones acerca del sentido y el énfasis otorgado a su enseñanza y aprendizaje, que permitiera caracterizar dicho sentido; y c) ideas fundamentales de la estocástica, presentes explícitamente o de manera subyacente en los currículos: en este aspecto se identifican y analizan las ideas fundamentales de la estocástica.

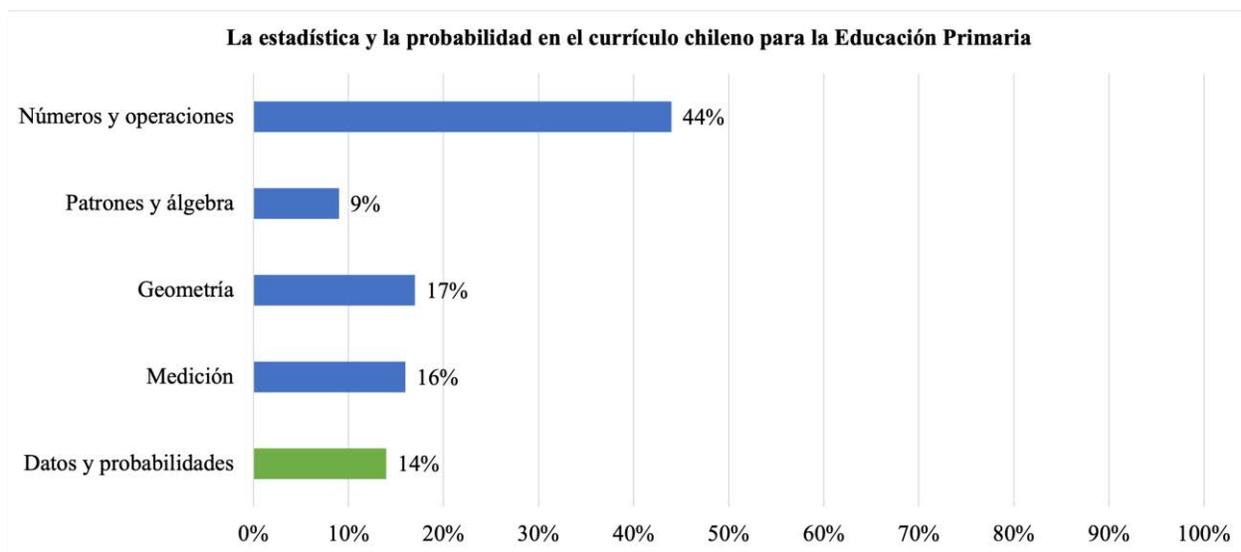
## RESULTADOS

### ***Presencia explícita de la estadística y la probabilidad***

A partir del análisis de las orientaciones curriculares de Chile y España, se observa que la estadística y probabilidad no están presentes de manera explícita en el nivel de Educación Infantil. Ahora bien, en lo que concierne a la presencia de la estadística y la probabilidad en los currículos de Educación Primaria de ambos, se evidencia que esta se encuentra presente de manera explícita a través de un bloque de contenido.

En el caso de las orientaciones curriculares chilenas para la Educación Primaria éstas se encuentran estructuradas en cinco ejes temáticos (números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición, datos y probabilidades) cuyos objetivos de aprendizaje distribuyen como se muestra en la Figura 3.

**Figura 3.** *Porcentaje de presencia de la estadística y la probabilidad en el currículo chileno para la Educación Primaria*



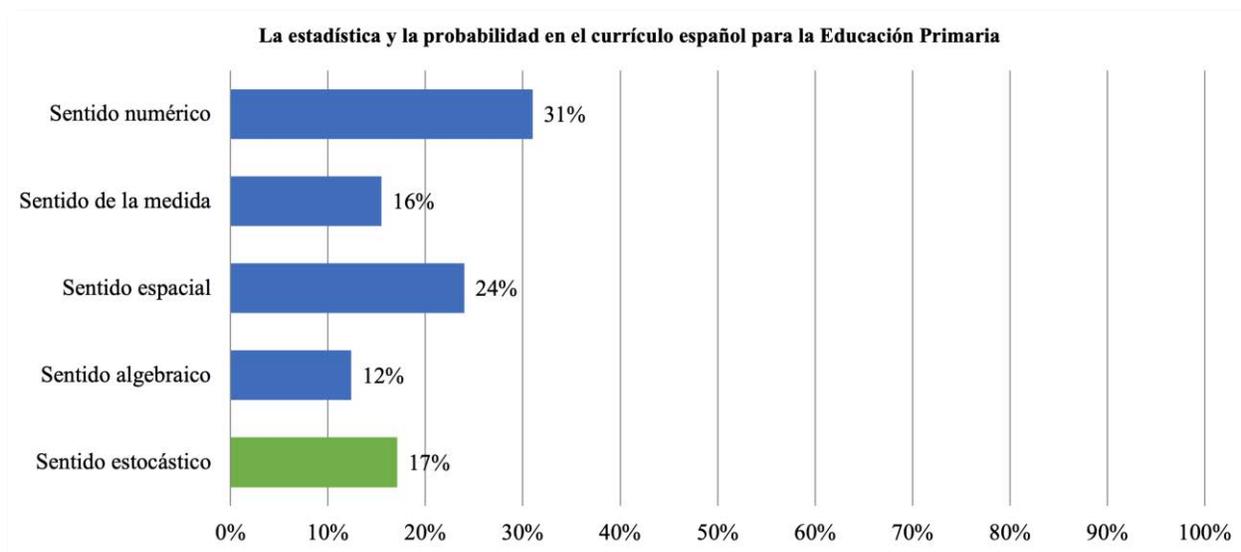
**Fuente:** Elaboración propia

Como es posible observar, el eje de datos y probabilidades recibe un nivel de atención un tanto menor que los ejes de medición y geometría y bastante menor que el eje de números y operaciones que es el que predomina dentro de este currículo. No obstante, se encuentra en una mejor posición que el eje de patrones y álgebra que es el más descendido, ya que presenta la menor cantidad de indicadores u objetivos de aprendizaje dentro del currículo. Así, este eje de contenido inicia en los primeros cursos con el planteamiento de preguntas de investigación estadística, la recolección e interpretación de datos, hasta llegar, por ejemplo, en el caso del currículo chileno (MINEDUC, 2012), a “comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento, de manera manual y/o usando software educativo” (p. 126), en el último curso de primaria.

En el caso del currículo español, se organiza en torno a saberes básicos vinculados al desarrollo del sentido matemático: sentido numérico, sentido de la medida, sentido espacial, sentido algebraico, y sentido estocástico. Como se puede observar en la Figura 4, el eje correspondiente al sentido estocástico recibe una atención algo superior que en el currículo chileno (17% frente al 13.7%), por encima del sentido algebraico y de la medida. Sin desmerecer ningún eje, parece que la tendencia del currículo español está en sintonía con orientaciones de organismos y autores de prestigio internacional

que señalan la necesidad de otorgar más importancia al desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde las primeras etapas escolares.

**Figura 4.** *Porcentaje de presencia de la estadística y la probabilidad en el currículo español para la Educación Primaria*



**Fuente:** Elaboración propia

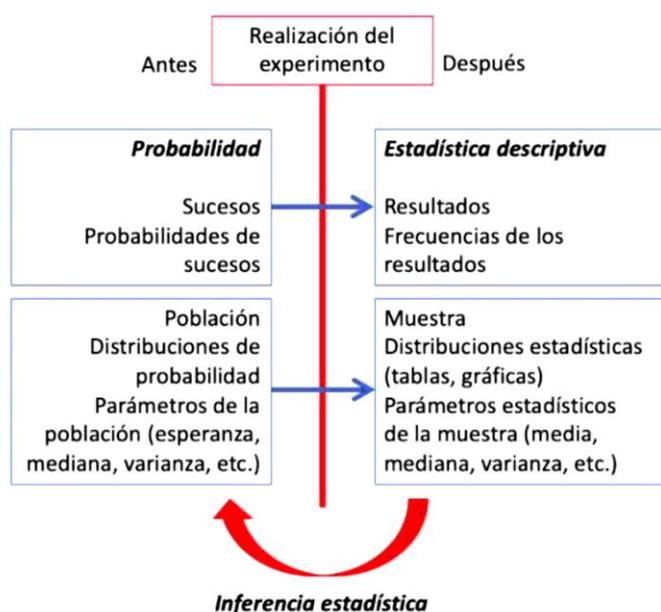
***Sentido propuesto para llevar a cabo la enseñanza de la estadística y la probabilidad***

En lo que respecta al sentido que se propone en las orientaciones curriculares chilenas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad, para el eje de datos y probabilidades, se señala explícitamente que: “este eje responde a la necesidad de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos” (MINEDUC, 2012, p. 219). Esto deja entrever un enfoque fuertemente centrado en el ciclo de investigación estadística (formular preguntas, recopilar datos, analizar e interpretar resultados) como elemento central del aprendizaje de la estadística y la probabilidad. De igual manera, se hace evidente el énfasis en el uso de la estadística y la probabilidad como herramienta para dar respuesta a situaciones provenientes de un contexto real, en las que es necesario el uso del conocimiento estadístico y/o probabilístico para interpretar, evaluar críticamente, comunicar y tomar de decisiones a partir de información relacionada con datos y/o probabilidad. De

manera que los estudiantes perciban la estadística y la probabilidad en conexión con distintos ámbitos de la vida real, como una herramienta útil y valiosa.

En el caso del currículo de España, como se ha indicado, el abordaje de los conocimientos de estadística y probabilidad se vinculan al sentido estocástico, definido como aquel que “se orienta hacia el razonamiento y la interpretación de datos y la valoración crítica, así como la toma de decisiones a partir de información estadística. También comprende los saberes vinculados con la comprensión y la comunicación de fenómenos aleatorios en situaciones de la vida cotidiana” (MEFP, 2022b, p. 24486) Desde este punto de vista, hay una clara intencionalidad de tratar de fortalecer las relaciones entre ambos bloques, en la línea expuesta en la Figura 5.

**Figura 5.** Esquema del tipo de tratamiento matemático de los experimentos aleatorios



Fuente: Rodríguez-Muñiz et al. (2020)

Como se puede observar en la Figura 5, antes de la realización de un experimento aleatorio (p. ej., lanzar un dado), se hace una predicción del grado de creencia (objetiva o subjetiva) que tenemos acerca de que se produzca un determinado resultado. Pero este grado, incluso aunque sea muy elevado, no predice su ocurrencia. Después de realizar el experimento, el resultado se habrá producido o no, pero una sola repetición del experimento no respalda ni refuta una probabilidad, sería necesario tener un gran número de repeticiones para poder revisar dicha probabilidad, y ahí es donde interviene la estadística denominada descriptiva para recopilar, organizar y analizar los datos del resultado de ese experimento cuantas veces haya sido realizado. De este modo, en el ejemplo indicado, el hecho de

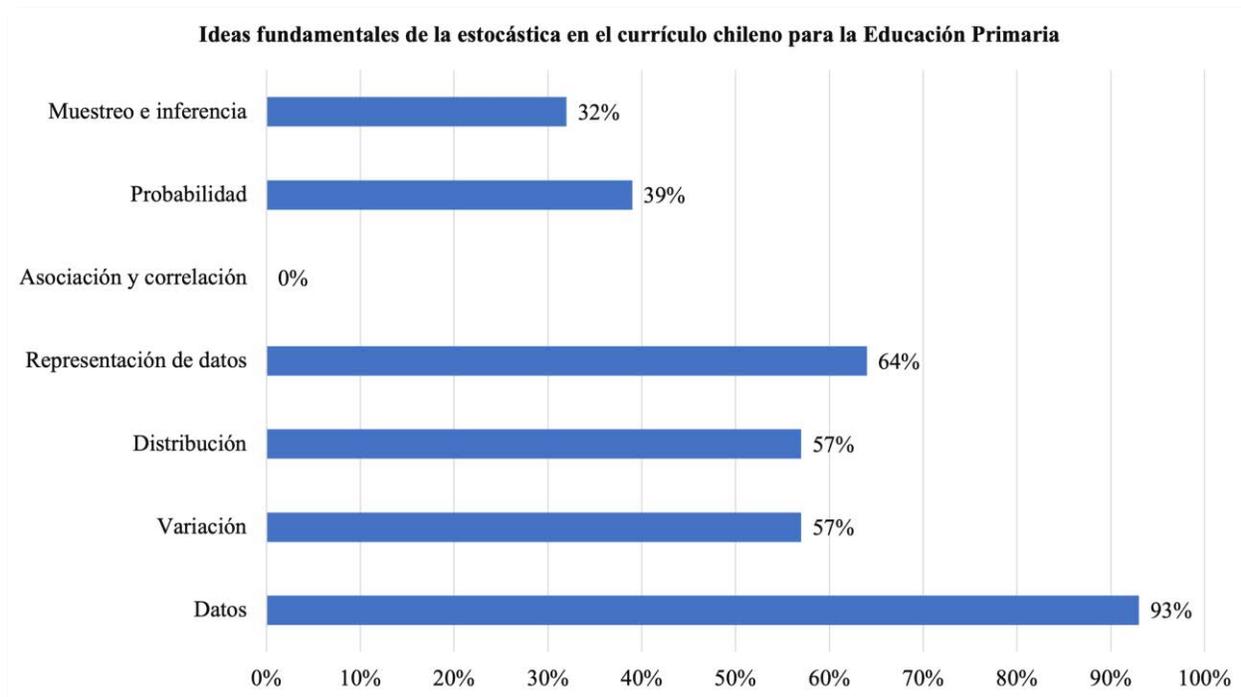
sacar un cinco no implica que siempre se obtenga este mismo valor al lanzar un dado, por lo que se puede estudiar el comportamiento del azar mediante una investigación estadística (p. ej., al lanzar 100 veces un dado). Adicionalmente, la inferencia estadística (formal o informal) permite dar un giro a la situación, utilizando los datos de lo que ha ocurrido al lanzar el dado un determinado número de veces para emitir, y en su caso contrastar, estimaciones, conjeturas e hipótesis acerca del comportamiento del experimento en un conjunto mayor que el estudiado (en la población) o ante una posible nueva ejecución del mismo (Rodríguez-Muñoz et al., 2020).

### ***Las ideas fundamentales de la estocástica***

Para identificar las ideas fundamentales de la estocástica presentes en las orientaciones curriculares, se realizó un análisis transversal de las propuestas curriculares, a través de los indicadores de contenido u objetivos de aprendizaje vinculados a estadística y probabilidad para cada uno de los cursos que conforman el nivel educativo en cuestión. Se contemplaron aquellos rasgos claramente identificables, y que se pueden vincular con las ideas fundamentales de la estocástica.

En relación con las ideas estadísticas fundamentales presentes ya sea explícitamente o de manera subyacente en el currículo chileno para la Educación Primaria (MINEDUC, 2012, 2016), se analizó un total de 28 indicadores de contenidos u objetivos de aprendizaje relativos a temas de estadística y/o probabilidad. En la Figura 6, se muestra el recuento del número de veces que se hace alusión a ideas o conceptos que se pueden vincular con las ideas estadísticas fundamentales. Cabe señalar, que un mismo indicador u objetivo de aprendizaje puede atender a una o más de dichas ideas.

**Figura 6.** Porcentaje de presencia de las ideas fundamentales de la estocástica en el currículo chileno para la Educación Primaria



**Fuente:** Elaboración propia

A partir de la Figura 6, se observa que la idea de datos es la que se encuentra mayormente presente, pues en un 93% de los objetivos de aprendizaje analizados se encontraron alusiones a los datos. Ejemplo de esto es el objetivo de aprendizaje para el primer curso de primaria (6-7 años), en el que se plantea que los estudiantes deben “recolectar y registrar datos para responder a preguntas estadísticas” (MINEDUC, 2012, p. 228).

Por otro lado, la segunda idea estadística con un mayor número de alusiones es la de representación de datos, que está presente en un 64% de los objetivos de aprendizaje analizados. Por ejemplo, para el penúltimo curso de primaria (12-13 años), se propone que los estudiantes deben ser capaces de “representar datos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo” (MINEDUC, 2016, p. 108). Esto nos sugiere que más allá de construir distintos tipos de gráficas, los estudiantes deben ser capaces de comunicar sus hallazgos (datos), así como evaluar la efectividad o pertinencia de los distintos tipos de representaciones a utilizar.

Dentro de las ideas que gozan de una menor presencia, se encuentran las ideas de muestreo e inferencia (32%) y la de probabilidad, pues solo en un 39% de los objetivos de aprendizaje se

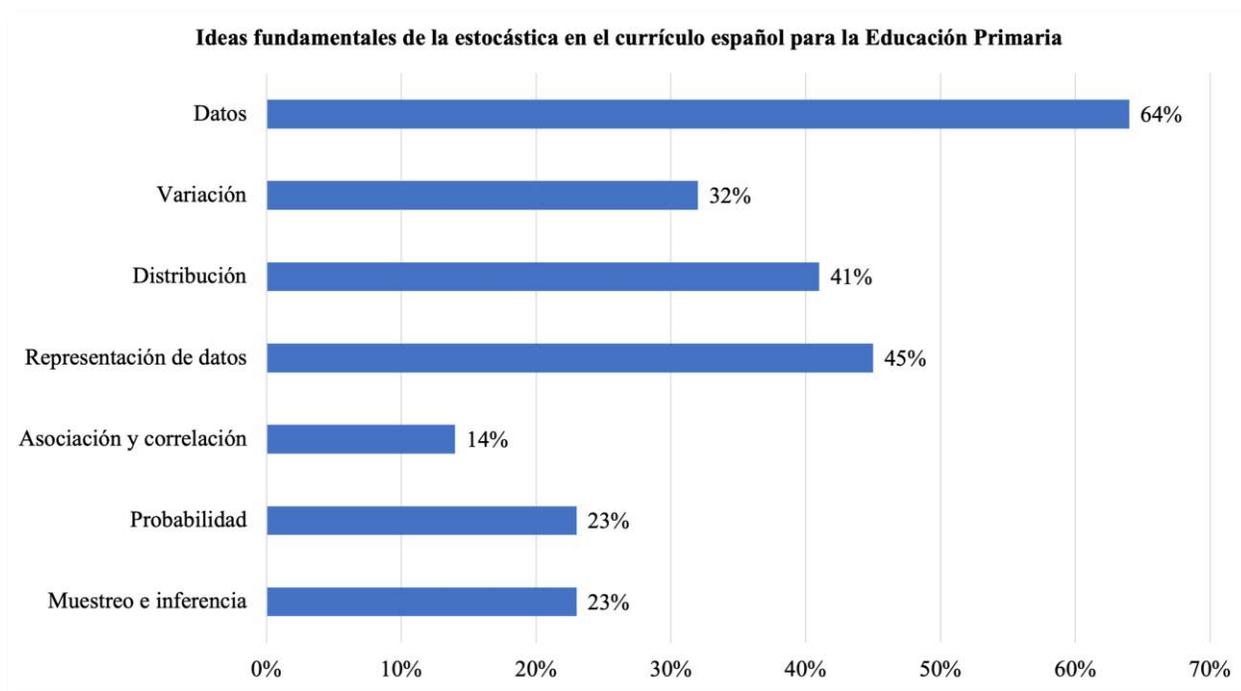
encuentran alusiones a esta idea. Un ejemplo de esto es el objetivo de aprendizaje propuesto para el quinto curso de primaria (10-11 años), en el que se indica que los estudiantes deben “comparar probabilidades de distintos eventos sin compararlas” (MINEDUC, 2012, p. 249). Por último, la idea de asociación y correlación no está presente dentro de los objetivos de aprendizaje analizados.

En el caso del currículo de España (Figura 7), la tendencia es similar al currículo chileno: la idea de datos es la que también muestra una mayor presencia (64%), aunque no tan elevada como el currículo chileno. Le sigue la “representación de datos” (45%) y la distribución (41%), dando a entender que la fase del ciclo de investigación correspondiente al análisis, que incluye la construcción de tablas y gráficos, es de vital importancia.

Otras ideas como la variación, el muestreo y la probabilidad tienen una presencia algo inferior que en el currículo chileno. En el caso de la probabilidad, por ejemplo, la presencia es únicamente de un 23%, lo cual implica que difícilmente se puede profundizar en los distintos significados posibles de trabajar en esta etapa: intuitivo, frecuencial, clásico y subjetivo (Vásquez y Alsina, 2019).

Finalmente, la asociación y correlación es el saber con una presencia inferior, aunque a diferencia del currículo chileno, en el currículo español sí que se aborda esta idea.

**Figura 7.** Porcentaje de presencia de las ideas fundamentales de la estocástica en el currículo español para la Educación Primaria



**Fuente:** Elaboración propia

## **CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DOCENTE**

En este estudio se ha indagado acerca de la presencia de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares de Chile y España para los niveles de Educación Infantil y Educación Primaria. Junto con analizar la importancia que se da a este eje/bloque de contenido respecto al conjunto de bloques que conforman la matemática, se ha explorado también el sentido propuesto para su enseñanza en dichas orientaciones curriculares y, por último, se ha analizado cuantitativamente la presencia de las ideas fundamentales de la estocástica planteadas por Burrill y Biehler (2011).

En el caso de los currículos para la Educación Infantil de ambos países, se evidencia que el estudio de la estadística y la probabilidad no está presente explícitamente en este nivel educativo, aun cuando es posible ligar indirectamente al estudio de algunas nociones de estadística y probabilidad a algunos contenidos a conocimientos intuitivos y a ideas numéricas y de conteo propias de la edad, para luego ir progresando y enriqueciéndose a medida que los estudiantes avanzan en su etapa escolar tal y como lo indican Vásquez et al. (2018). No obstante, esta ausencia puede ir en desmedro de un adecuado desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde edades tempranas, coartando en dichos niveles el desarrollo de oportunidades de aprendizaje que permitan iniciar a los niños en estos temas.

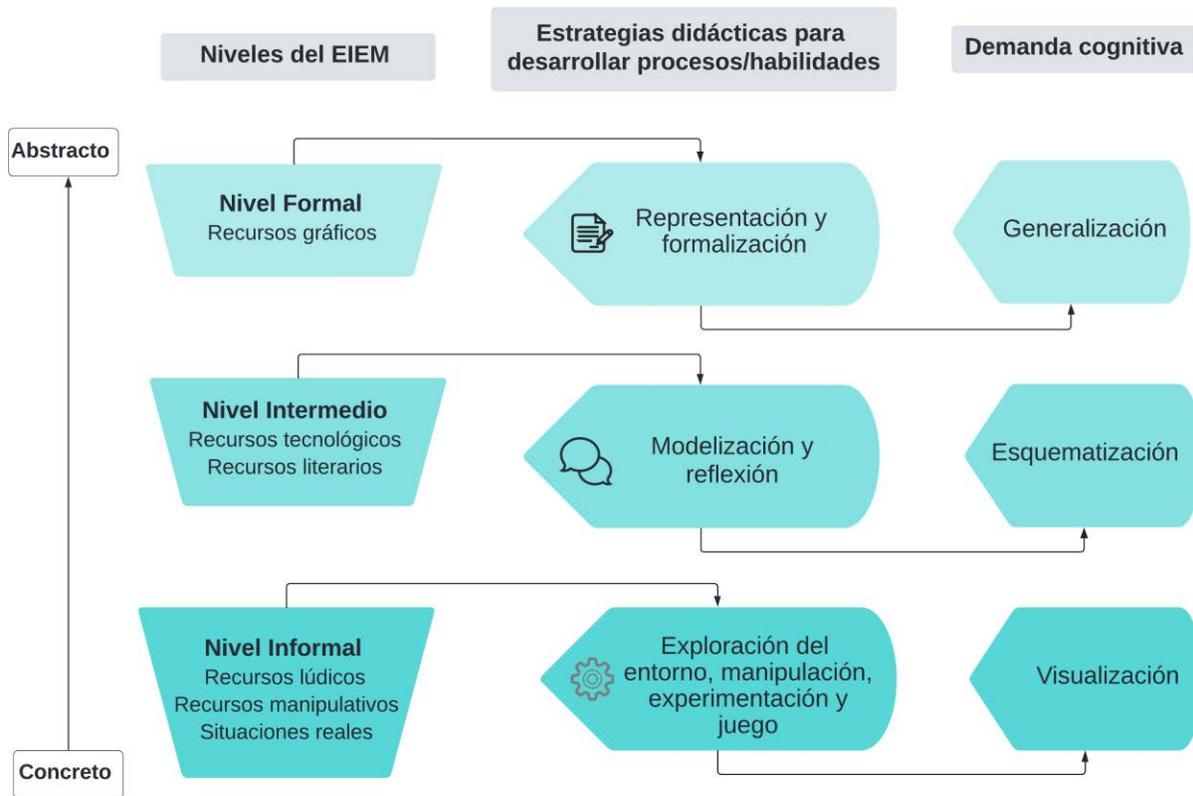
En términos generales, en el caso de los currículos para la Educación Primaria para ambos países, se ha detectado que la estadística y la probabilidad o sentido estocástico tiene una presencia baja en el currículo de Educación Primaria tanto de Chile (13,7%) como de España (17,1%), aunque en este segundo país se observa una tendencia positiva en el sentido de tratar de dar mayor importancia a este eje, puesto que está situado por encima de los sentidos de la medida y algebraico.

En relación con el enfoque propuesto para llevar a cabo la enseñanza de la estadística y la probabilidad, hay una diferencia entre ambos currículos, ya que mientras que el currículo chileno mantiene cierta desvinculación entre la estadística y la probabilidad, en el currículo español se refuerzan las conexiones planteando saberes en torno al sentido estocástico. Ahora bien, en ambos países se observa que la enseñanza de la estadística y la probabilidad es concebida como un terreno fértil para resolver problemas con sentido y significado para los estudiantes, provenientes de situaciones cotidianas. Este es un aspecto muy positivo y que favorece su enseñanza y valoración en el aula escolar. Sin embargo, es necesario avanzar más y enfatizar el potencial de centrar la enseñanza de la estadística y la probabilidad como una herramienta para ayudar a los ciudadanos de hoy a tomar conciencia, comprender, reflexionar.

Finalmente, la tendencia de ambos currículos en lo que respecta a las ideas fundamentales de la estocástica es similar: en ambos casos, los datos y la representación son los que presentan porcentajes superiores, mientras que en el extremo opuesto está la asociación y correlación. En los lugares intermedios están el resto de las ideas: distribución, variación, muestreo e inferencia y probabilidad.

En consideración a los resultados de este estudio, es necesario que el profesorado que enseña matemática, que es a quien se le ha encomendado la tarea de enseñar estadística y probabilidad, cuente con los conocimientos didácticos y disciplinares que le permitan avanzar en el diseño de tareas que propicien el desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde la Educación Infantil. Desde tal perspectiva el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM) (Alsina, 2019, 2020, 2022), se constituye en una potente herramienta para el diseño de tales tareas, ya que aglutina distintas maneras de abordar la enseñanza de la estadística y la probabilidad. Cabe señalar que entenderemos la palabra “itinerario” como una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles de enseñanza: en contextos informales, en contextos intermedios y en contextos formales. Así a partir de tales niveles que van desde lo concreto a lo abstracto (Figura 8), el profesorado podrá gestionar estrategias didácticas diversas en pos del desarrollo de una comprensión conceptual más que focalizarse en los procedimientos.

**Figura 8.** Niveles del EIEM, con sus correspondientes estrategias didácticas y demanda cognitiva



Fuente: Elaborado a partir de Alsina (2019, 2020, 2022)

En el caso de la estadística y la probabilidad, este planteamiento busca que los niños evoquen y compartan sus conocimientos y experiencias previas y los vinculen con los nuevos aprendizajes, permitiéndoles así reconstruir nuevos conocimientos e ir desarrollando la alfabetización tanto estadística como probabilística. En dicho sentido, cobra especial relevancia el nivel de exigencia o demanda cognitiva de tales tareas (memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión y construir matemática), pues gran parte del aprendizaje está condicionado por el tipo de tareas que se plantean a los niños (Smith y Stein, 1998). Por tanto, es necesario que el profesorado ponga cuidado en la selección e identificación de buenas tareas, que favorezcan una comprensión profunda de la estadística y la probabilidad, a partir de la integración de datos reales con un contexto y un propósito y, progresivamente, ir presentando otros contextos como los materiales manipulativos y los juegos, los recursos tecnológicos, etc.

Finalmente, un aspecto no menor sobre el cual es necesario reflexionar es el lugar que se da a la estadística y la probabilidad en el currículo, pues comúnmente se le sitúa dentro de los últimos temas

a tratar, lo que podría generar una subvaloración de estos, y quizás podría ser uno de los causantes de que en muchas ocasiones estos temas no sean abordados, ¿por qué no situar la enseñanza de la estadística y la probabilidad dentro de los primeros temas al iniciar el año escolar?

### Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del FONDECYT N° 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas*, 7, 4-22.
- Alsina, Á. (2013). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum, and Educational Practice. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 100-153.
- Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Editorial Graó.
- Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159. <https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018>.
- Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Editorial Graó.
- Alsina, Á. (en prensa). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Épsilon*.
- Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TELA. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2), 1-20.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números. *Revista de didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- Batanero, C., y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.
- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/LASE study* (pp. 57-69). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Casellas Beltrán, P. et al. (1981). Programas renovados en EGB: Área de Matemáticas. *Vida Escolar*, 210, 2-80. <http://hdl.handle.net/11162/78611>
- CEMat (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Comité Español de Matemáticas. <https://bit.ly/3ytlGg1>

- Choppin, J., McDuffie, A., Drake, C. y Davis, J. (2018). Curriculum ergonomics: Conceptualizing the interactions between curriculum design and use. *International Journal of Educational Research*, 92, 75-85.
- Cortés, H. (1970). *Matemáticas de 8º año*. Centro de perfeccionamiento, experimentación e investigaciones pedagógicas. Editorial Universitaria. Santiago, Chile.
- Engel, J. y Sedlmeier (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/LASE study* (pp. 247-258). New York: Springer.
- Estepa, A. (2004). Investigación en educación estadística. La asociación estadística. En R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Educación Matemática*, (pp. 227-255). Badajoz: Servicio de Publicaciones. Universidad de Extremadura.
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *Nederlandn*, 70, p. 1-25.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.
- Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 235-246). Springer.
- Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido*. Teoría y práctica. Barcelona: Paidós.
- Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. <https://www.boe.es/eli/es/lo/1990/10/03/1>
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. <https://bit.ly/3wvxhZg>
- MEC (1970). Orientaciones pedagógicas para la Educación General Básica: año académico 1970-1971. Planes y programas de estudio. *Enseñanza Media*, 225, 1-116. <http://hdl.handle.net/11162/74229>.
- MEC (2008). Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. <https://www.boe.es/buscar/pdf/2008/BOE-A-2008-222-consolidado.pdf>
- MEFP (2022a). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. MEFP. <https://bit.ly/3MWOjuA>
- MEFP (2022b). *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil*. MEFP. <https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2022-1654>
- MINEDUC (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Unidad de Curriculum y Evaluación.
- MINEDUC (2016). *Bases Curriculares: 7º básico a 2º medio*. Unidad de Curriculum y Evaluación.
- MINEDUC (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.
- Moore, D. S. (1991). Teaching Statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the Twenty-First Century*, (pp. 14-25). Mathematical Association of America.

- Moore, D. y Cobb, G. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly*, 104, 801-823.
- Muñoz, J. y Murcia, J. (2015). Las matemáticas en busca de sentido. *UNO*, 70, 6-8.
- National Committee on Mathematical Requirements, Mathematical Association of America (MAA). (1993). *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education*. Washington, D.C.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards and understanding of statistical thinking. En Dani Ben-Zvi & Joan Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 17-46). Dodrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Reys, B., Reys, R., y Rubenstein, R. (2010). *Mathematics Curriculum Issues, Trends, and Future Directions*. NCTM. Reston, VA.
- Rodríguez-Muñiz, L., Muñiz-Rodríguez, L., Vásquez, C., y Alsina, A. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Revista Números*, 104, 217-238.
- Rubin, A., Hammerman, J. K. y Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Online: [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications).
- Shaughnessy, J. M. (1992). *Research in probability and statistics: Reflections and directions*. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 465-494). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1010). Greenwich, CT: Information Age y NCTM.
- Smith M.S., y Stein, M.K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(1), 344-350.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2016). Aproximación a la probabilidad en el aula de Educación Primaria. Un estudio de caso sobre los primeros elementos lingüísticos. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (eds.), (2016). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 529-538). Málaga: SEIEM.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Revista Acta Scientiae*, 21(3), 131-154. DOI: 10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215
- Vásquez, C. y Cabrera, G. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Revista Educación Matemática*.

La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria: implicaciones para la formación del profesorado

- Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C. y Alsina, A. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos Cenpec*, 8(1), 154-179.
- Vásquez, C., y Alsina, A. (2021). Analysing Probability Teaching Practices in Primary Education: What Tasks do Teachers Implement? *Mathematics*. 2021; 9(19):2493.
- Villalobos, J., y Parra, B. (1963). *Matemáticas séptimo año. Conforme a los programas oficiales*. Editorial Universitaria. Santiago, Chile.

## **STATISTICS AND PROBABILITY IN PRE-PRIMARY AND PRIMARY SCHOOL CURRICULA: IMPLICATIONS FOR TEACHER TRAINING**

### **ABSTRACT**

This study characterises how the curricular guidelines deal with statistics and probability in Pre-school and Primary Education. To do so, firstly, we analyse the explicit presence of statistics and probability in the curricular guidelines of two countries (Chile and Spain); secondly, we examine the meaning given to their teaching and learning; and finally, the implications for the training of teachers who will work at these educational levels. The results show, in the case of Pre-school Education, a null presence of content linked to the study of statistics and probability. In Primary Education, on the other hand, the presence of this block of content is slightly higher, but it is low in comparison with other content areas. Consequently, a direct implication is that teachers should emphasise statistics and probability in the teaching process, even more so considering their leading role in the development of skills for the 21st century. To this end, teachers need to design tasks that focus on conceptual rather than procedural understanding.

Keywords: Stochastic Education; Early Childhood Education; Primary Education; Curriculum.

## **ESTATÍSTICAS E PROBABILIDADES NOS CURRÍCULOS DO ENSINO PRÉ-PRIMÁRIO E PRIMÁRIO: IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

### **RESUMO**

Este estudo caracteriza a forma como as directrizes curriculares lidam com estatísticas e probabilidades no Ensino Pré-Escolar e Primário. Para tal, em primeiro lugar, analisamos a presença explícita de estatísticas e probabilidades nas directrizes curriculares de dois países (Chile e Espanha); em segundo lugar, examinamos o significado dado ao seu ensino e aprendizagem; e, finalmente, as implicações para a formação de professores que irão trabalhar nestes níveis de ensino. Os resultados mostram, no caso da Educação Pré-Escolar, uma presença nula de conteúdos ligados ao estudo da estatística e da probabilidade. No Ensino Primário, por outro lado, a presença deste bloco de conteúdos é ligeiramente superior, mas é baixa em comparação com outras áreas de conteúdos. Consequentemente, uma implicação directa é que os professores devem enfatizar a estatística e a probabilidade no processo de ensino, ainda mais considerando o seu papel de liderança no desenvolvimento de competências para o século XXI. Para tal, os professores precisam de conceber tarefas que se concentrem na compreensão conceptual e não processual.

Palavras-chave: Educação Estocástica; Educação da Primeira Infância; Ensino Primário; Currículo.

La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria: implicaciones para la formación del profesorado

CLAUDIA VÁSQUEZ  
*Pontificia Universidad Católica de Chile, Villarrica, Chile*  
[cavasque@uc.cl](mailto:cavasque@uc.cl)  
<https://orcid.org/0000-0002-5056-5208>

Profesora de Matemática y Licenciada en Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Doctora por la Universidad de Girona (España). Actualmente es Profesora Asociada de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación se centran en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad, y en la formación del profesorado. Ha participado en proyectos de investigación sobre didáctica de la matemática, didáctica de la probabilidad y la estadística, y formación del profesorado.

ÁNGEL ALSINA  
*Universidad de Girona, Girona, España*  
[angel.alsina@udg.edu](mailto:angel.alsina@udg.edu)  
<https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

Catedrático de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina.

# LA IDONEIDAD DIDÁCTICA COMO RECURSO EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA

CARMEN BATANERO  
MARÍA M. GEA  
PEDRO ARTEAGA  
GUSTAVO R. CAÑADAS

## RESUMEN

El conocimiento del profesor se conforma tanto de conocimiento matemático, como didáctico y meta didáctico, relevantes todos ellos en la formación de profesores de estadística. El objetivo del trabajo es describir nuestra experiencia formativa en la que se pide a profesores en formación analizar la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la estadística y se utilizan esta tarea para evaluar y desarrollar su conocimiento especializado de la estadística. Como ejemplo, se analizan los resultados de los informes elaborados por una muestra de profesores de secundaria y bachillerato en formación al evaluar la idoneidad epistémica de un proyecto estadístico. El estudio de sus respuestas escritas permite definir niveles alcanzados en dicho análisis y evaluar la faceta epistémica de su conocimiento. Los participantes muestran un nivel bueno o razonable en la identificación de reglas y lenguaje matemático, pero se requiere reforzar su formación en el reconocimiento de relaciones, valoración de la adecuación de las tareas planteadas y de las argumentaciones utilizadas.

Palabras clave: Conocimiento didáctico-matemático; idoneidad didáctica, formación de profesores de estadística, evaluación de la idoneidad epistémica.

## INTRODUCCIÓN

Aunque la enseñanza de la estadística se extiende hoy día a todos los niveles educativos, la formación en didáctica de la estadística no es habitual en la preparación del profesorado. La razón es que, aunque se reconoce la especificidad de la estadística y la necesidad de reforzar el conocimiento y razonamiento estadístico de los estudiantes (Salcedo et al., 2021; Scheaffer, 2006), en el currículo escolar la estadística forma parte de las matemáticas. En consecuencia, se asume que una formación general en didáctica de la matemática es suficiente para enseñar estadística.

Sin embargo, la formación de los profesores para enseñar estadística se ha convertido en un área importante de investigación en educación estadística, a partir del estudio organizado por ICMI e IASE (Batanero et al., 2011). Estas investigaciones se apoyan en diferentes marcos teóricos, uno de los cuales es el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático - CDM (Godino, 2009; Pino-Fan y

Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2022). La idoneidad didáctica como recurso en la formación del profesorado para enseñar estadística. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 215-238). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

Godino, 2015), ampliado posteriormente al incluir las competencias (modelo CCDM) junto a los conocimientos del profesor (Godino et al. 2017). En este trabajo describimos algunas actividades formativas en las que se pide a profesores en formación analizar la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la estadística, como recurso de evaluación y desarrollo de su conocimiento didáctico. Como ejemplo, se presenta el análisis realizado por una muestra de profesores de educación secundaria obligatoria y bachillerato en formación de la idoneidad epistémica de un proyecto estadístico.

## MARCO TEÓRICO

El trabajo se apoya en el marco teórico del Enfoque Onto semiótico - EOS (Godino et al., 2007; 2019), que asume que el significado de los objetos matemáticos se origina de las prácticas llevadas a cabo por una persona o institución al resolver problemas relacionados con dichos objetos. El significado (institucional o personal) de un objeto matemático sería el sistema de prácticas (institucionales o personales) asociado a la resolución de problemas ligados al objeto. Godino et al. (2007) describen los siguientes tipos de objetos matemáticos utilizados en las prácticas asociadas a un campo de problemas:

- *Situaciones-problemas*: aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, que conllevan actividad matemática.
- *Lenguaje*: expresiones, símbolos, gráficos, etc. empleados para enunciar o resolver situaciones-problemas.
- *Conceptos*: abstracciones matemáticas, que son introducidas mediante definiciones.
- *Proposiciones*: enunciados que involucran relaciones o propiedades de los conceptos.
- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, que se pueden aplicar en la resolución de situaciones-problemas.
- *Argumentos*: justificaciones de enunciados o procedimientos (deductivas, inductivas, mediante ejemplos, etc.) empleadas en la resolución de situaciones-problemas.

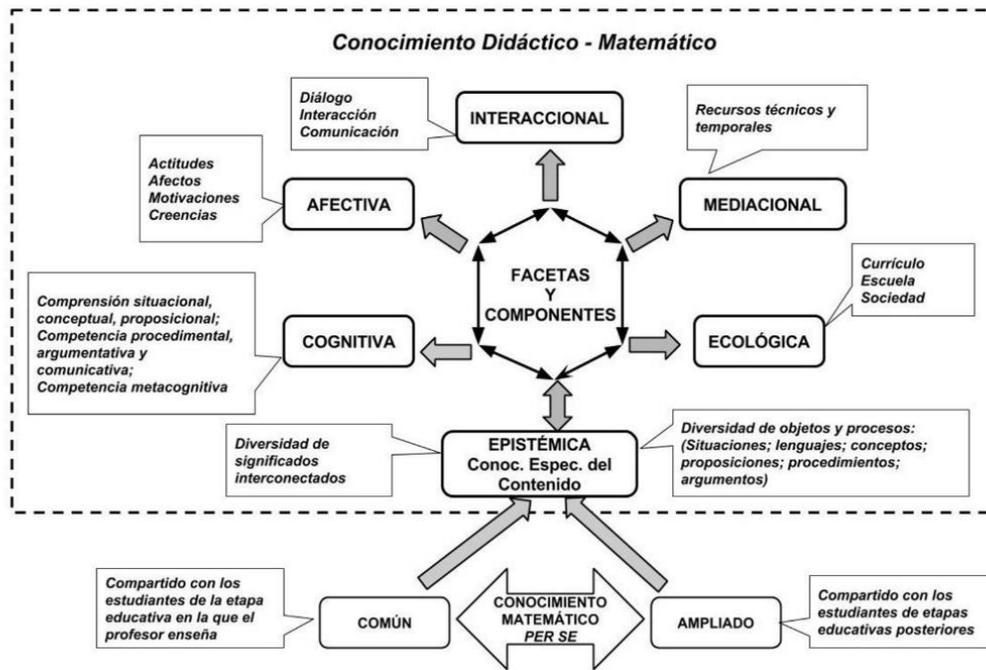
De este marco teórico utilizaremos la anterior clasificación de tipos de objetos matemáticos y el modelo CDM de conocimiento del profesor, junto a la teoría de idoneidad didáctica, que describimos a continuación.

### El conocimiento didáctico matemático

En la actualidad, el conocimiento del profesor y su formación constituye una de las líneas de investigación más amplias y productivas en educación matemática, como se observa por la cantidad de artículos sobre el tema y la existencia de revistas específicas como *Journal of Mathematics Teacher*

*Education*. Dichos estudios resaltan el carácter multidimensional del conocimiento del profesor y proponen diferentes modelos para describirlo. En este trabajo se utiliza el modelo CDM propuesto en el EOS (Godino, 2009; Godino et al., 2017; Pino-Fan y Godino, 2015; Scheiner, et al., 2019), que se resume esquemáticamente en la Figura 1.

**Figura 1.** Facetas y componentes del conocimiento didáctico-matemático



**Fuente:** Godino et al. (2017, p. 96)

El conocimiento matemático del profesor incluye el *conocimiento matemático común*, que sería el pertinente para el nivel educativo donde se lleva a cabo la enseñanza del tema, es decir, el que debe enseñar a sus estudiantes, y un *conocimiento ampliado* del contenido matemático, que es más avanzado y permite articular la enseñanza con los niveles superiores (Godino et al., 2017). Además, se considera el *conocimiento didáctico-matemático*, que consta de las facetas siguientes, cada una de las cuales describe un tipo de conocimiento o competencia del profesor:

- *Faceta epistémica:* conocimiento especializado del contenido que permite identificar y relacionar los distintos significados de un objeto matemático, resolver cada tarea con diferentes procedimientos, proporcionar justificaciones adecuadas e identificar el conocimiento involucrado en la resolución de una tarea matemática.
- *Faceta cognitiva:* conocimiento del aprendizaje, dificultades, estrategias de resolución de problemas y razonamiento de los estudiantes en cada tema particular.

- *Faceta afectiva*: comprensión de los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes.
- *Faceta interaccional*: capacidad para establecer las interacciones en la clase para facilitar el aprendizaje.
- *Faceta mediacional*: conocimiento de los recursos (libros, tecnología, etc.) que pueden ser útiles en el desarrollo de la comprensión del tema y capacidad para gestionarlos.
- *Faceta ecológica*: habilidad para relacionar el contenido con otros objetos matemáticos, otras materias y con la sociedad.

El conocimiento *meta didáctico-matemático* del profesor es el necesario para llevar a cabo la identificación y gestión de normas y aspectos que regulan e influyen el proceso de enseñanza y aprendizaje (Pino-Fan y Godino, 2015). En Godino et al. (2017) se completa el modelo CDM, con la incorporación de las siguientes competencias específicas del profesor de matemáticas:

- *Competencia de análisis de significados globales*, que permite al profesor diferenciar y relacionar diferentes significados de un objeto matemático en su enseñanza; por ejemplo, los diferentes significados de la probabilidad.
- *Competencia de análisis de la práctica matemática*, para identificar los objetos y procesos matemáticos requeridos en la resolución de las tareas propuestas a los estudiantes, así como aquellos que manifiestan los estudiantes en sus resoluciones a dichas tareas.
- *Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas*, que sirve al profesor para optimizar el aprendizaje del estudiante mediante su gestión de las interacciones que se producen en el aula entre estudiantes, entre estudiantes y recursos, así como sus propias relaciones con los estudiantes o los medios.
- *Competencia de análisis normativo*: que posibilita identificar y valorar las normas matemáticas o sociales que regulan la acción didáctica.
- *Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio o recursos didácticos* que permite al profesor analizar y evaluar la enseñanza que planifica o que ha llevado a cabo. Es precisamente esta competencia la que se trata de desarrollar en los talleres que se describen en este trabajo.

### **La idoneidad didáctica**

Este constructo fue introducido en el EOS (Breda et al., 2018; Godino, 2009; 2013; Godino et al., 2006) para guiar la valoración de la enseñanza de las matemáticas, y se ha usado en el análisis de

libros de texto, así como en la formación de profesores para la enseñanza y aprendizaje de la estadística (Arteaga et al., 2012, Arteaga et al., 2017). Se considera que un proceso de instrucción matemático es idóneo (o adecuado) si facilita la adaptación de los significados personales de los estudiantes (aprendizaje) a los institucionales (enseñanza), teniendo en cuenta las restricciones del contexto educativo y los estudiantes. Dicha idoneidad se valora a partir de seis dimensiones (Godino et al., 2007), relacionadas cada una con su correspondiente faceta del modelo CDM:

- *Idoneidad epistémica* (grado de representatividad del significado pretendido o implementado en un proceso de estudio respecto al significado institucional de referencia).
- *Idoneidad ecológica* (grado de ajuste del proceso de estudio al centro, la sociedad y el entorno).
- *Idoneidad cognitiva* (grado de proximidad del significado institucional pretendido o implementado con el significado personal previo de los estudiantes y a sus capacidades).
- *Idoneidad afectiva* (grado en que el proceso de instrucción tiene en cuenta los aspectos emocionales involucrados).
- *Idoneidad interaccional* (grado en que el proceso de estudio permite identificar y resolver conflictos de aprendizaje de los estudiantes).
- *Idoneidad mediacional* (grado de adecuación de los recursos didácticos, tiempo y organización del aula).

Para cada una de estas dimensiones, Godino (2013) propone componentes e indicadores de idoneidad, que se deben entender como reglas acordadas en la comunidad científica sobre “lo que se puede considerar como mejor” dentro de un proceso de enseñanza que transcurre en unas circunstancias dadas (Godino., 2009, p. 60).

Como se ha indicado en la introducción, el objetivo del trabajo es describir nuestra experiencia formativa en la que se pide a profesores en formación analizar la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la estadística. En el ejemplo que presentamos, se centra la atención en la idoneidad epistémica de un proceso de estudio, en concreto, de un proyecto estadístico. Se trata de medir la adecuación de los contenidos matemáticos enseñados respecto a un contenido de referencia, fijado en las directrices curriculares y por el significado del tema dentro de la matemática. Para valorarla, Godino (2013) propone los indicadores reproducidos en la Tabla 1.

**Tabla 1.** *Componentes e indicadores de idoneidad epistémica*

<b>Componentes</b>	<b>Indicadores</b>
Situaciones- problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.
Lenguajes	Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización) Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos. Nivel del lenguaje adecuado a los estudiantes a que se dirige.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación. Se presentan las definiciones, proposiciones y procedimientos fundamentales del tema adaptados al nivel educativo al que se dirigen.
Argumentos	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que reconocer definiciones, proposiciones o procedimientos. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.
Relaciones	Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí, articulando sus diversos significados.

**Fuente:** Godino (2013, p. 119)

### **Antecedentes**

Varios autores se han basado en el modelo CDM para analizar los conocimientos o la práctica de profesores en relación con la probabilidad y estadística (Vásquez y Alsina, 2017; 2021). Otros usaron el análisis de la idoneidad didáctica en procesos formativos del profesorado (Burgos et al., 2020; Burgos y Castillo, 2021; Samá y Amorim, 2021).

En trabajos previos hemos utilizado la valoración de la idoneidad didáctica como recurso en la evaluación y desarrollo de todas o parte de las facetas del conocimiento del profesor sobre estadística. En estos trabajos se ha asignado puntuaciones numéricas a las respuestas, para valorar la calidad del conocimiento del futuro profesor en cada componente e indicador de las diferentes facetas de la idoneidad didáctica. Por ejemplo, Arteaga (2011) parte de un proyecto estadístico centrado en la elaboración e interpretación de gráficos por parte de futuros profesores de educación primaria. El estudio de las producciones de los futuros profesores al analizar las facetas de la idoneidad didáctica ha dado lugar, entre otros, a los trabajos de Arteaga et al. (2012), Arteaga et al. (2017). En estos trabajos, los participantes mostraron pocos conocimientos especializados del contenido, aplicando en general los indicadores de la idoneidad didáctica en los niveles 1 o 2 de tres niveles posibles, que implicaban que respondían copiando literalmente el indicador, sin aplicarlo al proyecto estudiado (nivel 1) o bien no tenían en cuenta la pregunta incluida en el indicador (nivel 2). Sólo entre el 7% y el

35% dependiendo del indicador fueron capaces de aplicarlo a nivel 3, siendo lo más sencillo valorar el lenguaje matemático utilizado en el proyecto y lo más complejo analizar la argumentación.

En otro ejemplo, Gea (2014) trabaja con futuros profesores de educación secundaria obligatoria y bachillerato un proyecto orientado al estudio de la correlación y regresión, cuya idoneidad didáctica es analizada por los mismos. Los resultados se han publicado en Gea, Batanero, Arteaga y Estepa (2019), Gea, Batanero y Estrada (2019) y Gea y Begué (2021). En estas investigaciones, el análisis de las producciones de los participantes se ha completado utilizando los cinco niveles que empleamos en nuestro trabajo, los tres últimos de los cuales implican que se responde a la pregunta, aplicando los contenidos del proyecto. Los resultados del análisis de la idoneidad epistémica fueron mucho mejores que los obtenidos por Arteaga, debido a que Gea realizó su investigación con futuros profesores que contaban con una mayor formación matemática. Se obtuvieron en general niveles de aplicación 3, 4 o 5, siendo lo más sencillo de valorar la variedad del lenguaje matemático (80% de participantes alcanzando los niveles 4 y 5), la existencia de tareas donde el alumno deba reconocer objetos matemáticos (72,3%) y la relación de los objetos matemáticos dentro del proyecto (70%). Lo más difícil fue reconocer el nivel adecuado de argumentación, donde sólo el 30% de los participantes llegó a los niveles superiores.

En el ejemplo incluido en este capítulo se analizan los resultados de la evaluación de los informes producidos por un grupo de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria obligatoria y bachillerato en su análisis de la idoneidad epistémica de un taller que incluye la estadística descriptiva e inferencia estadística, dirigido a estudiantes de bachillerato (17-18 años). Dicha actividad fue una acción formativa para los futuros profesores, en la que se evaluó y desarrolló la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los participantes.

## **MATERIAL Y MÉTODOS**

### **Muestra participante y contexto**

El estudio que se describe como ejemplo se llevó a cabo en el curso 2019-2020, dentro del programa de Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato, especialidad de matemáticas, que es obligatorio en España para poder ejercer como profesor de matemáticas en ESO (estudiantes de 12 a 15 años) y bachillerato (estudiantes de 16 y 17 años). Este máster se realiza una vez que se ha finalizado un grado sobre una disciplina específica (estudios universitarios de 4 años de duración), que tiene un carácter formal y en el que no se proporcionan conocimientos pedagógicos. El citado máster se orienta a salvar esta carencia en la formación inicial del profesor (Muñiz-Rodríguez et al., 2016), y proporciona al futuro profesor

conocimientos didácticos, curriculares y de organización escolar, así como experiencia en la práctica de enseñanza.

La muestra incluyó a todos los participantes en un curso de la asignatura *Innovación docente e iniciación a la investigación en didáctica de la matemática* en el citado máster, en total 62 estudiantes, que constituían la totalidad del curso. La mitad de los participantes habían cursado un grado universitario de matemáticas o estadística y el resto otras carreras de ciencias, arquitectura o ingeniería. Los participantes estaban cursando simultáneamente otra asignatura sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. El taller se organizó en tres sesiones, cada una de dos horas de duración:

- En la primera sesión, se propuso a los futuros profesores un proyecto estadístico que posteriormente podían utilizar con sus estudiantes y que se describe con más detalle en la sección siguiente. Los participantes trabajaron por parejas para resolver las actividades del proyecto y completar un informe escrito con los cálculos, gráficos y conclusiones obtenidas, que debían estar apoyadas en el análisis de los datos.
- En la segunda sesión se expusieron y debatieron las soluciones al proyecto, siendo los mismos participantes quienes discriminaron las soluciones correctas e incorrectas a las tareas planteadas. A continuación, también trabajando por parejas, analizaron los objetos matemáticos necesarios en el trabajo con el proyecto y describieron las principales dificultades que podrían tener los estudiantes a los que iba dirigido.
- En la tercera sesión, el formador de profesores presentó los fundamentos de la idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores en todas sus dimensiones, utilizando ejemplos de cómo se ponen de manifiesto estos indicadores y cómo se puede mejorar la idoneidad didáctica. Previamente, los futuros profesores habían leído el texto de Godino (2013) sobre la idoneidad didáctica. A continuación, se proporcionó a los futuros profesores una guía de análisis, en que los diferentes indicadores de la idoneidad didáctica propuestos por Godino (2013) se redactaron en forma de preguntas que los futuros profesores debían responder. Se les pidió utilizar la guía para valorar el proyecto realizado en las dos primeras sesiones. Se les dio unos días para completar la tarea y cada participante entregó su informe individualmente, por medio de una plataforma disponible para la asignatura.

### **Descripción del proyecto estadístico**

A continuación, se describe un proyecto sobre estadística descriptiva, con algunas preguntas adicionales para bachillerato, pues en el currículo para esta etapa se incluyen contenidos de inferencia.

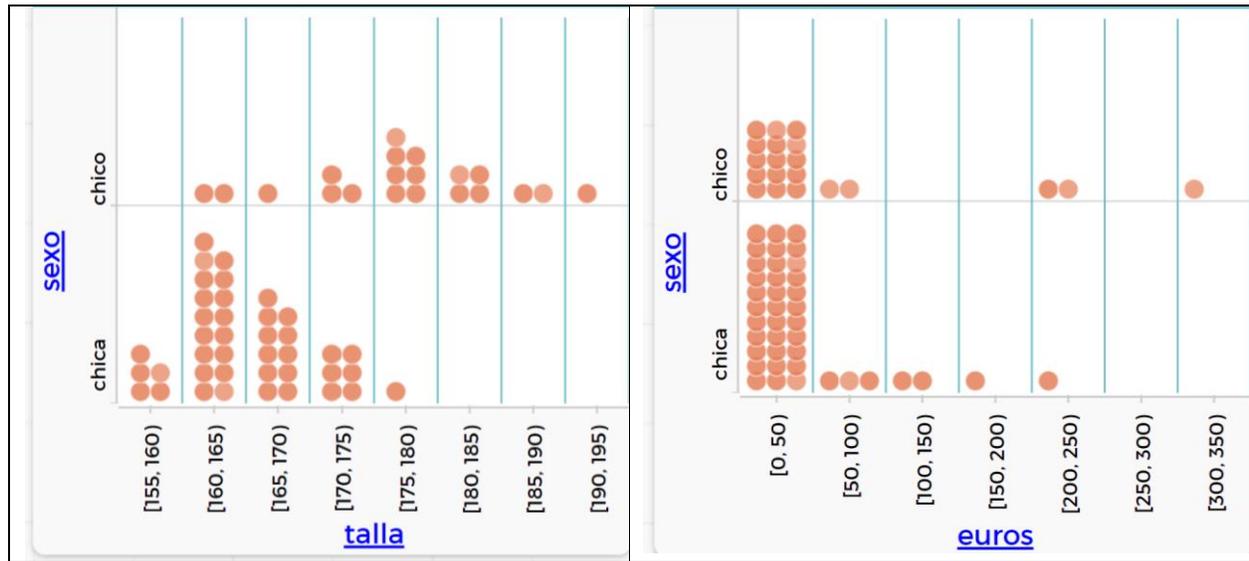
Se trata de determinar cuál sería el alumno más representativo de la clase, considerando diferentes variables. En la primera sesión se preparó una lista de las variables a incluir en el estudio, analizando las diferentes formas en que podrían obtenerse los datos:

- a) Por simple observación: como el género, color de pelo y ojos, si el alumno usa o no gafas;
- b) Se requiere una medición: como el peso, talla, perímetro de cintura, anchura de hombros o longitud de brazos extendidos;
- c) Es necesario preguntar a los alumnos: realizar una pequeña encuesta en cuanto a qué deporte practica, número del calzado, cuántas horas duerme, etc.

Elegidas algunas de estas variables, en la que se incluyeron variables nominales, discretas y continuas con distribuciones simétricas y asimétricas, cada futuro profesor aportó sus datos, que se codificaron en una hoja Excel compartida entre los participantes mediante la plataforma disponible para la asignatura. Para el análisis descriptivo se utilizó el software libre CODAP (<https://codap.concord.org/>). Se pidió a los futuros profesores, en primer lugar, realizar el estudio univariante, representando gráficamente las variables, calculando las medidas de posición central y dispersión, y analizando su simetría. Podrían discutir si hay algún valor atípico para alguna de estas variables y en ese caso, por qué sería preferible la mediana a la media, como medida de posición central. Cada uno podría calcular en qué percentil se situaría en cada medida.

Se pidió relacionar las variables cuantitativas mediante el estudio de la regresión, ya que CODAP permite representar los diagramas de dispersión y calcular la recta de mínimos cuadrados, proporcionando además el valor del cuadrado del coeficiente de correlación. Igualmente, se pidió explorar el significado del coeficiente de correlación lineal de Pearson (al cuadrado, como medida de la bondad de ajuste), analizando diferentes rectas de regresión, por ejemplo, comparando la regresión del peso sobre la talla con la regresión de la longitud de brazos sobre la talla. Esta última obtuvo mejor ajuste, explicando el modelo de regresión el 75% de la varianza de la longitud de brazos, mientras que del peso solo fue explicado un 51% por el modelo.

**Figura 2.** Representación gráfica de algunas variables del proyecto en función del género



**Fuente:** Elaborado por los autores

Las distribuciones de las variables fueron dispares en chicos y chicas, por lo que se pidió estudiarlas y representarlas por separado (Figura 2) y analizar en qué variables se aprecian diferencias. Pensando en los estudiantes de bachillerato, que estudian conocimientos de inferencia, se pidió analizar si las diferencias eran estadísticamente significativas y calcular los intervalos de confianza, interpretando su significado. Para ello, en la hoja Excel de datos el formador de profesores implementó el cálculo de intervalos de confianza.

### Valoración de la idoneidad del proyecto y categorías de análisis

Como se ha indicado, en la tercera sesión del taller se pidió a los participantes valorar la idoneidad didáctica para la enseñanza de la estadística en bachillerato del proyecto descrito en el punto anterior, con el cual habían trabajado. Se pidió a los estudiantes que respondiesen con detalle, justificando su valoración. Por limitaciones de espacio, nos restringimos a describir los resultados del análisis de la idoneidad epistémica, para lo cual los futuros profesores usaron la pauta que se reproduce en la Tabla 2.

Dicha tarea de reflexión pretende desarrollar la competencia de análisis de valoración de las prácticas matemáticas y el conocimiento especializado para la enseñanza de la estadística, según el modelo CCDM (Godino et al., 2017), que es específica del trabajo del profesor, quien ha de ser capaz de valorar las actividades que propone a sus estudiantes. De este modo, el análisis de los informes de valoración de la idoneidad epistémica permite al formador de profesores evaluar y desarrollar el

conocimiento especializado del contenido del profesor en formación. Al ser el informe una parte de la calificación en la asignatura, los estudiantes lo completaron lo mejor posible y con interés.

**Tabla 2.** *Pauta de análisis de la valoración de la idoneidad epistémica*

<b>Componente</b>	<b>Justificación</b>
Situaciones-problemas	P1. Las situaciones-problemas que se presentan, ¿te parece que son útiles para contextualizar, aplicar y ejercitar los contenidos de estadística? ¿Por qué? P2. ¿Se proponen situaciones para que el alumno de bachillerato invente nuevos problemas? ¿Cuáles?
Lenguajes	P3. ¿Se usan diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos? ¿Cuáles? P4. ¿Hay actividades de representación e interpretación del lenguaje matemático? ¿Cuáles?
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	P5. ¿Qué conceptos, propiedades y procedimientos de estadística habría que explicar previamente para trabajar este proyecto? P6. ¿Se proponen tareas donde los alumnos tengan que reconocer definiciones, propiedades o procedimientos? ¿Cuáles?
Argumentos	P7. ¿Son las explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas para bachillerato? P8. ¿Se incluyen situaciones donde el alumno tenga que argumentar? ¿Cuáles?
Relaciones	P9. ¿Los contenidos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí en el proyecto?

Una vez recogidas las respuestas de los profesores en formación a cada una de las preguntas propuestas en la Tabla 2, se realizó un análisis de las mismas, asignando a cada una un nivel de competencia. Estos niveles son los siguientes, comunes a todas las preguntas:

- Nivel 0: se deja en blanco la respuesta a una pregunta, o se da una respuesta sin sentido, lo que muestra que no se tiene competencia para aplicar el correspondiente indicador de idoneidad epistémica.
- Nivel 1: el participante se limita a copiar casi literalmente el indicador, sin desarrollar una reflexión o aplicarla al proyecto analizado.
- Nivel 2: la respuesta no se centra específicamente en el proyecto desarrollado, sino en aspectos anecdóticos o no estrictamente matemáticos en relación a lo que se pregunta. En otros casos, se responde en forma parcialmente correcta, bien por omitir parte de la pregunta o cometer errores.
- Nivel 3: se responde a la pregunta identificando contenidos estadísticos del proyecto, pero la respuesta no se centra en el aspecto recogido en la pregunta.

La idoneidad didáctica como recurso en la formación del profesorado para enseñar estadística

- Nivel 4: se responde en forma consistente a lo que se pregunta, utilizando contenidos matemáticos del trabajo en el proyecto, pero se razona mediante un único ejemplo.
- Nivel 5. se responde en forma consistente a lo que se pregunta, utilizando contenidos matemáticos del proyecto y razonando mediante dos o más ejemplos.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se presenta un resumen de los resultados del análisis de las valoraciones de los profesores en formación del proyecto trabajado, organizadas en torno a los componentes de la idoneidad epistémica. Se explicitan las respuestas esperadas en las preguntas correspondientes, que fueron consensuadas por los autores de este trabajo, una vez observado el desarrollo del trabajo con el proyecto y mediante análisis de cada uno de los indicadores. Se transcribe un ejemplo de respuesta en cada nivel, para describir la competencia de análisis de la idoneidad del participante en cada caso.

### Situaciones-problemas

Las preguntas y respuestas esperadas en este componente son las siguientes:

P1. *Las situaciones-problemas que se presentan, ¿te parece que son útiles para contextualizar, aplicar y ejercitar los contenidos de estadística? ¿Por qué?* Los futuros profesores deberían observar que el proyecto planteado sirvió para plantear una muestra representativa de situaciones-problemas de estadística descriptiva e inferencia estadística, contenidos incluidos en el currículo español de bachillerato. La recogida de datos reales de los participantes llevó al estudio de los tipos de variable estadística y la elaboración de tablas, gráficos y resúmenes estadísticos, que hubo que interpretar. Se propuso la comparación de medias de diferentes variables, lo que implicó trabajar con estimación y variabilidad muestral y al pedir estudiar la significatividad de las diferencias, se trabajó con contraste de hipótesis e intervalos de confianza.

P2. *¿Se proponen situaciones para que el alumno de bachillerato invente nuevos problemas? ¿Cuáles?* Aunque el proyecto en sí mismo constituye un problema extra-matemático, esperábamos que los futuros profesores notasen que, al tratar de resolverlo, habría que plantear nuevos problemas, como, por ejemplo, elegir el tipo de tabla y gráfico preferible para representar los datos, decidir los estadísticos preferibles para comparar las distribuciones y elegir el nivel de significación del contraste y coeficiente de confianza del intervalo de confianza. Igualmente se debe elegir la escala más conveniente para representar cada gráfico.

Transcribimos a continuación algunos ejemplos de respuestas: En la primera, T1 responde la pregunta sin desarrollarla, por lo que la situamos en nivel 1. En la segunda, el nivel de aplicación es 2, porque CS se centra en aspectos anecdóticos al evaluar la existencia de situaciones de problematización

en la pregunta P2. Por otro lado, AZ, en la primera pregunta se centra en el proyecto, pero no responde exactamente a la pregunta, pues no indica ejemplos de situaciones que contextualizan el conocimiento estadístico o qué conocimiento se contextualiza y, por tanto, lo situamos en nivel 3. En cambio, BO (nivel 4) es capaz de identificar el concepto de intervalo de confianza como un contenido contextualizado en el proyecto, en la pregunta P1, pero solo propone un ejemplo. Por último, BC (nivel 5) responde correctamente la pregunta P1, presentando varios ejemplos de conceptos contextualizados en el proyecto.

Nivel 1: Sí, útiles son, porque de hecho se usaron (IT, P1).

Nivel 2: Sí. A partir de la actividad, donde los alumnos observan la inferencia estadística, el alumno es capaz de reconocer situaciones o proponer problemas donde la inferencia estadística tiene un papel clave, como puede ser la lotería o el bingo (CS, P2).

Nivel 3: Bajo mi punto de vista sí lo son pues las planteadas en el proyecto son útiles y fáciles de contextualizar (AZ, P1).

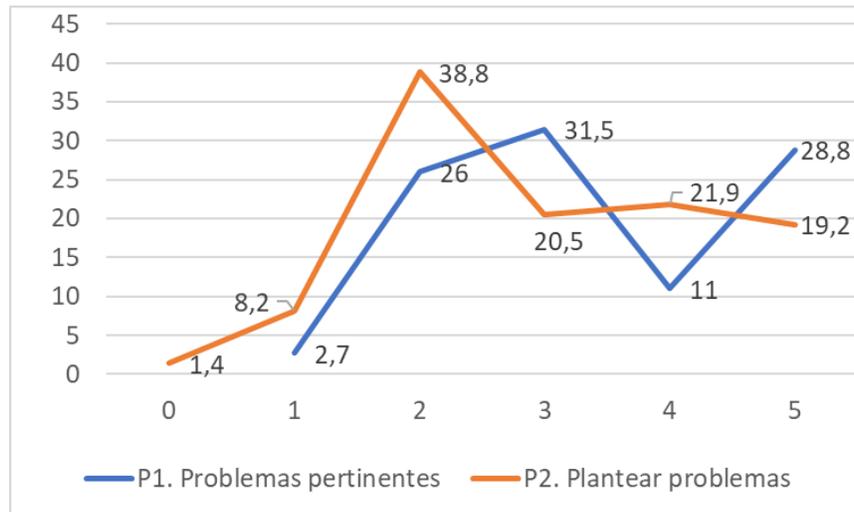
Nivel 4. Sí. En el trabajo realizado en clase se puede interpretar bastante bien la inferencia estadística, por ejemplo, en los intervalos de confianza. Se presenta además la oportunidad de interpretarla (BO, P1).

Nivel 5: Considero que los problemas presentados son adecuados ya que abarcan un amplio abanico de conceptos y a su vez permiten entenderlos de forma sencilla. Me resultaron especialmente interesantes las actividades relacionadas con la comprobación de las diferencias entre chicos y chicas ya que se pueden llevar a cabo con un amplio abanico de alumnos y permiten clarificar numerosos conceptos tales como: frecuencia absoluta, moda, mediana, gráficos, tablas, etc. (BC, P1).

En la Figura 3 presentamos los resultados obtenidos en el análisis de las respuestas a las dos preguntas relacionadas con las situaciones problemas. Se observa que sólo el 39,8% de los participantes (28,8% a nivel 5 y 11% a nivel 4) en la pregunta 1 y, 41,1% (28,8% a nivel 5 y 21,9% a nivel 4) en la pregunta 2 han sido capaces de analizar adecuadamente la utilidad de los problemas planteados para contextualizar contenidos de estadística. El resto de estudiantes no se centra en contenidos del proyecto o en el indicador descrito en la pregunta.

Cabe destacar los resultados de la valoración de los futuros profesores en relación a la invención o problematización de situaciones (Pregunta 2), puesto que alcanza un porcentaje de casi el 10% en los niveles 0 y 1, y del 38,8% en el nivel 2. Concluimos que los futuros profesores de la muestra no mostraron gran competencia en la determinación de si los problemas planteados en el proyecto eran útiles o no para contextualizar los contenidos estadísticos ni en identificar las situaciones de problematización del proyecto.

**Figura 3.** Porcentaje de participantes que alcanza cada nivel al evaluar la idoneidad de las situaciones-problemas



**Fuente:** Elaboración propia

### Lenguaje matemático

Las respuestas esperadas a las preguntas P3 y P4, en las que se pide a los profesores en formación analizar el lenguaje matemático utilizado en el proyecto, son las siguientes:

P3. *¿Se usan diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos? ¿Cuáles?* En el trabajo con el proyecto estadístico planteado, los futuros profesores han debido emplear lenguaje matemático diverso. Por ello se esperaba que ellos identificaran, en primer lugar, los términos de los conceptos implicados, tales como dato, variable y sus valores, distribución, media, varianza, intervalo de confianza, amplitud, etc. Además, debieran reconocer los diferentes gráficos construidos (líneas, barras, tronco y hojas) y el uso de la hoja Excel para realizar cálculos de resúmenes estadísticos, contrastes e intervalos de confianza. Se añaden los símbolos matemáticos empleados para dar las soluciones.

P4. *¿Hay actividades de representación e interpretación del lenguaje matemático? ¿Cuáles?* En el proyecto se incluyeron gran número de situaciones de este tipo, que se esperaba fuesen reconocidas por los futuros profesores. En primer lugar, los estudiantes debían elaborar varias tablas y gráficos, que además tenían que interpretar para obtener conclusiones sobre las diferencias entre chicos y chicas, entre otras variables que escogieran. Igualmente, fue necesario interpretar los resultados de los intervalos de confianza para decidir cuáles de las diferencias observadas era estadísticamente significativa. Mostramos, a continuación, ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos indicadores. GC (nivel 1) responde a la pregunta atendiendo a los recursos utilizados en el proyecto en lugar de identificar medios de representación o contenidos referidos al mismo; GZ (nivel 2)

responde con contenidos del proyecto (recogida y análisis de datos), pero no a la pregunta sobre representación e interpretación del lenguaje. LR (nivel 3) se centra en el desarrollo del proyecto en cuanto a la explicación de procedimientos, pero no en la existencia de actividades de representación. Los dos últimos participantes responden correctamente con uno y varios ejemplos respectivamente (niveles 4 y 5).

Nivel 1: Sí, porque se utilizan recursos diferentes para enseñar algo que siempre nos lo han enseñado en la pizarra (GG, P3).

Nivel 2: Sí, pues se presenta un aprendizaje basado en proyectos centrados en modelar situaciones en las que se analizan datos (GZ, P4).

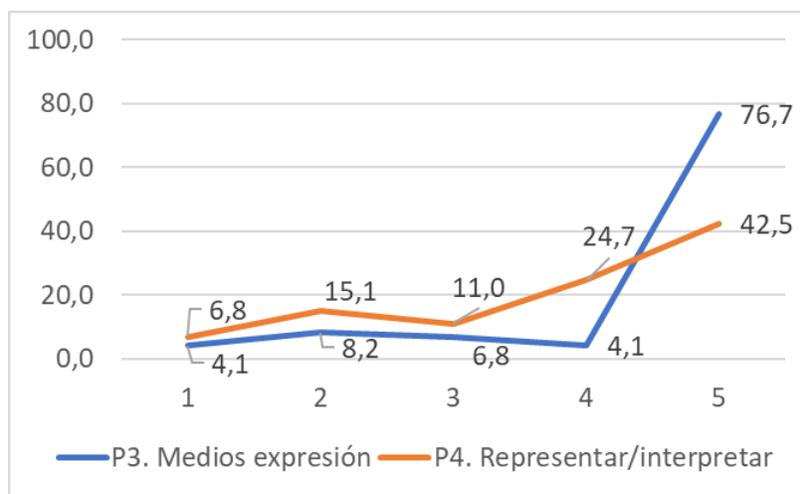
Nivel 3: Sí, se explican las expresiones gráficas y escritas en la pizarra (LR, P3).

Nivel 4: Sí, en la actividad 2 se pide analizar los datos, representarlos mediante gráficos y utilizando los diversos elementos de la estadística descriptiva se interpretan los gráficos, es decir, el lenguaje matemático (GP, P4).

Nivel 5: Sí, por ejemplo, en la resolución de problemas de intervalos de confianza, interpretación de resultados obtenidos a partir de gráficos, cálculo de probabilidades... (LL, P4).

En la Figura 4 se exponen los niveles de aplicación en las dos preguntas relacionadas con el lenguaje matemático. Fue más sencillo reconocer y dar ejemplos de la variedad de lenguaje matemático empleado, pues la mayor parte de los participantes (76,7%) llega al nivel 5 en la respuesta a la pregunta 3, mientras en la 4 (actividades de interpretación y representación) sólo el 42,5% llega a este nivel, aunque también el 24,7% alcanza el nivel 4, respondiendo correctamente, aunque sólo con un ejemplo.

**Figura 4.** Porcentaje de participantes que alcanza cada nivel al evaluar la idoneidad del lenguaje



**Fuente:** Elaboración propia

### **Reglas (conceptos, propiedades y procedimientos)**

El proyecto estaba dirigido a introducir la inferencia estadística, más concretamente, el intervalo de confianza y contraste de hipótesis partiendo de un estudio descriptivo previo, en que los estudiantes recogían sus propios datos. Se esperaba que los futuros profesores reconocieran los conceptos, propiedades y procedimientos asociados y, para ello, se les plantearon dos preguntas diferentes:

P5. *¿Qué conceptos, propiedades y procedimientos de inferencia estadística habría que explicar previamente para trabajar este proyecto?* Durante el desarrollo del proyecto no se dieron definiciones ni se propusieron procedimientos, puesto que se trataba de una actividad abierta, en que se dio a los estudiantes libertad para usar sus conocimientos previos. Por tanto, antes de proponer el proyecto a los participantes, el profesor debiera asegurarse de que estos conocieran los elementos de estadística descriptiva e inferencia estadística. Entre los primeros, es de esperar que los participantes identificaran el concepto de variable y distribución, los tipos de variables, tablas y gráficos, así como medias de posición central, dispersión y asociación. Entre los segundos, que reconocieran el concepto de estimador, intervalo de confianza y nivel de significación. También se preveía que hicieran referencia a algunas propiedades y procedimientos en torno a dichos conceptos, así como sus relaciones. Todo esto también podría ser indicado atendiendo a la fase de corrección de las soluciones del proyecto.

P6. *¿Se proponen tareas donde los alumnos tengan que reconocer definiciones, propiedades o procedimientos? ¿Cuáles?* En el proyecto hubo muchas ocasiones para ello, pues, por ejemplo, para el análisis descriptivo se dio libertad para utilizar los gráficos y estadísticos deseados. Por ello, el participante debiera pensar en los gráficos que conocía y cuál era más adecuado para representar los datos recogidos. Igualmente, qué medida de posición central es preferible para representar los datos. Ello llevaría a que se deban comparar, y en cierto sentido negociar, las definiciones, propiedades y procedimientos empleados en la resolución del proyecto.

Algunos ejemplos de respuestas a las preguntas anteriores se exponen a continuación. TM (nivel 1) responde casi literalmente, mientras GQ (nivel 2) responde sin centrarse específicamente en el proyecto. GZ se centra en el mismo, pero en vez de responder a la pregunta planteada, responde sobre el tipo de guía que el profesor proporciona al estudiante. GS y BC (niveles 4 y 5) responden correctamente la pregunta, refiriéndose al proyecto y proporcionando uno o varios ejemplos correctos.

Nivel 1: Sería acertado refrescar los conceptos y funciones básicas (TM, P5).

Nivel 2: Si, debe saber el cálculo de los procedimientos (GQ, P6).

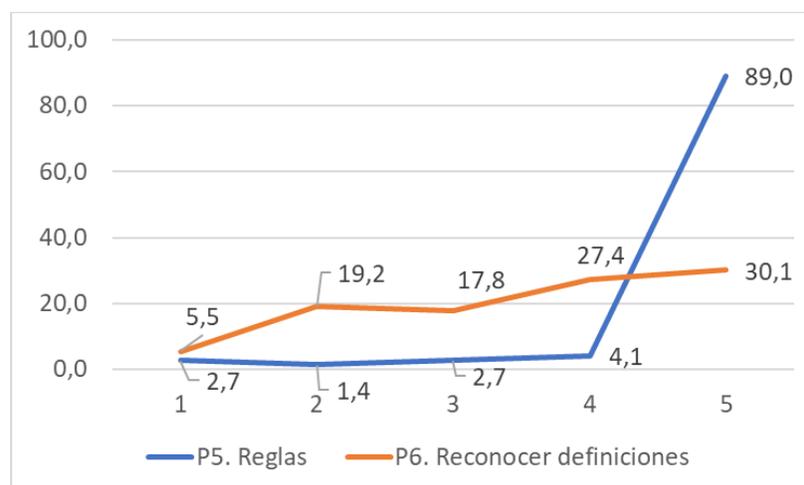
Nivel 3: En el proyecto dirigido a estudiantes, los alumnos tienen mayor guía por parte del docente (GZ, P6).

Nivel 4: En todas hay que tener un conocimiento de las propiedades y procedimientos y reconocer definiciones desde la pregunta donde tienes que analizar la correlación entre peso y altura (GS, P6).

Nivel 5: Conceptos: Población, muestra, media, desviación típica, distribución, distribución normal, experimento aleatorio, sucesos, espacio muestral, variable, valores, frecuencia, frecuencia absoluta, teorema central del límite, mediana, moda.). Propiedades: Proporcionalidad de los rectángulos en los gráficos de barras. Si la muestra es mayor que 30 la media muestral sigue una distribución normal. Procedimientos: Hacer tablas de frecuencias, calcular intervalos de confianza (BC, P5).

En la Figura 5 se exponen los niveles de aplicación en las dos preguntas relacionadas con las reglas. Fue mucho más sencillo para los futuros profesores identificar las reglas necesarias para la resolución del proyecto (conceptos, procedimientos y proposiciones), ya que el 89% de los participantes respondieron la pregunta P5 a nivel 5, es decir, correctamente y dando varios ejemplos. Por otro lado, en la pregunta P6, sobre si se proponen situaciones en que el estudiante tenga que reconocer reglas, fue algo más confusa, puesto que solo el 30,1% pudo encontrar dos o más ejemplos de tareas del proyecto en que se debieran generar, aunque otro 27,4% pudo responder correctamente con un único ejemplo.

**Figura 5.** Porcentaje de participantes que alcanza cada nivel al evaluar la idoneidad de las reglas



Fuente: Elaboración propia

### Argumentación y relaciones

A continuación, se analizan las últimas tres preguntas de la pauta de análisis que tratan de las demostraciones/comprobaciones y las relaciones entre objetos matemáticos.

P7. *¿Son las explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas para bachillerato?* El proyecto trabajado por los futuros profesores estaba dirigido a estudiantes de bachillerato (17-18 años), quienes

tienen madurez suficiente para seguir las explicaciones proporcionadas a lo largo del mismo. Se trató, además, de evitar el lenguaje y demostraciones formales, haciendo abundante uso de ejemplos y contraejemplos, gráficos y simulaciones como auxiliar a la argumentación.

P8. *¿Se incluyen situaciones donde el alumno tenga que argumentar? ¿Cuáles?* Este tipo de situaciones fue muy abundante en el proyecto, pues los futuros profesores debían exponer sus conclusiones en cada paso, utilizando los resultados del análisis estadístico. Además, debían justificar tanto los gráficos utilizados en el análisis como si los resultados de con los intervalos eran o no estadísticamente significativos. Se animó en todo momento a los participantes a que argumentaran y debatieran para exponer sus soluciones al proyecto.

P9. *¿Los contenidos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí en el proyecto?* A lo largo de todo el proyecto se relacionaron los objetos matemáticos, comenzando con relacionar los gráficos elegidos y el tipo de resúmenes estadísticos, según el tipo de variable, y también con otros conceptos matemáticos, como sistemas numéricos o proporcionalidad. En el trabajo de inferencia se conectan conceptos como coeficiente de confianza, tamaño muestral y amplitud del intervalo, así como los intervalos y el contraste de hipótesis. Todos estos objetos se relacionan con los problemas planteados, la argumentación y el lenguaje matemático.

Algunos ejemplos de respuestas a las preguntas anteriores se exponen a continuación. Como en los componentes anteriores, los primeros niveles implican respuestas casi literales, no centradas en el proyecto o centradas en contenidos del proyecto no planteados en la pregunta; mientras los dos últimos implican una respuesta correcta, centrada en el proyecto y con uno o varios ejemplos, respectivamente.

Nivel 1: En toda la clase (MD, P8).

Nivel 2: Las explicaciones y comprobaciones son adecuadas si no son extensas y difíciles de asimilar (LG, P7).

Nivel 3: Sí lo son, se adaptan a los contenidos indicados en el bloque de Estadística y Probabilidad en el Real Decreto (AR, P7).

Nivel 4: Si, ya que a lo largo de éste se van pidiendo una serie de cálculos que dan como resultado datos que se van a utilizar posteriormente de forma progresiva. Por poner un ejemplo para el cálculo de la desviación típica hace falta la media (DC, P9).

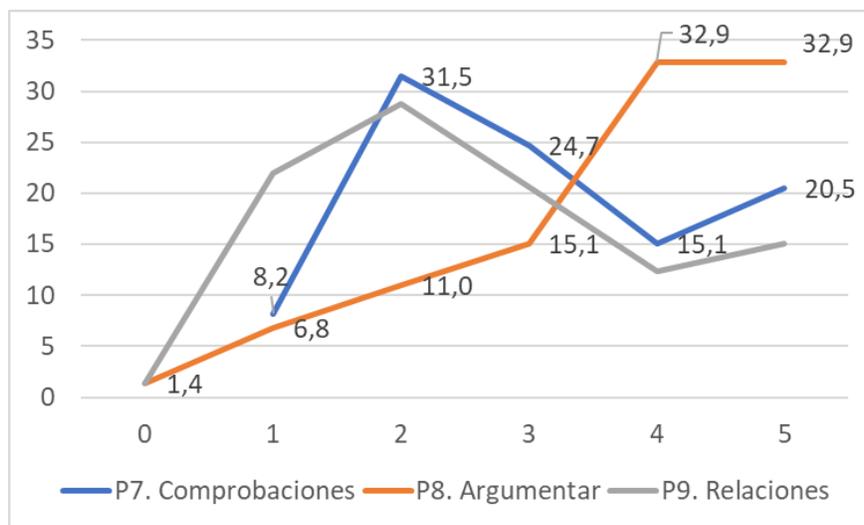
Nivel 5: Si, cada parte se conecta con la anterior para darle una coherencia a la tarea completa: primero se obtienen los datos de las variables estudiadas para toda la clase y se recogen en tablas de frecuencia; luego se analizan los datos representándolos gráficamente y calculando los parámetros estadísticos; a continuación se pide sacar conclusiones e interpretar los resultados en su contexto; y finalmente se

introduce el análisis inferencial para valorarse las diferencias encontradas (entre chicos y chicas) son estadísticamente significativas (GO, P9).

En la Figura 6 se exponen los niveles de aplicación en las dos preguntas relacionadas con la argumentación y las relaciones entre objetos matemáticos. La pregunta mejor respondida fue sobre la oportunidad del estudiante de enfrentarse a situaciones de argumentación, puesto que la mayor parte de las tareas del taller pedían razonar la respuesta. Así el 32,9% de los participantes aplicó esta pregunta a nivel 4, dando ejemplo correcto de una tarea en que se pidiese argumentar, y el mismo porcentaje pudo dar dos o más ejemplos. Hubo más dificultad en reconocer si el tipo de explicaciones dadas a lo largo del taller era adecuado para los estudiantes, puesto que algunos futuros profesores interpretaron que la pregunta se refería a si la argumentación dada por el formador de profesores durante el taller era apropiada para ellos, por lo cual un 31,5% aplicó la pregunta a nivel 2 (sin centrarse en el proyecto en sí o parcialmente correcta) y otro 24,7% se centró en el proyecto, pero no en la argumentación.

Fue también muy difícil identificar las relaciones entre objetos matemáticos dentro del proyecto, ya que únicamente el 15,1% encontró dos o más situaciones concretas en que se pusieran en juego estas relaciones y el 12,3% encontró una única situación. El resto aplicó incorrectamente o sin centrarse en el proyecto este indicador.

**Figura 6.** Porcentaje de participantes que alcanza cada nivel al evaluar la idoneidad de las argumentaciones y relaciones



**Fuente:** Elaboración propia

## CONCLUSIONES

El taller descrito en nuestro trabajo, así como los desarrollados en estudios previos, junto al análisis de su idoneidad didáctica, resultaron interesantes y motivadores para los futuros profesores participantes, quienes sentían la necesidad de mejorar los componentes de su conocimiento didáctico,

en concordancia con lo expuesto en Muñiz-Rodríguez et al. (2016). El proyecto con el que trabajaron les ofreció un modelo que podían utilizar con sus futuros estudiantes para mejorar su cultura estadística, mientras el análisis de la idoneidad didáctica se vio como un recurso de apoyo en la planificación y mejora de su propia enseñanza futura.

Los informes sobre la idoneidad epistémica producidos por los futuros profesores participantes en el ejemplo que se ha descrito tuvieron mayor calidad que los del trabajo de Arteaga (2011), siendo mucho menor el porcentaje de participantes que valoró a nivel 2 o inferior que el resultante en el trabajo de Arteaga. Ello se explica porque en este caso se trata de futuros profesores de educación secundaria, que tienen una alta preparación matemática que repercute en su conocimiento especializado del contenido.

Encontramos resultados similares al estudio de Gea et al. (2019) con algunas diferencias. Fue más difícil en nuestro caso el reconocimiento de la utilidad de los problemas para contextualizar los contenidos de estadística (preguntas P1 y P2) y la puesta en relación de los diferentes contenidos (P9), seguramente porque nuestro estudio abarcaba contenidos de inferencia, que no se tuvieron en cuenta en el trabajo de Gea et al. (2019). Los resultados de valoración del lenguaje matemático (P3 y P4) fueron muy similares a los del citado estudio y mejores en la identificación de reglas (P5 y P6).

Debido a la limitación de espacio, no nos ha sido posible presentar el análisis de los otros componentes de la idoneidad didáctica, aunque los futuros profesores los completaron para las diferentes idoneidades cognitiva, afectiva, mediacional, ecológica e interaccional. La discusión en sesiones posteriores de estos informes permitió el desarrollo de las facetas relacionadas con su conocimiento didáctico sobre la estadística. En resumen, pensamos que este trabajo, así como los citados en los antecedentes completan la investigación del conocimiento del profesor para enseñar estadística, según el modelo CDM (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015).

Para finalizar, pensamos que esta línea de investigación está todavía muy poco explotada y es posible centrarse en otros objetos estadísticos, o mejorar la pauta de evaluación de la idoneidad didáctica centrándose más específicamente en estadística o probabilidad, en la línea de Beltrán-Pellicer et al. (2018), o Godino et al. (2014). Sería también interesante la elaboración de trabajos comparados donde se aplicase el mismo método para evaluar los conocimientos didácticos de profesores en otros países latino americanos, para ampliar la generalizabilidad de los estudios realizados hasta la fecha.

### **Agradecimiento**

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* [tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada].
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Gea, M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 279-297.
- Arteaga, P., Batanero, C. y Gea, M. M. (2017). La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre estadística: un estudio de evaluación exploratorio. *Educação Matemática Debate*, 1(1), 54-75. <http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v1n12017a03>.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/LASE study*. Springer.
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, 32(61), 526-548. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11>.
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía*, 78(275), 27-49. <https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07>
- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2021). Criterios de idoneidad emitidos por futuros maestros de primaria en la valoración de vídeos educativos de matemáticas. *Uniciencia*, 35(2), 1-17. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.19>.
- Gea, M.M. (2014). *La correlación en Bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de futuros profesores* [tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada].
- Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Estepa, A. (2019). Conocimiento especializado de correlación y regresión en futuros profesores de educación secundaria. *Profesorado*, 23(2), 397-419. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i2.9693>.
- Gea, M. M., Batanero, C. y Estrada, A. (2019). Evaluación de la componente afectiva del trabajo con proyectos estadísticos por futuros profesores. *Acta Scientiae*, 21(3) 112-130. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5092>.
- Gea, M. M. y Begué, N. (2021). Una experiencia de formación para futuros profesores en correlación y regresión. *Realidad y Reflexión*, 53(53), 118-135. <https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10892>.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(1), 111-132.

- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>.
- Godino, J., Rivas, H. y Arteaga, P. (2014). Suitability criteria for teachers' education programs in mathematics and statistics education. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute.
- Muñiz-Rodríguez, L., Velázquez, P. A., Muñiz, L. J. R. y Valcke, M. (2016). ¿Hay un vacío en la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria en España respecto a otros países? *Revista de Educación*, 372, 106-132. <http://dx.doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2015-372-317>.
- Pino-Fan, L. R. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Samá, S. y Amorim, M. É. (2021). Dimensão afetiva e epistêmica da idoneidade didática na formação inicial de professores que ensinam Estatística. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(4), 303-332. <https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p303-332>.
- Salcedo, A., González, J. y González, J. (2021). Lectura e interpretación de gráficos estadísticos, ¿cómo lo hace el ciudadano? *Paradigma*, 42(1), 61-88. <http://dx.doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p61-88.id1018>.
- Scheaffer, R. L. (2006), Statistics and mathematics: On making a happy marriage. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). NCTM.
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153-172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Educación Matemática*, 29(3), 79-108. <http://dx.doi.org/10.24844/EM2903.03>.
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2021). Analysing probability teaching practices in primary education: What tasks do teachers implement? *Mathematics*, 9, 2493. <https://doi.org/10.3390/math9192493>.

## **DIDACTIC SUITABILITY AS A RESOURCE TO TRAIN TEACHERS TO TEACH STATISTICS**

### **ABSTRACT**

The teacher's didactic-mathematical knowledge considers both mathematical, didactic and metadidactic knowledge, all of which are relevant in the training of statistics teachers. The aim of the paper is to describe our training experiences in which pre-service teachers are asked to analyse the didactic suitability of statistical study processes as a resource to assess and develop their knowledge. As an example, we describe the analysis carried out by a sample of high school pre-service teachers of the epistemic suitability of a statistical project. The examination of their written responses makes it possible to define the levels achieved in this analysis and to evaluate the epistemic facet of their knowledge. The participants show a good or reasonable level in the identification of rules and mathematical language, but their training needs to be reinforced in the identification of relationships, evaluation of the appropriateness of the tasks and arguments used.

Key-words: Didactic-mathematical knowledge, didactic suitability, training statistics teachers, assessing epistemic suitability,

## **IDONEIDADE DIDÁCTICA COMO UM RECURSO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA**

### **RESUMO**

O conhecimento didáctico-matemático do professor considera tanto o conhecimento matemático, didáctico e metadidáctico, todos eles relevantes para a formação de professores de estatística. O objectivo do documento é descrever a nossa experiência de formação na qual os professores formandos são solicitados a analisar a adequação didáctica dos processos de estudo estatístico como um recurso para a avaliação e desenvolvimento dos seus conhecimentos. Como exemplo, apresentamos a análise realizada por uma amostra de professores em formação sobre a adequação epistémica de um projecto estatístico. O estudo das suas respostas escritas permite definir os níveis alcançados nesta análise e avaliar a faceta epistémica dos seus conhecimentos. Os participantes demonstram um nível bom ou razoável na identificação de regras e linguagem matemática, mas a sua formação precisa de ser reforçada na identificação de relações, avaliação da adequação do conjunto de tarefas e dos argumentos utilizados.

Palavras-chave: Conhecimentos didáctico-matemáticos; idoneidades didáctica, formação de professores de estatística, avaliação da idoneidade epistémica

CARMEN BATANERO

*Universidad de Granada, Granada, España*

[batanero@ugr.es](mailto:batanero@ugr.es)

<https://orcid.org/0000-0002-4189-7139>

Doctora en Matemática, Catedrática jubilada y profesora colaboradora de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Ha dirigido durante muchos años el grupo de investigación en Didáctica de la Estadística en la Universidad de Granada. Fue Presidenta de la International Association for Statistics Education y actualmente es miembro honorario de esta sociedad. Es editora asociada de Statistics Education Research Journal.

MARÍA MAGDALENA GEA

*Universidad de Granada, Granada, España*

[mmgea@ugr.es](mailto:mmgea@ugr.es)

<https://orcid.org/0000-0002-5229-0121>

Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, actualmente Profesora Contratada Doctora en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y coordinadora del grupo de investigación FQM126-Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de dicha universidad. Su investigación se desarrolla en Educación Estadística, habiendo participado en numerosos eventos nacionales e internacionales como ponente, miembro de comité científico y organizador. Es editora asociada de la revista Educación Matemática.

PEDRO ARTEAGA

*Universidad de Granada, Granada, España*

[parteaga@ugr.es](mailto:parteaga@ugr.es)

<https://orcid.org/0000-0002-8347-7669>

Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Granada, actualmente es profesor del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y coordinador del grado en Educación Infantil de esta misma Universidad. Su investigación está centrada en Educación Estadística y Formación de Profesores. Ha participado en congresos internacionales como CERME (Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática) y ICOTS (Conferencia Internacional en la Enseñanza de la Estadística)

GUSTAVO R. CAÑADAS

*Universidad de Granada, Granada, España*

[grcanadas@ugr.es](mailto:grcanadas@ugr.es)

<https://orcid.org/0000-0002-1897-2540>

Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Granada, Profesor Titular del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Su investigación está centrada en Educación Estadística y Metodología de la investigación. Publicaciones en revistas de impacto internacional en estos ámbitos mencionados, como son RELIME o BOLEMA, y gran participación en congresos nacionales e internacionales.

# ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA Y EVALUACIÓN: PUNTOS DE ENCUENTRO EN LA FORMACION INICIAL DOCENTE

FRANCISCO RODRÍGUEZ ALVEAL  
ANA CAROLINA MALDONADO FUENTES

### RESUMEN

El presente estudio tuvo como propósito indagar sobre las habilidades, conceptos y procedimientos con que se evalúan las asignaturas de Estadística impartidas en la carrera de Pedagogía en Educación Matemática; cuyos egresados una vez insertos en el sistema escolar asumen la responsabilidad de enseñar formar ciudadanos estadísticamente alfabetizados. Para tal efecto, se efectuó un estudio exploratorio descriptivo, con un enfoque cuantitativo, que recoge información de profesores en etapa pre servicio respecto de cómo fueron evaluados. Como técnica para obtener datos se diseñó un instrumento tipo escala Likert el cual fue validado y sometido a validación de contenido por investigadores en Educación Estadística de diferentes universidades chilenas y extranjeras. La selección de los participantes se realizó mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado, contando con la participación de 23 estudiantes de Pedagogía en Educación Matemática de una universidad del centro sur de Chile. Entre los principales resultados se destacan que los encuestados, en general, declaran un escaso uso de variados instrumentos de evaluación, como proyectos estadísticos, mapas conceptuales o posters. Asimismo, aluden a instancias poco frecuentes de lectura e interpretación de datos en tablas bivariadas, interpretación conjunta de medidas de tendencia central y variabilidad para explicar el comportamiento de datos cuantitativos. Tampoco abundan datos provenientes de los medios de comunicación como diarios y televisión. En síntesis, se observa que un mayor uso de instrumentos de evaluación de corte técnico-aplicacionista, que eventualmente de manera única no permitiría formar profesores estadísticamente alfabetizados.

Palabras clave: Alfabetización Estadística; Evaluación para el Aprendizaje; Formación Inicial de Profesores de Matemática.

### INTRODUCCIÓN

En Chile, el cambio curricular realizado en la década del noventa trajo consigo grandes desafíos en la asignatura de Matemática a nivel escolar, con la introducción de los tópicos afines a Estadística y Probabilidad, desde una nueva mirada paradigmática. En específico, se releva la importancia de los datos y su variabilidad, para la lectura e interpretación de información en contexto (Cobb y Moore, 1997). Esta orientación se encuentra presente a nivel de educación primaria y secundaria, e implica una reformulación de las estrategias de enseñanza aprendizaje y de evaluación implementadas por los

Rodríguez Alveal, F. y Maldonado Fuentes, A. C. (2022). Alfabetización estadística y evaluación: puntos de encuentro en la formación inicial docente. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 239-263). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

profesores en activo del sistema escolar, así como para los formadores de formadores responsables de su habilitación profesional docente.

En el caso de la Educación Secundaria, el ajuste curricular realizado en el año 2009 incluyó los temas de probabilidad, estadística descriptiva e inferencial dentro de un nuevo eje denominado Datos y Azar. Dicho eje, se menciona explícitamente como un punto central de la formación docente en los Estándares Orientadores para carreras de Pedagogía en Educación en Media (MINEDUC, 2012) señalándose que “la presencia de la estadística y las probabilidades en el currículo escolar es nueva, por lo que no existe tradición nacional en su enseñanza a nivel escolar ni en la formación de los profesores y profesoras” (p. 92). Este tipo de declaraciones interpela a las instituciones formadoras a remirar estos temas para responder a las necesidades del sistema escolar, analizando y actualizando sus planes de estudio en función de los requerimientos de las políticas educativas.

Un insumo clave para este análisis en el último quinquenio ha resultado ser la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (ENDFID). Específicamente, los informes del desempeño de los estudiantes de Pedagogía en Matemática en materias afines al eje Datos y Azar han dado cuenta de bajos resultados (CPEIP, 2017) en cambio durante los años 2018 y 2019 ellos han mostrado un leve aumento (CPEIP, 2018 y 2019), generando interrogantes sobre la forma en la que se está transfiriendo el aprendizaje de estos contenidos. Es así como, desde el campo de la investigación educativa, autores como Rodríguez-Alveal et al. (2018), Vásquez y Alsina (2015) han aportado con evidencias empíricas acerca de cuáles son los déficits conceptuales que presentan los profesores en los tópicos afines a probabilidades. De manera similar, se ha documentado cómo se realiza la lectura e interpretación de información numérica, específicamente haciendo uso de las medidas de tendencia central (Rodríguez et al., 2016) y se han abordado problemáticas relacionadas con las habilidades para la descodificación de tablas y gráficos estadísticos de los futuros docentes (Rodríguez-Alveal y Sandoval, 2012; Estrella et al. 2015).

Este tipo de cuestionamientos ha encontrado un correlato en investigaciones acerca de la enseñanza aprendizaje de la Estadística en las aulas escolares; cuya meta es formar ciudadanos críticos capaces de leer, interpretar gráficos e índices numéricos y tomar decisiones en base a información resumida en ellos, en una era donde predomina la información online y digital. En especial, si se asume la premisa que los profesores son determinantes en el logro los aprendizajes a nivel microcurricular. Al respecto, cabe resaltar hallazgos que informan una excesiva reducción aritmética de la estadística (Estrella, 2017), tratando los datos como números y no como números en contexto (Cobb y Moore, 1997; Franklin et al., 2015), revelándose que existen aspectos por mejorar.

Una manera de abordar esta problemática es indagar cuáles han sido los instrumentos de evaluación y qué habilidades, conceptos y procedimientos están presentes en las evaluaciones de las asignaturas de Estadística dentro de la carrera de Pedagogía en Educación Matemática. En concreto se trata de analizar las tareas evaluativas vinculadas a aprendizajes propios de la Alfabetización Estadística, desde lo que se podría inferir hasta qué punto se han logrado las metas de aprendizaje.

Para tales efectos, se consultó a profesores en formación desde su perspectiva como sujetos evaluados, cuya experiencia con la evaluación en etapa pre servicio resulta un insumo clave tanto para la retroalimentación de las prácticas evaluativas impartidas en su plan curricular como para el análisis de su propia formación como futuro docente evaluador.

### **FORMACIÓN Y EVALUACIÓN EN EL EJE DE DATOS Y AZAR**

En Chile, los objetivos de aprendizaje y los desempeños mínimos que deberán alcanzar los estudiantes de Educación Secundaria se explicitan en las Bases Curriculares de Enseñanza Media (MINEDUC, 2015). Este documento entrega orientaciones acerca del desarrollo de ciertas habilidades, conocimientos y actitudes propias para cada asignatura. Particularmente, en Matemática se explicita la resolución de problemas, la representación verbal, gráfica, pictórica y algebraica, el modelamiento, la argumentación y comunicación de los hallazgos atinentes a la situación problema. Al mismo tiempo, mediante los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios (MINEDUC-CPEIP, 2012) se han establecido acuerdos entre expertos para orientar la formación de profesores en las distintas áreas del currículum escolar. Estos dan cuenta de los conocimientos, habilidades y actitudes profesionales necesarias que deberían alcanzar los estudiantes de las carreras de pedagogía del país al momento de egresar. En particular la Tabla 1, se presentan los estándares relacionados con el ámbito evaluativo para el eje de Datos y Azar.

**Tabla 1.** *Estándares disciplinarios asociados a las actividades de evaluación en el eje de Datos y Azar*

<b>Estándar</b>	<b>Actividades</b>
Es capaz de motivar la recolección y estudio de datos y de conducir el aprendizaje de las herramientas básicas de su representación y análisis.	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Diseña instrumentos para evaluar el aprendizaje del concepto de muestra aleatoria.</li> <li>– Diseña estrategias de evaluación para el aprendizaje del uso de TIC en estadística descriptiva.</li> </ul>
Es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Elabora instrumentos para detectar errores frecuentes en conceptos de probabilidad discreta.</li> <li>– Construye instrumentos para evaluar conceptos básicos de probabilidad.</li> </ul>
Está preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas límite.	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Diseña actividades de evaluación relacionadas con las propiedades básicas de la distribución normal y del Teorema Central del Límite.</li> </ul>
Está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística.	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Diseña y analiza actividades de evaluación del aprendizaje de los estudiantes y alumnas en el tema de intervalos de confianza.</li> <li>– Diseña actividades para evaluar el aprendizaje de conceptos de inferencia estadística.</li> </ul>

**Fuente:** Elaboración propia a partir de MINEDUC (2012)

En coherencia con estas políticas, un tercer aspecto a considerar es el diseño e implementación de la Evaluación Nacional Diagnóstica (CPEIP, 2017), que deben rendir los futuros profesores antes del término de su formación acorde a la Ley 20.903 (2016), en la cual se conjugan conocimientos disciplinares, didácticos y pedagógicos. En particular, estudios recientes entregan evidencia que los profesores en formación de Pedagogía en Matemática han obtenido, en promedio, bajos porcentajes de logro en los conocimientos afines al eje de Datos y Azar (Rodríguez-Alveal et al. 2019). Este tipo de resultados, pueden ser leídos con preocupación atendiendo al momento del itinerario formativo en el cual se encuentran al rendir esta medición. Empero, al mismo tiempo, si se analizan desde la función formativa de la evaluación, abre nuevas aristas sobre qué factores estarían influyendo en el aprendizaje de la Estadística y que podrían estar vinculados con aspectos pedagógicos de la enseñanza. En el presente estudio, se exploran posibles aportes en este sentido desde la práctica evaluativa, bajo el supuesto de que existe una relación entre enseñanza, aprendizaje y evaluación de las habilidades afines a la Alfabetización Estadística.

### **ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA Y SU EVALUACION**

La alfabetización estadística, como lo han hecho saber delMas (2002), Garfield y Ben-Zvi (2008) entre otros, es reconocida actualmente como un resultado de aprendizaje importante en los cursos de

Estadística. Aun cuando este concepto se encuentra en evolución (Sabag et al. 2018) no hay un consenso acerca de la definición. Al respecto, una de las primeras definiciones es dada por Wallman (1993) quien la define como la habilidad para entender y evaluar críticamente los resultados estadísticos con los cuales interactuamos en la cotidianidad. A partir de la cual han surgido una otras definiciones como la dada por Garfield et al. (2002), para quienes la alfabetización estadística involucra habilidades básicas para comprender organizar y resumir la información estadística mediante tablas y gráficos que permitan visualizar el comportamiento de los datos. Asimismo, hace referencia a la capacidad de comprender conceptos básicos, asociados a terminología y símbolos estadísticos de uso común.

En definitiva, es posible distinguir habilidades, conceptos y procedimientos específicos que se vinculan a la Alfabetización Estadística; tales como: Análisis estadístico de situaciones problemas reales; Interpretación de estadígrafos en el contexto de una situación problema; Relación entre datos cualitativos y datos cuantitativos; Representación de datos cualitativos y cuantitativos; Resumen numérico de datos cuantitativos; Toma de decisiones donde intervengan datos cuantitativos y cualitativos. A partir de ello, disponemos de una serie de comportamientos y acciones observables, que constituyen un referente consensuado del constructo para su enseñanza y aprendizaje en el sistema escolar. En dicho contexto, surge la necesidad de valorar lo aprendido, lo que se explica desde el campo de la Evaluación Educativa.

Evaluar es un proceso connatural al ser humano, directamente vinculado a la valoración de objetos, realidades y circunstancias. En general, puede ser entendido como “un término polisémico y sin identidad disciplinaria dado que se emplea en variados campos, entre estos, el educativo (...) [donde] constituye una herramienta que busca dar cuenta del aprendizaje” (Arancibia-Herrera et al, 2019, p. 3). En consecuencia, ha primado el interés por indagar cómo son las prácticas evaluativas del profesorado y cuáles de ellas resultan más idóneas para determinar qué tanto se han alcanzado las metas de aprendizaje. Situar un estudio en este ámbito, invita a rememorar la noción de Evaluación Educativa de Ralph Tyler:

El proceso de la evaluación es esencialmente el proceso de determinar hasta qué punto los objetivos han sido realmente alcanzados mediante programas de currículos y enseñanza. De cualquier manera, desde el momento en que los objetivos educativos son esencialmente cambios producidos en los seres humanos, es decir, ya que los objetivos alcanzados producen ciertos cambios deseables en los modelos de comportamiento del estudiante, entonces la evaluación es el proceso que determina el nivel alcanzado realmente por esos cambios de comportamiento (Tyler, 1950, citado por Escobar, 2014, p.128)

Posteriormente, la literatura especializada documenta la coexistencia de diversas miradas acerca de los fines para los cuales se evalúa, en respuesta a la función social (certificadora, acreditadora)

o la función pedagógica (formadora y formativa) de la misma. Tal como se desprende de Escudero (2003) y Alcaraz (2015) dicha evolución en las conceptualizaciones ha tenido incidencia en su énfasis como proceso o como producto, sobre todo a nivel de sistema educativo escolar, en cuyo ámbito se ha consensuado el aprendizaje como principal objeto a evaluar (Maldonado-Fuentes, 2021), lo que ha facilitado poder monitorear y hacer seguimiento de los aprendizajes para dar cuenta de la calidad de la educación.

Es así como investigaciones de carácter empírico en el área de la Educación Matemática informan hallazgos relativos al proceso de enseñanza y aprendizaje, destacándose la idea de que la evaluación representa “el logro, por parte de los alumnos, de un contenido desarrollado en el aula de clases” (Moreno y Ortiz, 2008; p. 145). Por lo anterior, el profesorado presta atención a aspectos como los procedimientos realizados por los discentes, los conocimientos, las habilidades y destrezas, usualmente detectadas mediante pruebas y talleres acorde a lo planificado.

En particular, Garfield (1994) ha señalado cómo el concepto evaluación suele ser visto por muchos profesores de Matemática que enseñan Estadística y Probabilidad en términos de pruebas y calificaciones, con el fin de informar a los estudiantes qué tan bien han asimilado los conceptos y habilidades transmitidas durante el proceso formativo; es decir, con un énfasis en la función social de la evaluación. Sin embargo, en el caso específico de la enseñanza de la estadística la misma aut ora hace mención a los siguientes instrumentos de evaluación: cuestionarios, lectura de artículos, realizar un diario que dé cuenta de la comprensión de los conceptos entregados en clases, proyectos individuales o grupales, encuestas de actitud administradas en diferentes momentos sobre el curso, informes escritos relacionados con actividades en clase o herramientas computacionales, preguntas de opción múltiple donde las respuestas están diseñadas de manera de caracterizar el razonamiento estadístico de los estudiantes, entre otros.

Ante este tipo de situaciones, cabe mencionar a Alsina (2018) quien, desde la perspectiva de la evaluación competencial, plantea la idea clave de que “los contenidos matemáticos (por ejemplo: hacer multiplicaciones, calcular con fracciones, conocer los tipos de ángulos, etc.) se evalúan a través de los procesos (por ejemplo, saber resolver un problema, razonar cuál es la operación más adecuada, saber representar una fracción de diferentes formas, etc.)” (p.12); ampliando la perspectiva de la mera comprobación de resultados mediante el uso de pruebas. Dicho planteamiento podría estar en sintonía con otros autores como Moreno (2021), quien ha precisado cómo el predominio de instancias tipo examen motiva un tránsito “de un monismo a un pluralismo metodológico” (p. 226), pues “se requiere emplear diversos dispositivos para recoger evidencias que le permitan describir, lo más fielmente

posible, las competencias a evaluar” (p.227), de lo que se desprende la necesidad analizar el uso de una gama más amplia de instrumentos de evaluación para que el estudiantado adquiriera una Alfabetización Estadística.

Otra indagación de tipo empírica es la de Chávez y Martínez (2018) quienes analizan cómo opera la enseñanza-evaluación de tareas matemáticas en educación primaria, teniendo como horizonte de expectativas su implementación en función de un mejor aprendizaje. Esto es, plantear tareas matemáticas con altos niveles de exigencia cognitiva y procesos de interacción en aula que favorezcan el desarrollo de habilidades del pensamiento y razonamiento. Así, se focalizan en el trabajo efectuado en situaciones reales, valorando positivamente la existencia de tareas con alto potencial matemático en los libros escolares. Empero, el estudio también revela que esto no necesariamente se condice con el modo cómo el profesorado conduce la interacción en el aula, instancia en la que se tiende a prestar atención a habilidades de memorización, de tipo procedimentales y operatorias, de lo que se infiere un desafío para la formación docente. Asimismo, Chávez y Martínez (2018, p. 212) declaran que, aunque

En las últimas décadas ha habido un incremento notable de investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Niss, 1993; Sánchez, 2002; Linares y Krainer, 2006; Ávila, 2004), pero el estudio sobre las prácticas de evaluación en la enseñanza de esta materia no ha tenido tanto desarrollo (Niss, 1993; Clark, 2006).

Siendo necesario focalizar la atención en este ámbito de la docencia, este tipo de estudios develan que a nivel micro curricular son múltiples las alternativas de implementación de una evaluación con fines formativos, dejando en evidencia la importancia de contar con referentes que puedan orientar el desarrollo de prácticas evaluativas afines a la buena enseñanza. En este contexto, cabe destacar que la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1993) introdujo en la década del noventa la idea que la evaluación debe ser vista como un proceso dinámico que entregue información sobre el progreso del estudiante. Producto de lo anterior, la *Mathematical Sciences Education* (MSE, 1993) la considera en la actualidad como una parte integral de la enseñanza y el aprendizaje y no solo como un hito de un proceso formativo. Al respecto, para el caso de la estadística se dispone de insumos como el de la *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (en adelante GAISE) que hace hincapié en el tipo de pregunta en los instrumentos de evaluación; las que deberían estar alineadas con el aprendizaje de metas centradas en comprender conceptos estadísticos fundamentales, simbología, lectura de gráficos, análisis y fundamentación, entre otros.

Específicamente, en este trabajo se plantea el interés por indagar qué tanto se aplican estas orientaciones en el caso del eje de Datos y Azar atendiendo a su objeto de estudio, el cual como

mencionan Cobb y Moore (1997) “requiere una forma diferente de pensar, porque los datos no son números, se trata de números en contexto” (p. 801). En concreto, se desprende el interés por indagar sobre las habilidades, conceptos y procedimientos con que se evalúan las asignaturas de Estadística en la carrera de Pedagogía en Educación Matemática de manera de formar profesores estadísticamente alfabetizados y que cuenten con un conocimiento del contenido para enseñarlo a nivel de sistema escolar.

## **MATERIAL Y MÉTODOS**

El presente estudio fue abordado mediante un método cuantitativo en base a un diseño exploratorio del tipo descriptivo de corte transversal (McMillan y Schumacher, 2011).

**Contexto y Participantes:** El estudio se realizó en la carrera de Pedagogía en Educación Matemática de una universidad del Consejo de Rectores de Chile, cuya institución cuenta con una acreditación de cinco años (de un máximo de siete) otorgada por la Comisión Nacional de Acreditación. Los participantes fueron 23 profesores en formación quienes habían cursado y aprobado durante el año académico 2021 las dos asignaturas de Estadística presentes en la malla curricular, en las cuales abordaron conceptos básicos junto con métodos de resumen gráfico y numérico afines a la estadística descriptiva. La selección de la muestra fue realizada mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado (McMillan y Schumacher, 2011). Cabe destacar que estos contenidos fueron impartidos mediante docencia a distancia, haciendo uso de plataforma Zoom, acorde a las políticas de confinamiento por el COVID-19. Los participantes fueron informados del estudio y dieron su consentimiento, acorde a protocolos éticos.

**Instrumento de recolección de datos y procedimientos de análisis:** Para efectos del estudio, se realizó una revisión de la definición de Alfabetización Estadística dada por Galfield et al. (2002), cuyo marco conceptual facilitó la selección de los contenidos de los ítems. En cuanto al formato y estructura del instrumento, se utilizó como referencia la escala presentada por Contreras (2004), que indagó acerca de prácticas evaluativas en profesores de Física. A continuación, se muestra la tabla de especificaciones del instrumento.

**Tabla 2.** *Tabla de especificaciones del instrumento de Escala Likert acorde a la Alfabetización Estadística*

<b>Dimensiones</b>	<b>Ítems</b>
<b>Métodos de Evaluación</b>	
Pruebas con preguntas abiertas, estructuradas y de respuesta combinada	3
interrogativas, portafolios, mapas conceptuales y posters	5
<b>Habilidades de Alfabetización Estadística</b>	
Comprensión de símbolos y conceptos estadísticos	8
Representación de datos cualitativos y/o cuantitativos	10
Resumen de los datos mediante estadígrafos de tendencia central, forma y variabilidad	16

**Fuente:** Elaboración propia

A partir de lo anterior, los autores diseñaron, validaron y aplicaron un instrumento de escala tipo Likert con cuatro categorías de respuesta (Siempre, Generalmente, Ocasionalmente y Nunca). El instrumento, fue sometido a un proceso de validación de jueces, en el cual participaron cuatro docentes e investigadores en Educación Estadística de dos universidades chilenas y uno de Venezuela. Los jueces fueron invitados a participar vía correo electrónico, dando a conocer los propósitos del estudio. Se adjuntó una guía para valorar los siguientes aspectos de la calidad de los reactivos: a) suficiencia (si los ítems bastan para obtener la medición), claridad (si los ítems se comprenden semánticamente) y relevancia (si los ítems son esenciales y deben ser incluidos). Para registrar el juicio de experto, se establecieron cuatro criterios (1: no cumple, 2: nivel bajo, 3: nivel moderado, 4: nivel alto). Los resultados se analizaron mediante el índice de Aiken (1980), tanto en las dimensiones como en los niveles dando como resultado un valor de 0.92.

La fiabilidad del instrumento fue medida mediante el coeficiente Alfa de Cronbach de  $\alpha=0.98$  lo cual indica que instrumento posee una buena consistencia interna. Es decir, la información es considerada fiable para objetivos del estudio. Los resultados se presentan mediante un análisis descriptivo numérico y tabular que permiten visualizar el comportamiento distribucional de las respuestas de los encuestados. El procesamiento de la información fue realizado en el software de fuente abierta R.

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

En este apartado se presentan los resultados y la discusión de estos, en función de cada una de las dimensiones que componen el instrumento aplicado a los profesores en formación matemática.

**Métodos de Evaluación:** Las respuestas observadas en relación con las evaluaciones experimentadas por los participantes se pueden clasificar en función de los polos de la escala. Por un lado, resaltan aquellos instrumentos con alto porcentaje de respuesta en las opciones “Siempre” y “Generalmente”,

correspondiente a Pruebas. Como se informa en la Tabla 2, las mayores frecuencias están en las pruebas de respuesta estructurada (60.8%) seguido de aquellas de respuesta abierta (56.5%) o respuesta combinada (47.8%). Dicha observación de los estudiantes coincide con la tendencia al uso de instrumentos de evaluación de esta naturaleza para la enseñanza en el área de Educación Matemática, como evidencian Jarero et al. (2013), al señalar que “un alto porcentaje de la calificación del estudiante para acreditar o no el curso queda determinado por el uso exámenes escritos y un porcentaje menor a la realización y entrega de tareas individuales” (p. 225). Una explicación plausible al respecto se puede encontrar en la prevalencia que ha tenido el uso de modalidades tipo examen para valorar el aprendizaje del alumnado (Moreno, 2021).

**Tabla 2.** *Distribución porcentual de datos en instrumentos tipo prueba escrita*

	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca
Pruebas de respuesta estructurada (Verdadero o Falso, Selección de Alternativas)	8.7	52.2	17.4	21.7
Pruebas de respuesta abierta breve	17.4	39.1	34.8	8.7
Prueba de respuesta combinada (Verdadero o Falso, Selección de Alternativas, Respuesta Abierta Breve y Respuesta Abierta Extensa)	17.4	30.4	34.8	17.4

**Fuente:** Elaboración propia

En la Tabla 3 se visualiza que hay ítems que concentran respuestas en las opciones “Nunca” y “Ocasionalmente”, a saber: interrogaciones orales (tanto individuales como grupales) con 91.3%, portafolios 78.2% y mapas conceptuales 80.6%. De esto se puede inferir que los profesores en formación encuestados han tenido escasas oportunidades para dar cuenta de sus aprendizajes sobre la Estadística mediante evaluaciones de carácter discursivo oral, siendo que el eje de Comunicación Oral es transversal a la enseñanza del Lenguaje (MINEDUC, 2015). Cabe suponer que este tipo de instancias son propicias para que los sujetos coloquen en juego el dominio de habilidades de comunicación verbal, paraverbal y no verbal, enriqueciendo interacciones en aula, si se asume la premisa que “el lenguaje humano verbal oral es un sistema relacional” (Rosas et al., 2021, p. 256). Asimismo, este tipo de evaluación se podría convertir en una oportunidad de retroalimentación de los aprendizajes más inmediata, de carácter formativo y dialogado, en sintonía con las políticas educativas vigentes en el Decreto 67 (MINEDUC, 2018), en que, además, se debe el dominio de los contenidos con un lenguaje estadístico acorde a la disciplina.

**Tabla 3.** *Distribución porcentual de datos en evaluaciones interrogativas, portafolios, mapas conceptuales y posters*

	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca
Interrogaciones orales individuales	4.3	4.3	26.1	65.2
Interrogaciones orales grupales	4.3		30.4	65.2
Portafolios	4.3	17.4	17.4	60.9
Mapas conceptuales	8.7	8.7	39.1	43.5
Diseño de posters sobre un problema estadístico de datos reales	4.3	30.4	21.7	43.5

**Fuente:** Elaboración propia

Así también, de la Tabla 3 se desprende que los participantes del estudio informan una reducida selección de mapas conceptuales, cuyo uso ha sido recomendado por Garfield (1994) y el MINEDUC (2015) como estrategia para la organización, jerarquización e integración de ideas, conceptos y nociones. Cabe señalar que este tipo de organizador de información es un recurso de aprendizaje recomendado por instancias gubernamentales chilenas para la enseñanza de la Estadística, como se ha visto en el análisis de textos escolares de Gordillo et al. (2017). Por añadidura, experiencias prácticas con uso de mapas conceptuales como instancia de evaluación formativa “muestra la importancia que estos tienen en la estructuración del pensamiento de futuros profesores de matemática” (Reyes-Santander y Ramos-Rodríguez, 2018, p. 34). En particular, estudios en la formación estadística señalan que los mapas conceptuales permiten desarrollar habilidades como dibujar un mapa, analizar datos, vincular y etiquetar conceptos y organizar conceptos. La clave de este tipo de trabajos radicaría en “animar a los estudiantes a reflexionar sobre las relaciones entre conceptos y complejidad de ideas” (Chiou, 2009, p. 66) a partir de lo cual podrían tomar conciencia sobre su propia comprensión de los conceptos estadísticos.

Otra de las modalidades aludidas como escasamente seleccionadas como procedimientos de evaluación en las asignaturas de Estadística son los portafolios (60.8%), cuya implementación permitiría afianzar la función formativa de la evaluación, dado que “es una técnica que brinda información tanto sobre los avances de los estudiantes, pero también puede brindar información sobre las acciones de enseñanza”. (Trelles et al., 2017, p. 49). De manera similar, se reporta un uso reducido del diseño de póster (43.4%) como modalidad de comunicación de datos contextualizados (GAISE, 2016). Este tipo de instancias resulta oportuno para dar cuenta de las habilidades y conceptos

estadísticos de análisis y resumen de datos atendiendo que tiene la función de mostrar el proceso de una investigación científica (Pierdant et. al., 2019).

En tercer lugar, en la Tabla 4 se observa una distribución porcentual más homogénea en las respuestas en relación con los ítems asociados a la selección de situaciones problemas y a la elaboración de proyectos estadísticos. Cabe destacar que las mayores frecuencias en las categorías “Siempre” y “Generalmente” se centran en el desarrollo de proyectos con datos simulados 14/23(60.8%), a diferencia del trabajo con información real y contextualizada, que se presenta mayormente en las categorías “Ocasionalmente” o “Nunca”; de lo que se puede desprender que los estudiantes se encuentran más familiarizados con interpretaciones de datos cuyo comportamiento podría ser artificial o ideal, contrario a lo que sucede en la realidad tal como promueve en el informe GAISE (2005, 2016) y Garfield (1994).

**Tabla 4.** *Distribución porcentual de datos en evaluaciones tipo proyectos*

	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca
Proyectos de investigación con datos simulados	26.1	34.8	17.4	21.7
Proyectos análisis de casos reales	8.7	30.4	39.1	21.7
Análisis estadístico de situaciones problemas reales	8.7	34.8	39.1	17.4
Proyectos de investigación con datos reales	8.7	26.1	21.7	43.5

**Fuente:** Elaboración propia

Dicho antecedente es coherente a lo mencionado por Rodríguez-Alveal et al. (2020) en relación con el uso de datos provenientes de situaciones simuladas y descontextualizados de fenómenos reales en las actividades presentes en los libros de textos entregados por el Ministerio de Educación de Chile; cuestión que tensiona el uso de la Estadística como la ciencia de los datos, considerando a Cobb y Moore (1997) quienes hacen notar que “los datos no son números, se trata de números en un contexto” (p.801-803).

**Símbolos y conceptos estadísticos mencionados en los instrumentos de evaluación:** Disponer de un vocabulario específico, integrado por conceptos y símbolos estadísticos, puede ser entendido como un dominio básico para la Alfabetización Estadística (Watson, 1997; Garfield et al., 2002), en tanto su adquisición y uso permite leer y comprender informes técnicos y noticias presentes en los medios de comunicación. En relación con este dominio, los profesores en formación encuestados declaran que “Siempre” y “Generalmente” se hacía referencia a símbolos asociados a estadígrafos

(60.8%) como el promedio y varianza muestral y parámetros (69.5%) en los instrumentos de evaluación. De la misma forma, se hace uso de conceptos como variable, población y muestra (91.3%), estadígrafos, parámetros, estimador (60.8%).

Otro de los conceptos aludidos por los encuestados es el de variabilidad, el cual como afirman Watson et al. (2003) es esencial para la existencia de la Estadística. Al respecto, el 82.6% de los encuestados declaran que “Siempre” y “Generalmente” se hace mención a la variabilidad muestral. Una explicación al respecto es que este concepto es útil para introducir las distribuciones de muestreo (promedio y varianza) que son un puente para hacer comparaciones estadísticas relacionadas con la inferencia estadística (Sánchez, et al.,2011). No obstante, llama la atención que el 65.2% y 56.5% de los 23 los profesores en formación indican que en los instrumentos de evaluación “Siempre” y “Generalmente” se incorporaban los conceptos de variación natural e inducida, respectivamente. Conceptos que habitualmente omitidos en los programas de asignaturas de estadística.

**Representación e interpretación de datos resumidos en tablas y/o gráficos:** El procesamiento y la interpretación los datos, son habilidades propias de la Alfabetización Estadística, cuyo proceso técnicamente se denomina transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999). Al respecto, las representaciones de datos en gráficos y/o tablas tienen un papel destacado en la investigación en Educación Estadística (Schnell y Prediger, 2014) y, además, como mencionan Alveal y Rubilar (2012) “son una parte vital de la comunicación en ciencia y tecnología, negocios, educación, y en los medios de comunicación de masas” (p. 221). En relación con lo anterior, en la Tabla 5 se muestran las respuestas de los encuestados en concordancia con las actividades que se les solicitaban en los instrumentos de evaluación. Al respecto, declaran que “Siempre” o “Generalmente” se les solicitaba representar datos cualitativos mediante representaciones gráficas (56.5%) y tablas de distribución univariadas (69.5%). De manera similar ocurre con datos cuantitativos, con un 65.2% y un 74.0%, respectivamente. En cambio, las respuestas relacionadas con el resumen de datos bivariados en tablas de doble entrada tienden a focalizarse en las categorías “Ocasionalmente” o “Nunca” (52.2%). Este resultado es de interés, puesto que dicho resumen es el sustrato para la elaboración de representaciones gráficas bivariadas (gráfico de barras agrupadas o subdivididas), según el currículo escolar chileno.

**Tabla 5.** Distribución porcentual de habilidades en representaciones y su nivel de lectura

Representar	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca
	Gráficos				Tablas Univariadas				Tablas Bivariadas			
Datos cualitativos	21.7	34.8	30.4	13.0	30.4	39.1	17.4	13.0	13.0	34.8	39.1	13.0
Datos cuantitativos	26.1	39.1	26.1	8.7	30.4	43.5	17.4	8.7				
Relación entre datos cualitativos	17.4	39.1	30.4	13.0								
Relación entre datos cuantitativos	13.0	56.5	21.7	8.7								
<b>Taxonomía de Curcio</b>												
Lectura Literal del dato	8.7	56.5	21.7	13.0	17.4	30.4	34.8	17.4	13.0	30.4	30.4	26.1
Leer dentro de los datos	21.7	52.2	13.0	17.4	13.0	26.1	39.1	21.7	8.7	26.1	34.8	30.4
Leer más allá de los datos	21.7	30.4	26.1	21.7	8.7	30.4	43.5	17.4	8.7	30.4	26.1	34.8

**Fuente:** Elaboración propia

Por otro lado, en la tabla anterior se hace referencia a la lectura de tablas y gráficos acorde a la taxonomía de Curcio (1989). Dicha lectura es uno de los indicadores de la Alfabetización Estadística (Garfield et al., 2002), por cuanto facilita la comprensión e interpretación de datos en informes de organismos técnicos y en los medios de comunicación masivos. Al respecto, el 73.9% los participantes declaran que “Siempre” y “Ocasionalmente” en los instrumentos de evaluación debieron realizar lecturas literales de las representaciones gráficas, junto con hacer una lectura dentro de los datos. Es decir, extraer información que no se destaca a simple vista y que posiblemente requiera de la realización de cálculos matemáticos. Contrariamente, en menor grado tuvieron que realizar lecturas más allá de los datos (21.7%); esto es, realizar inferencias de los valores y tendencias observadas en los gráficos que no se encuentran explícitas en la representación. En cambio, si se indaga en lo que sucede frente a las representaciones tabulares univariadas, los profesores en formación hacen notar que “Ocasionalmente” o “Nunca” se les insta a realizar una lectura literal de una tabla de distribución univariada 52.2% o bivariada 56.5%. De igual manera sucede con la lectura dentro de los datos, cuyas respuestas arrojan porcentajes del 60.8% y 65.2% respectivamente; es decir, en forma poco frecuente se realizan comparaciones de datos o la realización de cálculos matemáticos a partir de estos.

Asimismo, en la realización de predicciones inferencias (lectura *más allá de los datos*) de información que no se refleja directamente en la tabla.

**Resumen de los datos mediante estadígrafos de tendencia central, forma y variabilidad:** Los resúmenes gráficos y tabulares solamente nos permiten visualizar el comportamiento subjetivo de las características distribucionales de los datos. De allí que se hace necesario contar con índices numéricos, ya sean de tendencia central, forma y variabilidad para cuantificar el comportamiento de los datos, tal como mencionan Rodríguez et al. (2016). Al respecto, en la siguiente Tabla 6 se muestra que el 56.5% de los profesores en formación declaran que “Siempre” o “Generalmente” debieron resumir datos cuantitativos mediante medidas de tendencia central. De manera similar es el reporte de resultados sobre el uso de estadígrafos de variabilidad (60.8%). En cambio, en lo referido a los estadígrafos de forma, los encuestados señalan que su presencia en los instrumentos de evaluación es polarizada: 47.8% optan por “Siempre” o “Generalmente” y el 47.8%, “Ocasionalmente” o “Nunca”. Además de resumir datos cuantitativos de manera numérica es de interés puntualizar qué sucede cuando su interpretación ocurre en situaciones de contexto (Watson, 1997). Tal como se observa en la Tabla 6, los participantes declaran que “Siempre” o “Generalmente” deben interpretar los estadígrafos de tendencia central (56.5%), de forma (56.5%) y variabilidad (65.5%) en los instrumentos de evaluación.

**Tabla 6.** Distribución porcentual de resumen e interpretación de medidas numéricas en los instrumentos de evaluación

	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca
	<b>Tendencia central</b>				<b>Forma</b>				<b>Variabilidad</b>			
Resumir numéricamente datos cuantitativos	21.7	34.8	30.4	13.0	13.0	34.8	34.8	13.0	26.1	34.8	26.1	13.0
Interpretar estadígrafos en el contexto de una situación problema	8.7	47.8	30.4	13.0	13.0	43.5	26.1	17.4	17.4	47.8	21.7	13.0

**Fuente:** Elaboración propia

Al respecto, llama la atención que los participantes declaren un alto porcentaje del uso de medidas de variabilidad tanto en el resumen como la interpretación de las mismas, por sobre las medidas de tendencia central; cuya situación que puede ser interpretada como un predominio del enfoque esencialmente calculista (León, 2020). El 65.2% de los participantes mencionan que

“Siempre” o “Generalmente” han resumido de manera conjunta los datos mediante estadígrafos de tendencia central y variabilidad en los instrumentos de evaluación. En cambio, la interpretación de estos estadígrafos de manera conjunta se encuentra polarizada; por un lado, el 52.1% menciona que “Siempre” o “Generalmente” lo realizan, en cambio, el otro 47.9% seleccionan “Ocasionalmente” o “Nunca”, como se aprecia en la Tabla 7.

**Tabla 7.** *Distribución de resumen e interpretación conjunta de datos en situaciones problemáticas*

	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca
<b>Resumir</b> de manera conjunta las medidas de tendencia central y variabilidad.	30.4	34.8	21.7	13.0
<b>Interpretar</b> de manera conjunta las medidas de tendencia central y variabilidad.	17.4	34.8	34.8	13.0

**Fuente:** Elaboración propia

En coherencia con lo mencionado anteriormente, los profesores en formación hacen mención que “Ocasionalmente” o “Nunca” debieron interpretar en los instrumentos de evaluación información presente en medios de comunicación como periódicos (65.5%) y en televisión (65.5%). En cambio, en el polo de las categorías “Siempre” y “Generalmente” más de la mitad de los participantes declaran que se enfrentaron a la interpretación de informes técnicos (52.2%).

**Tabla 8.** *Distribución porcentual del uso de datos provenientes de los medios de comunicación e informes técnicos*

	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca	Siempre	Generalmente	Ocasionalmente	Nunca
	Periódicos				Televisión				Informes técnicos			
Interpretar información presente en	4.3	30.4	17.4	47.8	13.0	17.4	30.4	34.8	8.7	43.5	30.4	17.4

**Fuente:** Elaboración propia

Lo anterior, llama la atención atendiendo que la crisis sanitaria del COVID-19 ha generado una gran cantidad de datos (Rodríguez-Muñiz et al., 2022) de libre disposición en la plataforma de la Organización Nacional de la Salud y del Ministerio de Salud chileno cuyos datos permitirían simular, procesar, comunicar datos en contextos favoreciendo su interpretación. Atendiendo que como mencionan Biehler et al. (2018) el contexto entrega sentido a los datos; por lo que es una oportunidad para el aprendizaje de la idea de variabilidad, como así también adquirir una Alfabetización estadística.

**Toma de decisiones en base a información resumida de manera gráfica y numérica:** Además de la síntesis e interpretación de datos, Batanero (2013) promueve la toma de decisiones en base a los resúmenes estadísticos tanto gráficos, tabulares y numéricos, lo anterior está relacionado con la Alfabetización estadística atendiendo que ella busca utilizar datos estadísticos adecuadamente en la vida cotidiana para modelar y tomar decisiones (Gonda et al. 2022). En este contexto, en la Tabla 9, se muestra la presencia de actividades relacionadas con la toma de decisiones en los instrumentos de evaluación. Al respecto, el 56.5% de los participantes dan cuenta que “Ocasionalmente” o “Nunca” toman decisiones en base a datos resumidos en representes gráficas afines a variables cualitativas. En cambio, se consulta por lo que sucede en gráficos asociados a datos cuantitativos, la respuesta se encuentra dividida; pues el 52.2% declara que “Ocasionalmente” o “Nunca” y el resto expresa que “Siempre” o “Generalmente”.

**Tabla 9.** *Distribución de datos acerca de la toma de decisiones en base a representaciones gráficas y numéricas*

<b>Tomar decisiones donde intervengan</b>	<b>Siempre</b>	<b>Generalmente</b>	<b>Ocasionalmente</b>	<b>Nunca</b>
Datos cualitativos resumidos				
Mediante representaciones gráficas	4.3	39.1	43.5	13.0
Datos cuantitativos resumidos				
Mediante representaciones gráficas	4.3	43.5	39.1	13.0
Mediante la media, mediana o moda	26.1	43.5	21.7	8.7
Mediante el rango, varianza o desviación estándar	26.1	43.5	21.7	8.7
Mediante percentiles, cuartiles, deciles o quintiles	21.7	26.1	39.1	13.0
De manera conjunta				
Representaciones gráficas y medidas de tendencia central	17.4	43.5	30.4	8.7
Medidas de tendencia central y de variabilidad	30.4	21.7	34.8	13.0

**Fuente:** Elaboración propia

Así también, el 61.0% y el 78.2% de los profesores en formación afirman que “Siempre” o “Generalmente” resumen datos mediante medidas de tendencia central y variabilidad en los instrumentos de evaluación, respectivamente. Por otro lado, el 52.2% hace mención que “Ocasionalmente” o “Nunca” deben resumir datos mediante medidas de posición. Asimismo, declaran que “Siempre” o “Generalmente” deben tomar decisiones en base a información conjugando información gráfica y de tendencia central (61.0%), en cambio cuando intervienen medidas de

tendencia central y variabilidad a la vez, los participantes tienen a dividir sus opiniones en los dos extremos de la escala. Resultados que llaman la atención, atendiendo que investigaciones en profesores en formación han encontrado evidencias que este grupo tiene escasas habilidades en la descodificación de representaciones gráficas (Alveal y Rubilar, 2012), de igual manera en el resumen numérico puntualmente las medidas de tendencia central como el promedio el que según Estrella (2016) los profesores en formación tienen ideas incorrectas acerca de su representatividad en un conjunto de datos.

## CONCLUSIONES

La investigación a nivel internacional y nacional acerca de la enseñanza de la estadística ha expuesto las bondades de la evaluación de los conocimientos y habilidades mediante metodologías activas con énfasis en el planteamiento y resolución de problemas y estudios estadísticos con datos reales (GAISE, 2005; 2016). Así también, desde el campo de la evaluación a nivel de aula se dispone de orientaciones para la implementación de la evaluación formativa y para el aprendizaje; incorporando instancias de retroalimentación y seguimiento del proceso. No obstante, el presente estudio basado en estudiantes de Pedagogía en Matemática devela que las evaluaciones tipo prueba siguen siendo muy utilizadas para dar cuenta de los resultados de los futuros profesores; dejando en un segundo plano las relacionadas con el diseño, desarrollo de proyectos y posters estadísticos. Estas últimas podrían ser instancias para conjugar las fases del ciclo investigativo de Wild y Pfannkuch, (1999), favoreciendo un mejor proceso de aprendizaje por parte del estudiantado.

Asimismo, en el presente estudio llama la atención que los profesores en formación de Pedagogía en Matemática, en general, declaran que han tenido que dar respuesta a actividades relacionadas con la descodificación de gráficos estadísticos asociados a datos cualitativos y/o cuantitativos en los instrumentos de evaluación; cuya lectura que va desde lo literal a lo inferencial acorde a la taxonomía de Curcio (1989). En cambio, un tema pendiente es hacer uso de tablas de contingencia para resumir información bivariada, como así también su lectura e interpretación acorde a dicha taxonomía. En esta misma línea los datos entregan evidencia que los futuros profesores “Siempre” o “Generalmente” calculan medidas de tendencia central y variabilidad; así como hacen lecturas de datos cuantitativos. No obstante, y a pesar de la gran cantidad de información producido de la pandemia (Rodríguez-Muñiz et al., 2022) los encuestados informan que en las evaluaciones solamente se hace mención a datos provenientes de informes técnicos no así de los medios de comunicación (Periódicos o Televisión). En este sentido, aun cuando en ellos se hacían frecuentemente mención a términos estadísticos como “aplanar la curva”, análisis de gráficas para ver

el comportamiento de los contagios, etc. Decisiones en la selección de este tipo de fuentes para la elaboración de evaluaciones hubiera permitido interactuar con datos reales que fluctuaban día a día de manera de tomar decisiones acerca de los riesgos de contagio entre otros.

Finalmente, estos resultados llaman a reflexionar acerca de las modalidades y funciones de la evaluación con que se abordan las asignaturas de Estadística y Probabilidad en los itinerarios formativos de los futuros profesores de Matemática. Específicamente, invita a seguir indagando en la variedad de instrumentos y procedimientos de evaluación utilizados, así como la orientación de las tareas o evidencias de aprendizaje que son solicitadas por los formadores de formadores, teniendo presente los lineamientos para la enseñanza de la Estadística derivados de los informes GAISE (2005; 2016). Del mismo modo, estos resultados convocan a realizar nuevos hallazgos empíricos sobre la temática, desde un enfoque metodológico mixto en diferentes instituciones formadoras con un mayor número de participantes, profundizando en la evaluación del y para el aprendizaje como un elemento intrínseco al desarrollo de conceptos y habilidades para la Alfabetización Estadística.

### **Agradecimientos**

Se agradece a la Agencia Nacional de Investigación (ANID) por el financiamiento del Proyecto Fondecyt de Iniciación N° 11220295 “Incidencia de la formación estadística en la alfabetización y el pensamiento estadístico de los futuros profesores de Pedagogía en Matemática” y del Fondecyt de Iniciación N°11220291 “Alfabetización en Evaluación: Representaciones de la Evaluación de los Aprendizajes en ingresantes a la Formación Inicial Docente a partir de su trayectoria escolar” en cuya ejecución se enmarca este capítulo de libro.

### **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Alcaraz, N. (2015). Aproximación histórica a la evaluación educativa: de la generación de la medición a la generación ecléctica. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 8 (1), 11-25.
- Alsina, Á. (2018). La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula. *Revista Épsilon*, 98, pp. 7-23.
- Arancibia-Herrera, M., Novoa-Cáceres, V., & Casanova-Seguel, R. (2019). Concepciones sobre evaluación de docentes de Ciencias Naturales, Matemática, Lenguaje e Historia. *Revista Educación*, 43 (1), 418-432. <https://doi.org/10.15517/revedu.v43i1.30497>
- Barber, M., & Mourshed, M. (2007). How the world's best performing systems come out on top. Londres: McKinsey & Co.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. In Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 55–61). Universidad de Granada.
- Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning about data. En D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 139–192). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_5)

- Chávez Ruiz, Y. & Martínez Rizo, F. (2018). Evaluar para aprender: hacer más compleja la tarea a los alumnos. *Educación matemática*, 30(3), 211-246. <https://doi.org/10.24844/em3003.09>
- Chiou Chei-Chang (2009). Effects of concept mapping strategy on learning performance in business and economics statistics, *Teaching in Higher Education*, 14:1, 55-69, <https://doi.org/10.1080/13562510802602582>
- Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics and teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801–823. <https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990723>
- Contreras, G., (2004). Prácticas y concepciones de evaluación del aprendizaje en profesores de física. Tesis Doctoral. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- CPEIP. (2017). *Orientaciones Sistema de Desarrollo Profesional Docente*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.
- CPEIP. (2018). Informe Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnostica de la Formación Inicial Docente 2018. Ministerio de Educación.
- CPEIP. (2019). Informe Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnostica de la Formación Inicial Docente 2019. Ministerio de Educación.
- Curcio, F., R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston: N.C.T.M.
- Escobar, G. (2014). La evaluación del aprendizaje, su evolución y elementos en el marco de la formación integral. *Revista de Investigaciones UCM*, 14(24), 126-141.
- Escudero, T. (2003). Desde los tests hasta la investigación evaluativa actual. Un siglo, el XX, de intenso desarrollo de la Evaluación en Educación. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 9 (1), 11-43.
- Estrella, S. (2016). Comprensión de la media por profesores de educación primaria en formación continua. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 18(1), 1-22.
- Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (173 – 194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela
- Estrella, S., Olfos, R., & Mena-Lorca, A. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. *Educação e Pesquisa*. 41(2), pp. 477-493. <https://doi.org/10.1590/S1517-97022015041858>.
- Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R., & Spangler, D. (2015). *The statistical education of teachers*. Alexandria, VA: The American Statistical Association
- GAISE. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A curriculum framework for PreK-12 statistics education*. Estados Unidos: The American Statistical Association (ASA).
- GAISE. (2016). *College Report ASA Revision Committee, "Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education College Report 2016*.
- Garfield, J. (1994). Beyond Testing and Grading: Using Assessment To Improve Student Learning. *Journal of Statistics Education*, 2(1).

- Garfield, J., delMas, R., & Chance, B. (2002). The Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking (ARTIST) Project. NSF CCLI grant ASA- 0206571. Retrieved from <https://apps3.cehd.umn.edu/artist/index.html>
- Gonda, D.; Pavlovicová, G.; Duriš, V.; Tirpáková, A. Implementation of Pedagogical Research into Statistical Courses to Develop Students' Statistical Literacy. *Mathematics* 2022, 10, 1793. <https://doi.org/10.3390/math10111793>
- Gordillo, Wilson, Pinzón, Wilson J, & Martínez, José H. (2017). Los Mapas Conceptuales: una Técnica para el Análisis de la Noción de Derivada en un Libro de Texto. *Formación universitaria*, 10(2), 57-66. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000200007>
- Jarero Kumul, M., Aparicio Landa, E. & Sosa Moguel, L. (2013). Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos: Un estudio de caso a nivel superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 213-243.
- León Gómez, N. A. (2020). Alcances de la enseñanza de la estadística a través de la investigación en la educación media en Venezuela. *Paradigma*, 657-684. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p657-684.id808>.
- Maldonado-Fuentes A.C. (2021). Representación escolarizada de la evaluación: un aprendizaje social profesional. *Alteridad*, 16(2), 184-197. <https://doi.org/10.17163/alt.v16n2.2021.02>
- McMillan, J. & Schumacher, S. (2011). *Investigation educativa*. Madrid: Pearson-Adisson Wesley.
- Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2018). Decreto 67. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile. <https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1127255yidVersion=2018-12-31>
- Ministerio de Educación de Chile. (MINEDUC) (2015). Bases Curriculares. 7° a 2° Medio.
- Ministerio de Educacion. (MINEDUC) (2012). *Estándares Orientadores para las carreras de pedagogía en educación media*. Santiago: Lom Ediciones.
- Moreno-Olivos, T. (2021). Cambiar la evaluación: un imperativo en tiempos de incertidumbre. *Alteridad*, 16(2), 223-234. <https://doi.org/10.17163/alt.v16n2.2021.05>
- Moreno, I., & Ortiz, J. (2008). Docentes de educación básica y sus concepciones acerca de la evaluación en matemática. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 1(1), 140-154.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Pierdant PérezM., Hernández ArteagaA., Álvarez PinedoA., Patiño LópezM., Ledezma BautistaI, & Gordillo MoscosoA. (2019). Revisión sistemática del póster de investigación: ¿lo hemos hecho bien todo este tiempo? *Investigación en Educación Médica*, 8(30), 110-118. <https://doi.org/10.22201/facmed.20075057e.2019.30.18124>.
- Reyes-Santander, P. A. & Ramos-Rodríguez, E. (2018). Mapas conceptuales en educación matemática a nivel universitario. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 20(2), 25-36. <https://doi.org/10.24320/redic.2018.20.2.1657>
- Rodríguez, F., Maldonado, A. & Sandoval, P. (2016). Comprensión de las medidas de tendencia central: un estudio comparativo en estudiantes de pedagogía en matemática en dos instituciones formadoras chilenas. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas)*. 21(3), 929-952. <https://doi.org/10.1590/S1414-40772016000300013>.

- Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., & Vásquez Ortiz, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos*, 44(1), 135-156. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052018000100135>.
- Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., & Vásquez, C. (2021). Análisis de las actividades sobre variabilidad estadística en los libros de texto de educación secundaria: Una mirada desde las propuestas internacionales. *Uniciencia*, 35(1), 108-123. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.7>
- Rodríguez-Alveal, F. & Sandoval Rubilar, P. R. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en enseñanza básica. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas)*, 17(1). 207-235. <https://doi.org/10.1590/S1414-40772012000100011>.
- Rodríguez-Alveal, F., Vásquez Ortiz, C., & Rojas Sateler, F. (2020). Formación inicial docente en profesores de matemática: una mirada desde la evaluación nacional diagnóstica. *Estudios Pedagógicos*, 45(2), 141-153. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052019000200141>.
- Rodríguez-Muñiz, L., Muñiz-Rodríguez, L., García-Alonso, I., López-Serentill, P., Vásquez, C., & Alsina, A. (2022). Navigating between abstraction and context in secondary school statistics education, *Culture and Education*, <https://doi.org/10.1080/11356405.2022.2058794>
- Rosas, C., Andrade, E., Cárdenas, A. & Sommerhoff, J. (2021). Premisas para la enseñanza de la expresión oral en Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 47(1), 251-265.
- Sabbag, A., Garfield, J., & Zieffler, A. (2018). Assessing statistical literacy and statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 17(2), 141-160. <http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ>
- Sánchez, E., da Silva, C.B., Coutinho, C. (2011). Teachers' Understanding of Variation. In: Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. (eds) *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series, vol 14. Springer, Dordrecht. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_22](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_22)
- Schnell, S. & Prediger, S. (2014): Multiple representations as tools for discovering pattern and variability – Insights into the dynamics of learning processes. In: Wassong, Thomas; Frischemeier, Daniel; Fischer, Pascal R.; Hochmuth, Reinhard; Bender, Peter (Hrsg.): *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen - Using Tools for Learning Mathematics and Statistics*. Festschrift zum 60. Geburtstag von Rolf Biehler. Wiesbaden: Springer Spektrum, 179-192. [http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-658-03104-6\\_14](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-658-03104-6_14)
- Trelles Zambrano, C. A., Bravo Guerrero, F. E., & Barraqueta Samaniego, J. F. (2017). ¿Cómo evaluar los aprendizajes en matemáticas? *INNOVA Research Journal*, 2(6), 35-51. <https://doi.org/10.33890/innova.v2.n6.2017.183>
- Vásquez, C. & Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27 – 48.
- Wallman, K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching Our Society. *Journal of The American Statistical Association*, 88(421), 1-8. <https://doi.org/10.2307/2290686>
- Watson, J. M. (1997). Assessing statistical literacy using the media. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press & The International Statistical Institute.

- Watson, J., Kelly, B., Callingham, R. & Shaughnessy, M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(1), 1-29. <https://doi.org/10.1080/0020739021000018791>
- Wild, C.J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

## **STATISTICAL LITERACY AND ASSESSMENT: MEETING POINTS IN INITIAL TEACHER TRAINING**

### **ABSTRACT**

The purpose of this study was to investigate the skills, concepts and procedures with which the Statistics subjects taught in the Mathematics Education Pedagogy career are evaluated; whose graduates, once inserted in the school system, assume the responsibility of teaching to form statistically literate citizens. For this purpose, a descriptive exploratory study was carried out, with a quantitative approach, which collects information from teachers in the pre-service stage regarding how they were evaluated. As a technique to obtain data, a Likert scale-type instrument was designed, which was validated. of content by researchers in Statistical Education from different Chilean and foreign universities. The selection of the participants was carried out through a non-probabilistic sampling of the intentional type, with the participation of 23 students of Pedagogy in Mathematics Education from a university in the center-south of Chile. Among the main results, it is highlighted that the respondents, in general, declare a scarce use of various evaluation instruments, such as statistical projects, conceptual maps or posters. Likewise, they refer to infrequent instances of reading and interpreting data in bivariate tables, joint interpretation of measures of central tendency and variability to explain the behavior of quantitative data. Nor are there abundant data from the media such as newspapers and television. In summary, it is observed that a greater use of technical-applicationist evaluation instruments, which eventually alone would not allow training statistically literate teachers.

Keywords: Statistical Literacy; Assessment for Learning; Initial Training of Mathematics Teachers.

## **LITERACIA E AVALIAÇÃO ESTATÍSTICA: PONTOS DE ENCONTRO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES**

### **RESUMO**

O objetivo deste estudo foi investigar as habilidades, conceitos e procedimentos com os quais são avaliadas as disciplinas de Estatística ministradas na carreira de Pedagogia da Educação Matemática; cujos egressos, uma vez inseridos no sistema escolar, assumem a responsabilidade de ensinar para formar cidadãos estatisticamente alfabetizados. Para tanto, foi realizado um estudo exploratório descritivo, com abordagem quantitativa, que coleta informações de professores em fase de pré-atendimento sobre como foram avaliados. Como técnica de obtenção de dados, foi elaborado um instrumento do tipo escala Likert, que foi validado de conteúdo por pesquisadores em Educação Estatística de diferentes universidades chilenas e estrangeiras. A seleção dos participantes foi realizada por meio de uma amostragem não probabilística do tipo intencional, com a participação de 23 alunos de Pedagogia em Educação Matemática de uma universidade do centro-sul do Chile. Entre os principais resultados, destaca-se que os respondentes, em geral, declaram escassa utilização de diversos instrumentos de avaliação, como projetos estatísticos, mapas conceituais ou cartazes. Da mesma forma, referem-se a ocorrências pouco frequentes de leitura e interpretação de dados em tabelas bivariadas, interpretação conjunta de medidas de tendência central e variabilidade para explicar o comportamento de dados quantitativos. Tampouco há dados abundantes da mídia, como jornais e televisão. Em síntese, observa-se uma maior utilização de instrumentos de avaliação técnico-aplicacionistas, que eventualmente por si só não permitiriam a formação de professores estatisticamente alfabetizados.

Palavras-chave (o Palabras clave): Alfabetização Estatística; Avaliação para Aprendizagem; Formação Inicial de Professores de Matemática.

*FRANCISCO RODRIGUEZ ALVEAL*

*Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile*

[frodriguez@ubiobio.cl](mailto:frodriguez@ubiobio.cl)

<https://orcid.org/0000-0003-2169-0541>

Profesor de Estado en Matemática (1991), Magister en Bioestadística (1996) y Doctor en Educación. Académico en distintas universidades (Universidad de Concepción, Universidad de Chile, Universidad Católica de Temuco, Universidad Mayor) y de la Universidad del Bío-Bío sede Chillán desde el 2008 a la fecha. Líneas de investigación: Formación Inicial Docente, teoría de distribuciones, didáctica y enseñanza de la estadística, he participado como investigador principal y co-investigador en una serie de proyectos financiados por la Universidad del Bío-Bío y con financiamiento externo lo que me ha permitido escribir con varios investigadores nacionales de la Universidad Católica del Maule, la Universidad Católica de Chile sede Santiago y Villarrica, la Universidad del Bío-Bío, entre otras. Actualmente estoy desarrollando un Proyecto FONDECYT de Iniciación N° 11220295 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) acerca de la incidencia de la formación en la alfabetización y pensamiento estadístico de profesores de matemática en Chile.

*ANA CAROLINA MALDONADO FUENTES*

*Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile*

[amaldonado@ubiobio.cl](mailto:amaldonado@ubiobio.cl)

<https://orcid.org/https://0000-0002-9198-5882>

Profesora de Castellano (PUC, 1993) y Licenciada en Estética (PUC1993), Magíster en Ciencias de la Educación mención Evaluación (PUC, 1999) y Doctora en Educación (UCSC, 2021). Actualmente soy docente e investigadora del Departamento de Ciencias de la Educación de la Facultad de Educación y Humanidades de la Universidad del Bío-Bío. He sido profesora de lenguaje en el sistema escolar chileno (1995 a 2007), de español como lengua extranjera (1997 a 2007) y formadora de formadores (desde 2004 a la fecha). Línea de Investigación: Proyectos sobre Evaluación de habilidades en Formación Inicial Docente. Adjudiqué Beca CONICYT- Doctorado Nacional/2017-21170257 (2017-2020). Participé como coinvestigadora del proyecto interuniversitario nacional FONIDE N° 181800090 (2018-2021). Actualmente estoy desarrollando un proyecto FONDECYT de Iniciación N°11220191, financiado por la Agencia Nacional de Investigación de Chile (ANID) relacionado con Alfabetización en Evaluación y las representaciones de la Evaluación de los Aprendizajes de ingresantes a la formación inicial docente.



# PROPUESTA EVALUATIVA ORIENTADA A LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

LILIANA TAUBER  
SILVANA SANTELLÁN

## RESUMEN

En el marco de una investigación de diseño, se ha realizado la implementación de una propuesta evaluativa centrada en el desarrollo de investigaciones estadísticas. Dicha propuesta ha sido diseñada y aplicada a estudiantes de un Profesorado de Matemática que cursaban su primer y único curso universitario de Estadística. Los principales resultados han sido obtenidos a partir de un análisis de contenido de las producciones de los estudiantes, centrado en una categorización específicamente construida en el marco de esta investigación. El sistema de categorías construido permite mostrar las relaciones entre distintos elementos de alfabetización estadística y las dimensiones del pensamiento estadístico. Las evidencias obtenidas muestran que los estudiantes logran desarrollar investigaciones estadísticas que tienen una gran coherencia metodológica, en las que surgen diversas habilidades críticas y de cuestionamiento sobre problemáticas de interés elegidas por los estudiantes. Asimismo, logran utilizar distintas tecnologías y elaborar informes y conclusiones en los que se integran distintos conocimientos estadísticos, metodológicos y contextuales.

Palabras clave: Formación de profesores, Alfabetización Estadística, Pensamiento Estadístico, Ciudadanía crítica, Investigaciones estadísticas, Didáctica de la Estadística.

## INTRODUCCIÓN

Las cifras estadísticas descubren, al que sabe interpretarlas, condiciones orgánicas, físicas y morales, sociales y políticas, penetradas de revelaciones para el gobierno de los pueblos. Porque cada cifra representa hechos existentes, condiciones individuales, fenómenos sociales, que entran como resortes y tienen su papel en el mecanismo activo y todo solidario de la colectividad. (Primer censo de la población argentina, 1872)

La cita anterior permite mostrar una de las tantas referencias históricas que se podrían considerar para transitar diversos caminos en los que el conocimiento estadístico se utiliza para la toma de decisiones. Dicha cita surge del primer censo argentino y es una evidencia de que, desde que se conformó el Estado moderno, ha sido fundamental conocer las características de la población y de la vida de una comunidad, para brindar sustento a la toma de decisiones.

Tauber, L. y Santellán, S. (2022). Propuesta evaluativa orientada a la formación del pensamiento estadístico en futuros profesores de matemática. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 265-295). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

A partir de aquí es posible indicar que, cada vez es más necesario que los ciudadanos dispongan de ciertos conocimientos estadísticos, que les permitan pensar críticamente sobre la información y sobre las decisiones que se toman en base a la misma. Ese pensamiento crítico permite reconocer si las decisiones están basadas en evidencia empírica creíble o en ideas preconcebidas (Rosling, 2007) y, en consecuencia, brinda libertad intelectual al individuo para actuar de manera razonada en la sociedad. Algunas de estas ideas son promovidas y respaldadas por diversos organismos, un ejemplo de ello lo podemos encontrar en el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos de Argentina (INDEC):

Además de las habilidades para la lectura, comprensión y utilización de los datos, la alfabetización estadística implica el reconocimiento de la estadística social como un bien público. La información que producen los institutos nacionales de estadística es para todos y se construye entre todos. (INDEC, Planeta Dato N° 1, 2021)

Es así que, si consideramos a la Estadística como un bien que sirve a todos y que se construye entre todos, implicaría que todos deberíamos disponer de ciertos conocimientos estadísticos y, deberíamos poder integrar ese conocimiento de una manera razonada con problemas que exijan distintos tipos de decisiones. En otras palabras, y siguiendo a Batanero et al. (2013) y a Giroux (1989; 1993), es necesario alfabetizar estadística y críticamente al ciudadano para que éste tenga la posibilidad, no sólo de entender el mundo, sino también de modificarlo y de mejorarlo.

No obstante, para lograr ese conocimiento es necesario transitar por un proceso formativo que aborde paulatinamente las ideas estadísticas fundamentales (Goetz, 2009) y que a la vez prepare a los estudiantes para pensar y actuar críticamente sobre el mundo (Weiland, 2017; Zapata-Cardona, 2018).

Así, es posible indicar que el sistema educativo se encuentra frente a un verdadero desafío: el de formar ciudadanos que puedan pensar estadísticamente. Es imperativo que la alfabetización estadística que se promueva desde la educación formal, brinde posibilidades a las personas de comprender críticamente la información y de actuar en consecuencia (Escudero, 2019). Es así que cabe preguntarnos: ¿Qué propone el sistema educativo argentino formal? Es posible indicar que, en el currículo argentino para la educación secundaria, la Estadística forma parte de uno de los ejes de Matemática y que, el enfoque general se puede inferir a partir de lo expresado en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP, 2011):

La escuela ofrecerá situaciones de enseñanza que promuevan: La confianza en las propias posibilidades para resolver problemas y formularse interrogantes. (...) La disposición para defender sus propios puntos de vista, considerar ideas y opiniones de otros, debatirlas y elaborar conclusiones, aceptando que los errores son propios de todo proceso de aprendizaje. La interpretación de información presentada en forma oral o escrita (...), pudiendo pasar de una forma de representación a otra si la

situación lo requiere. (...) La comparación de las producciones realizadas al resolver problemas, el análisis de su validez y de su adecuación a la situación planteada. La producción e interpretación de conjeturas y afirmaciones de carácter general y el análisis de su campo de validez, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales. (...) El análisis y uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular en forma exacta y aproximada, incluyendo el encuadramiento de los resultados. (...) La interpretación y uso de nociones básicas de estadística para estudiar fenómenos, comunicar resultados y tomar decisiones. (Ministerio de Educación de la Nación, 2011, páginas 14-16)

Así podemos ver que, desde el documento oficial base a partir del que se elaboran los diseños curriculares provinciales, se propicia un conocimiento contextualizado y una alfabetización estadística desde un enfoque crítico, adaptado a la madurez de los estudiantes.

Llegados a este punto, cabe preguntarnos si los profesores, quienes son los principales actores de llevar adelante la formación de los ciudadanos, han tenido la posibilidad de reflexionar sobre la importancia de abordar procesos de enseñanza y de aprendizaje, en los que la Estadística sea una componente fundamental de los procesos reflexivos y críticos que exige la sociedad y el currículo formal. En este sentido, en Tauber et al. (2013), se han discutido resultados que evidencian que, profesores de Matemática en ejercicio, utilizan sólo ideas intuitivas con escasos argumentos que fundamenten sus conclusiones cuando deben analizar situaciones reales. Por otra parte, en Tauber (2017; 2022), se presentan resultados de una encuesta realizada a 2800 profesores argentinos, en la que fue posible identificar las siguientes problemáticas:

- La mayoría de los profesores encuestados (88,8%) consideran a la Estadística como una rama de la Matemática y muy ligada a los procedimientos de cálculo. Pocos la conciben como una disciplina que brinda fundamentos para la toma de decisiones.
- Una alta proporción de profesores (58%), no estudió Estadística en la escuela secundaria y lo que es más grave aún, no estudió en su carrera de nivel superior.
- Apenas el 30% tuvo algún curso de Estadística y/o Probabilidad en el nivel superior.
- El 68%, nunca ha enseñado Estadística en el nivel secundario y/o superior y el 22% alguna vez la enseña sólo porque se lo piden los colegas de otras áreas.
- Un gran porcentaje (68%) indicó que no enseña Estadística porque hay otros temas de Matemática que son más importantes o porque piensan que con la ayuda de un software estadístico, los estudiantes pueden comprender los contenidos del área.

Así, el panorama descrito nos ha llevado a plantearnos un nuevo interrogante: ¿Qué características debería tener una propuesta didáctica y evaluativa para futuros profesores de

Matemática orientada a fomentar el pensamiento estadístico de los mismos y que sirva de marco referencial para el abordaje de la Estadística en la educación formal desde un punto de vista crítico?

Esta pregunta ha guiado, en parte, la investigación que venimos desarrollando desde hace algunos años, cuyos lineamientos generales describiremos en las secciones siguientes.

## MARCO DE REFERENCIA

Teniendo en cuenta lo anterior, es necesario identificar las dimensiones de la alfabetización y del pensamiento estadístico, de forma tal de reconocer el entramado fundamental que se debería tener en cuenta al diseñar propuestas didácticas que tengan como objetivo la formación de profesores que, a través del ejercicio de su profesión, fomenten la alfabetización y el pensamiento estadísticos, de modo de formar ciudadanos estadísticamente cultos y críticos (Batanero et al., 2013).

El significado que en la literatura científica se le da a la alfabetización y pensamiento estadísticos, ha variado con el paso del tiempo y según los autores que se tomen de referencia. Esos cambios han quedado plasmados en distintos trabajos, especialmente en los que proponen un debate sobre la alfabetización estadística (Ben-Zvi y Garfield, 2004; Gal, 2004, 2019; Pinto et al., 2017; Weiland, 2017; Zapata-Cardona, 2018). En los trabajos citados, se parte de acepciones que, aún con variantes, brindan un marco referencial para identificar y reflexionar sobre nuevos procesos pedagógicos, didácticos y cognitivos que los ponen en relación. Una de esas acepciones identifica a la alfabetización estadística (AE) como: “la habilidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que encontramos en la vida cotidiana y la capacidad para apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer a la vida pública, profesional y personal” (Wallman, 1993). Si a la misma le agregamos la que utiliza el INDEC (2021), donde se indica: “la alfabetización estadística implica el reconocimiento de la estadística social como un bien público”, podemos inferir que esta alfabetización implicará diversos procesos de razonamiento y de pensamiento, en los que es necesario integrar algunas dimensiones que vienen de la mano con la evolución tecnológica y los grandes volúmenes de datos a los que vivimos expuestos a diario (Ridgway et al., 2011).

En este sentido, consideramos que una persona estará alfabetizada estadísticamente cuando pueda tomar decisiones basadas en evidencia creíble (Gal, 2019) y para ello, necesite interpretar críticamente la información, realizar comparaciones, identificar tendencias, predecir resultados aleatorios con cierto grado de confiabilidad y/o realizar una crítica bien fundamentada sobre las decisiones tomadas por otros. Dado que esta alfabetización estadística lleva implícita la comprensión de un entramado de conceptos e ideas estadísticas fundamentales (Goetz, 2009), surge la necesidad de diseñar propuestas didácticas que permitan relacionar distintos elementos de conocimiento y

disposicionales (tal como se caracterizan en Gal, 2004, 2019) y que tengan como objetivo crear condiciones propicias para generar pensamiento estadístico (Cabrera et al., 2020).

Llegados a este punto, es necesario distinguir lo que en este trabajo se va a considerar como pensamiento estadístico y en tal sentido, es posible indicar que, desde hace décadas, mucho se ha discutido sobre el mismo. En trabajos como los de Moore (1997), Snee (1993), Wild y Pfannkuch (1999), Pfannkuch y Wild (2004), se pueden encontrar diversas revisiones sobre definiciones dadas acerca del mismo. Particularmente, en Pfannkuch y Wild (2004), se caracteriza el pensamiento estadístico a partir de un marco referencial compuesto por cuatro grandes dimensiones: Ciclo investigativo, Tipos de pensamiento, Ciclo interrogativo y Disposiciones. Algunos elementos específicos que conforman estas dimensiones se basan en elementos de la alfabetización estadística que han sido descritos por Gal (2004).

Aunque con ciertos matices, en los trabajos citados precedentemente, se define al pensamiento estadístico como un método intelectual independiente, que propone una manera específica y amplia de percibir el mundo, considerando siempre la variación y la aleatoriedad que lo atraviesan.

En este trabajo, a lo expresado antes lo complementamos con las ideas de Behar y Grima (2004), y por ello sostenemos que es posible asociar el pensamiento estadístico con algo permanente, algo que forma parte de nuestra lógica corriente, que trasciende la lógica determinística y se complementa con nuevos elementos que se adecuan a situaciones de variabilidad e incertidumbre. En este sentido, cuando hablamos de promover o de generar pensamiento estadístico a través de una propuesta didáctica, estamos hablando de generar un pensamiento a largo plazo.

Así, en la propuesta didáctica en la que se enmarca la propuesta evaluativa que presentaremos más adelante, se busca integrar elementos de la alfabetización estadística con las dimensiones del pensamiento estadístico, asociadas al conocimiento estadístico, contextual y crítico (Gal, 2004, 2019). En este sentido, consideramos necesario ampliar la acepción de pensamiento estadístico precedente, a partir de la caracterización de las dimensiones que lo conforman y para ello seguimos a Behar (2009):

- Dimensión de la Evidencia. Propicia el desarrollo de actitudes que evitan las especulaciones subjetivas para producir conclusiones fundadas en evidencia objetiva.
- Dimensión de los Datos y de la Metodología. Permite cuestionarse y crear conciencia sobre la relación entre el análisis de datos y las cuestiones metodológicas asociadas (muestreo, diseño, constructos que dan sustento a cada variable o indicador, etc.).
- Dimensión de la Variación. Reconoce que la variabilidad es inherente a los datos y que está omnipresente en el proceso de modelación y es imposible abstraerse de ella.

- Dimensión de la Señal y el Ruido. Reconoce que, en todo proceso de análisis de datos, hay factores de confusión que pueden controlarse y ciertas tendencias que permiten medir la representatividad de algunos parámetros (Gal, 2004, 2019).
- Dimensión del Cuestionamiento. Reconoce que una situación real puede provocar un problema cuya resolución no implica una estructura determinada (Gal, 2004, 2019).
- Dimensión de la Objetividad. Valora la relevancia de la Estadística al comparar, estimar, construir indicadores, reconociendo alcances y limitaciones.
- Dimensión de la Comunicación y Transnumeración. Propicia la comunicación de resultados, permite indicar su poder explicativo y las condiciones de aplicación (Pfannkuch y Rubick, 2002).

Estas dimensiones, se relacionan a través de una trama de conexiones entre el conocimiento estadístico y el conocimiento contextual en el que se sitúa el problema que se pretende abordar. Esa red permite construir significados a partir de la evidencia que brindan los datos y de un diálogo constante entre diversas representaciones, que se denomina transnumeración (Pfannkuch y Rubick, 2002). Esta transnumeración, involucraría pensar sobre reclasificar o filtrar los datos disponibles con algún criterio fundamentado, o traducir los datos a tablas, gráficos o resúmenes numéricos y a su vez, traducir los resúmenes a un informe que permita emitir conclusiones o tomar decisiones.

Lo esperable sería que esta red de dimensiones y significados se construya a través de los distintos estadios educativos, pero, la realidad es que aún en los cursos básicos de Estadística a nivel superior, se debe pensar en situaciones que generen esa interacción para acompañar a los estudiantes en la construcción del sentido estadístico, de modo de sentar las bases que propicien el pensamiento estadístico a largo plazo (Behar y Grima, 2014).

Las dimensiones antes expuestas sirven de marco referencial a nuestra investigación, a partir de las cuales se elaboró una propuesta didáctica y evaluativa para la formación de profesores de matemática. En el presente trabajo nos centramos específicamente en la descripción y el análisis de las características de la propuesta evaluativa, las cuales desarrollaremos en próximos apartados.

### **Las investigaciones estadísticas como marco de generación del pensamiento estadístico**

Existen diversas formas de poner en funcionamiento las dimensiones del pensamiento estadístico descritas previamente. A modo de ejemplo, autores como Behar y Grima (2014), Pfannkuch y Wild (2004) o Batanero y Díaz (2011), proponen algunas alternativas de ello. En Zapata-Cardona (2018), se realiza una discusión de las diferencias entre esas distintas propuestas, destacando

la importancia de centrar la formación de profesores en lo que denomina “investigaciones estadísticas”, indicando que las mismas son una manera holística y práctica para organizar la enseñanza, propiciando la posibilidad de que los estudiantes puedan explorar y comprender los dilemas que aquejan a la sociedad actual y reaccionar de manera crítica ante los mismos.

Considerando que nuestra investigación busca reflexionar sobre una propuesta didáctica diseñada para futuros profesores de Matemática, coincidimos con el enfoque propuesto por Zapata-Cardona (2018), debido a que consideramos que las investigaciones estadísticas:

- Permiten identificar un problema en un contexto o en una sociedad particular.
- Conforman un marco propicio para imitar la práctica diaria de los estadísticos profesionales y a la vez, enfocarse en problemáticas que aquejan a la sociedad.
- Permiten vincular conocimientos, procedimientos, habilidades y disposiciones de modo de entender y participar críticamente en el mundo.
- Conciben el desarrollo del pensamiento estadístico como un proceso contextual dentro de experiencias de aprendizaje auténticas (MacGillivray y Pereira–Mendoza, 2011; Pfannkuch y Wild, 2004) centradas en conflictos sociales (Engel, 2019).
- Propician el desarrollo de distintas dimensiones del pensamiento, permitiendo poner en interacción distintas habilidades críticas (Gal, 2019) y, aunque permiten avanzar en el conocimiento estadístico, no se centran exclusivamente en el mismo.

## **MATERIAL Y MÉTODOS**

### **Tipo de investigación**

La propuesta evaluativa que se analiza en el presente trabajo se enmarca en una investigación de diseño (Molina et. al., 2011) que permite fundamentar la revisión y el rediseño del proceso evaluativo. Dicha investigación inició en 2018 y se ha desarrollado en diversas etapas. A partir de la cuarentena obligatoria por COVID-19, se agregaron entre otros cambios, algunos elementos del aula y aprendizaje invertido (Bergmann y Sams, 2012). Así, se ha desarrollado una investigación cualitativa de tipo exploratorio-descriptiva, donde una de las técnicas empleadas es el análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990), dado que está basada en la revisión de documentos. Es exploratoria, dado que el estado de conocimiento sobre la problemática que se aborda está poco estudiado en Argentina y además, los elementos que hacen que sea descriptiva, están determinados por el nivel de especificidad con el que se llega a describir el fenómeno, a partir de la identificación de las dimensiones del pensamiento estadístico implícitas en la ejecución de investigaciones estadísticas.

### **Etapas y fases de la investigación de diseño**

El diseño e implementación de la propuesta didáctica y evaluativa se ha realizado en diversas etapas que implicaron un proceso de cuatro años. En 2018, se inicia la investigación de diseño (Molina et al., 2011), a partir de la cual se buscó enfocar la propuesta didáctica en la inferencia estadística informal (Santellán y Tauber, 2016), ya que se pretendía relacionar las ideas estocásticas fundamentales como marco propicio para introducir la inferencia estadística formal y, a la vez, para que los futuros profesores pudieran construir el andamiaje conceptual necesario para la enseñanza de la Estadística en la educación secundaria.

En 2019, se añade un proceso evaluativo gradual centrado en el enfoque de las investigaciones estadísticas (Zapata-Cardona, 2018), buscando brindar la oportunidad a los estudiantes de vivenciar las problemáticas que surgen cuando al obtener datos para dar respuestas a sus preguntas de interés.

Desde 2020, a partir de la implementación de la modalidad virtual debido a la pandemia de COVID-19, se readaptan las instancias evaluativas, con lo cual se incluyen foros de discusión que exigen la participación semanal de los estudiantes, propiciando los intercambios entre pares y con las docentes, junto a un proceso de evaluación continua (Anijovich y Cappelletti, 2017), que permite valorar cualitativamente el avance de las investigaciones estadísticas realizadas por los estudiantes.

### **Características de los sujetos de estudio**

Los participantes de esta investigación son estudiantes de Profesorado de Matemática, de una universidad pública, que cursaron en 2020 y 2021, el único espacio curricular de Estadística que tienen en la carrera. Como requisito para cursar Estadística, deben haber regularizado previamente el espacio de Probabilidad, en el que tienen un enfoque tradicional, centrado en la demostración de teoremas y propiedades y en la posterior aplicación de los conceptos desarrollados.

El espacio curricular de Estadística, se desarrolla en cuarto año de la carrera, siendo éste el penúltimo, con lo cual los estudiantes han transitado distintos espacios curriculares, con una fuerte impronta determinística, con lo cual es su primera experiencia en la que deben desarrollar este tipo de trabajos investigativos y discutir con datos sobre problemas no determinísticos.

Para todo el proceso evaluativo, los estudiantes debían trabajar en grupos de dos o tres. Consideramos que grupos más grandes podrían entorpecer las relaciones entre los integrantes y también daba mayor confianza en que todos los estudiantes se involucrarían con el trabajo propuesto.

Debido a que, en los últimos años de cursado del Profesorado de Matemática, el número de estudiantes es muy pequeño (entre 6 a 8 estudiantes), en el presente trabajo describimos la producción de 10 estudiantes, quienes conformaron cuatro grupos de trabajo, entre los años 2020 y 2021.

### **Características generales del proceso evaluativo centrado en investigaciones estadísticas**

El proceso evaluativo está enfocado en la elaboración de investigaciones estadísticas, en el sentido planteado por Zapata-Cardona (2018). Así, desde 2019, se han realizado sucesivos refinamientos a la propuesta. El primer año, se propuso que los estudiantes investigaran sobre la medición de la pobreza en Argentina. De este modo, todos los grupos debían trabajar sobre la misma temática pero abordando el problema desde distintos enfoques, lo cual permitió que pudieran vivenciar desde su propia experiencia el problema de la medición estadística de un problema social específico que, desde hace muchos años, se hace más evidente en el país. De este modo indagaron sobre diversas metodologías que utilizan distintos organismos para la medición de la pobreza, abriendo la discusión sobre la confiabilidad de las mediciones y sobre los alcances y limitaciones de cada tipo de indicador analizado.

A partir de 2020, se buscó que los estudiantes abordaran otros problemas sociales o ambientales de modo que tuvieran la oportunidad de enfrentarse a distintas complejidades en lo que respecta a la indagación estadística y que pudieran proponer alternativas para los problemas elegidos.

En 2021, continuamos con este tipo de propuesta para brindar a los estudiantes un espectro más amplio de análisis y también, para que pudieran investigar sobre problemáticas que se adecuen más a sus propios intereses o inquietudes. La única modificación realizada en este año radicó en que se propusieron temas generales, entre los cuales los estudiantes debían seleccionar el que más les interesara, a diferencia de 2020 que tuvieron la libertad de elegir el tema de investigación. Este cambio se realizó en virtud de que los estudiantes tuvieron problemas para conseguir datos que les permitieran dar respuestas a sus preguntas de investigación. Por ello, se decidió acotar los temas para simplificar la búsqueda de datos adecuados para el tipo de estudio que querían realizar. Cabe aclarar que se les permitía obtener sus propios datos o trabajar con datos obtenidos por distintas entidades. Por ello, si así lo decidían, podían utilizar datos de sitios de internet de organismos oficiales, como INDEC, la Organización de Naciones Unidas (ONU), el Banco Mundial, o de organizaciones no gubernamentales, como el Observatorio de la Deuda Social Argentina (ODSA) o Gapminder.

El proceso evaluativo ha sido continuo, desde el inicio del cursado y hasta la finalización del mismo, con lo cual se brindó la posibilidad de realizar distintos avances en la investigación estadística que condujo al trabajo final que los estudiantes deben entregar para la regularización del cursado. De esta manera, construimos un proceso de evaluación integrado a la propuesta didáctica, que implicó un intercambio constante entre las metas de dominio de los contenidos disciplinares que proponemos en el espacio curricular y el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Anijovich y Cappelletti, 2017). En

este sentido, intentamos brindar un lugar de investigación y producción de conocimiento, que favorezca el desarrollo de las competencias necesarias para los futuros profesores, sin descuidar la concepción de ciudadano crítico de una sociedad cada vez más compleja y dinámica. Se añade que, este tipo de instancia evaluativa busca comprometer a los estudiantes en su propia formación y busca propiciar la valoración y retroalimentación de sus propios saberes (Anijovich y Cappeletti, 2017).

Este tipo de evaluación permitió monitorear no sólo el dominio de conceptos estadísticos sino también, observar las habilidades y disposiciones críticas que los estudiantes ponían en juego al avanzar en sus propios trabajos de investigación. Dado que, tanto el conocimiento específico como el contextual y las disposiciones, son necesarios para llevar adelante un trabajo bien fundamentado en la evidencia, es necesario que, en un proceso evaluativo, interactúen las dimensiones del pensamiento estadístico descritas previamente. Por ello, en el siguiente apartado describimos el proceso evaluativo y las relaciones esperadas entre cada momento y las dimensiones del pensamiento estadístico.

### **DIMENSIONES DEL PENSAMIENTO IMPLÍCITOS EN LA PROPUESTA EVALUATIVA**

Dado que las investigaciones estadísticas no implican el planteo de un problema definido, nos propusimos brindar a los estudiantes algunas orientaciones que debían cumplir en distintas etapas. Así, en la Tabla 1, se resumen los momentos de trabajo y su temporalización. En la Tabla 2, se presenta una síntesis de las relaciones de cada momento con las dimensiones del pensamiento estadístico, que sirve de guía para el análisis de los trabajos de los estudiantes.

**Tabla 1.** *Momentos de trabajo para el desarrollo de la investigación estadística*

<b>Temporalización</b>	<b>Momentos de trabajo</b>
Segunda semana de cursado	Momento 1: Conformación del grupo de trabajo y definición de la problemática a investigar
Cuarta semana de cursado	Momento 2: Fundamentación del tema elegido
Sexta semana de cursado	Momento 3: Definición de la metodología
Decimotercera semana de cursado	Momento 4: Procesamiento de datos y discusión de resultados
Última semana de cursado	Momento 5: Socialización oral del trabajo

**Fuente:** Elaboración propia

En el Momento 1 de conformación del equipo de trabajo y definición de la problemática a investigar, los estudiantes deben elegir un tema que esté incluido en uno de los cuatro ejes siguientes:

Eje 1. Desigualdad: económica, de género, política, educativa.

Eje 2. Desarrollo humano: desarrollo democrático, felicidad, educación, salud, sociedad.

Eje 3. Medioambiente: Contaminación, calentamiento global, polución.

Eje 4. Salud: VIH, Dengue, COVID-19, mortalidad infantil, problemas psicológicos.

Considerando que los estudiantes del Profesorado de Matemática no han tenido oportunidad de desarrollar trabajos de este tipo a lo largo de su carrera, y por ello tienen escasas disposiciones orientadas a la indagación por fuera de problemas intramatemáticos, es que decidimos sugerirles que, para interiorizarse de algunos de los ejes propuestos, podían comenzar el proceso de indagación leyendo el Informe de Desarrollo Humano 2020 (PNUD, 2020), el informe sobre la pobreza multidimensional del Observatorio de la Deuda Social Argentina (ODSA) y/o los Objetivos de Desarrollo Sostenible enunciados por la Organización de Naciones Unidas.

Este primer momento, permite el reconocimiento de que una situación real puede provocar un problema cuya resolución no implica una estructura determinada (Gal, 2019) y además, los invita a explorar las complejidades de un problema social y las múltiples dimensiones de abordaje del mismo, asociadas con las múltiples variables e indicadores que permitirían aportar información sobre el problema en cuestión. Es así que, este momento está asociado a las dimensiones del cuestionamiento y de la evidencia y también se asocia con las dimensiones de la comunicación y la tecnología, porque la lectura de los informes sugeridos y de otros que ellos mismos podían buscar, implica que deban interpretar la información, tanto social como técnico-metodológica que brindan esos informes.

En el Momento 2: Fundamentación del tema elegido, una vez que los estudiantes eligen un eje problemático y un tema específico, deben fundamentar el motivo de su elección y además, elaborar al menos una pregunta de investigación e indicar qué es lo que pretenden o esperan responderse sobre el problema, a partir de los datos que recolecten o seleccionen. Asimismo, se les pide que expliciten los objetivos de modo de indicar lo que esperan lograr con la investigación. En este sentido, también se les brinda algunas sugerencias, aportándoles materiales sobre metodología de la investigación. Este segundo momento tiene una fuerte ligadura con la dimensión de la metodología y es fundamental para llevar a cabo una investigación estadística que tenga un alto grado de coherencia y validez.

En el Momento 3: Definición de la metodología, se les pide que definan: El tipo de estudio a realizar (descriptivo, exploratorio, explicativo). Los sujetos de estudio. Se les indica que los sujetos pueden ser personas, documentos oficiales, o cualquier otro tipo de elementos que sean factibles de

ser estudiados y analizados a través de evidencia estadística. El tipo de muestreo. En relación con la descripción del tipo de muestreo se les solicita que especifiquen si trabajarán con una muestra o una población, que indiquen si es necesario o no trabajar con una muestra y que fundamenten porqué. En el caso que decidan realizar una muestra, se les pide que indiquen su tipo, composición y alcance (si permite realizar generalizaciones o no). En el caso que los estudiantes decidan trabajar con datos recolectados por algún organismo, deben especificar los criterios que dicho organismo ha utilizado para tomar la muestra. La definición metodológica de los datos y el origen de los mismos. Aquí deben indicar si obtendrán los datos específicamente para este trabajo o si los elegirán de algún organismo y fundamentar esa decisión. En el caso que opten por trabajar con datos propios, deben indicar la forma en que se mide cada tipo de datos. Si son datos obtenidos de algún organismo, deben indicar qué definición metodológica se considera para cada tipo de dato utilizado.

Al tener que definir las características del tipo de estudio, se sientan las bases que guiarán el resto del proceso metodológico, esto puede propiciar el desarrollo de actitudes que eviten las especulaciones subjetivas (Gal, 2004). Además, las decisiones sobre si realizar o no una muestra, cómo construir la muestra y la definición de los datos necesarios y adecuados para responder a la pregunta de investigación, provocan el cuestionamiento sobre el grado de coherencia que puede haber entre el tema a investigar, el tipo de estudio que se quiere realizar, las preguntas que se busca responder y los objetivos que pretenden lograrse. Todo ello propician relaciones de distintos elementos de la alfabetización estadística, contextual y documental (Gal, 2019), íntimamente relacionados con las dimensiones de la evidencia, de los datos, de la metodología, del cuestionamiento y de la objetividad.

En el Momento 4: Trabajo con los datos. Si los estudiantes optaron por trabajar con datos de algún organismo, se les pide que analicen si es necesario realizar una depuración de los mismos. Por ejemplo: seleccionar algunas variables de una gran base de datos o analizar si hay datos faltantes o datos que presenten errores de carga. Además, deben elegir el o los análisis estadísticos que son necesarios para describir los datos. Para cada tipo de análisis, deben fundamentar por qué y para qué se aplica. También, se solicita la elaboración de un informe en el que se describan los resultados que se desprenden de los análisis realizados y la redacción de conclusiones, considerando los objetivos y las preguntas de investigación planteadas. Asimismo, se les solicita que elaboren un pequeño ensayo en el que integren la discusión de resultados con la problemática elegida, indicando cuáles son los aportes que pueden brindar sobre el problema estudiado y qué limitaciones pueden identificar.

El momento 4 es el más complejo, en el sentido que deben tomar diversas decisiones estadísticas e integrar las mismas con los conocimientos específicos y con el conocimiento contextual,

que hayan logrado sobre el problema bajo análisis. Así, para el logro satisfactorio de este proceso, es necesario que relacionen todas las dimensiones del pensamiento que hemos explicitado antes. Esto es así, porque además de considerar la objetividad, de cuestionarse sobre la adecuación de los análisis según el tipo de estudio, pregunta de investigación y metodología definida, también deben realizar distintos tipos de transnumeración que los llevará a una adecuada discusión de resultados. Para poder realizar proceso de transnumeración deben hacer uso de la tecnología, tanto para la búsqueda de información sobre el problema, como para la búsqueda u obtención de datos y para el análisis de los mismos. En los distintos procesos de transnumeración deben integrar las dimensiones de la señal y el ruido y la variación, lo cual los llevará a obtener conclusiones que sean pertinentes con los análisis realizados. Por otra parte, en la elaboración del informe y de las conclusiones deben hacer uso de distintas herramientas de comunicación, de modo que sea comprensible por cualquier lector.

En el Momento 5: Socialización oral del trabajo, cada grupo debe elaborar una presentación que tenga una duración de 10 a 15 minutos como máximo. En la misma, se espera que presenten a todo el curso los puntos más relevantes de su investigación y que respondan a las preguntas que puedan realizar sus compañeros. A partir de 2020, se les solicitó que elaboren un video de 10 minutos para compartir con sus compañeros a través de YouTube. De este modo, se propicia la comunicación, exigiendo resumir el trabajo de una manera comprensible y se generan instancias en la que los estudiantes deben aplicar conocimientos relacionados con distintas herramientas comunicativas (elaboración y edición de videos, trabajo con redes sociales, entre otros). Con lo cual, en este momento se potencia el trabajo con las dimensiones de la transnumeración, la tecnología y la comunicación.

**Tabla 2.** Dimensiones del pensamiento estadístico que se ponen en relación en cada momento de trabajo

<b>Momentos de trabajo</b>	<b>Dimensiones de pensamiento que se relacionan</b>
Momento 1: Conformación del grupo de trabajo y definición de la problemática a investigar	Cuestionamiento – Evidencia – Comunicación – Tecnología
Momento 2: Fundamentación del tema elegido	Metodología
Momento 3: Definición de la metodología	Evidencia – Datos – Metodología – Cuestionamiento – Objetividad
Momento 4: Procesamiento de datos y discusión de resultados	Transnumeración – Objetividad – Tecnología – Señal y Ruido – Variación – Comunicación
Momento 5: Socialización oral del trabajo	Comunicación – Transnumeración - Tecnología

**Fuente:** Elaboración propia

## ALGUNAS EVIDENCIAS SOBRE EL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO EN LAS INVESTIGACIONES REALIZADAS

En este apartado, describiremos algunas generalidades y particularidades de las investigaciones estadísticas llevadas a cabo por los estudiantes, lo cual forma parte del análisis de contenido realizado sobre las producciones de los estudiantes. Así, dividimos el análisis en tres sub-apartados, referidos a: temática elegida, origen de los datos y tipos de análisis estadísticos realizados y conclusiones obtenidas.

### Temáticas seleccionadas para la investigación estadística

Los temas elegidos por los estudiantes para realizar sus investigaciones estadísticas han sido diversos. En la Tabla 3, se resumen los ejes y temáticas específicas seleccionados por los estudiantes, se indica si decidieron recabar sus propios datos o si tomaron datos provenientes de otras fuentes y, por último, se especifica el año en que fue llevada a cabo cada investigación. Así, podemos observar que dos de los grupos (Grupos 2 y 4), han elegido temáticas relacionadas con el eje de Desarrollo Humano (Eje 2), más precisamente con problemas asociados a la Educación y más particularmente, relacionados con las consecuencias de la cuarentena y la implementación de la enseñanza virtual.

**Tabla 3.** Ejes y temáticas elegidas, origen de datos utilizados y año de realización de la investigación

Eje y temática elegida por cada grupo	Origen de los datos utilizados	Año de realización
Grupo 1: Eje 3. Medioambiente. Temática: Incendios forestales	Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible de Argentina. Dirección Nacional de Bosques.	2020
Grupo 2: Eje 2. Desarrollo Humano. Temática: Escenarios visibles por el Covid-19 que posibilitan explorar y repensar la educación virtual	Datos propios obtenidos a partir de una encuesta realizada en formulario Google	2020
Grupo 3: Eje 4. Salud. Temática: Influencia de Instagram en la autoestima en un grupo de jóvenes	Datos propios obtenidos a partir de un cuestionario realizado en formulario Google	2021
Grupo 4: Eje 2. Desarrollo Humano. Temática: Tecnología digital en la educación: consecuencias de la pandemia observadas por padres, docentes y/o tutores de estudiantes de escuelas santafesinas de nivel secundario	Datos propios obtenidos a partir de una encuesta realizada en formulario Google	2021

**Fuente:** Elaboración propia

El grupo 1 ha elegido el eje de Medioambiente (Eje 3), y más específicamente, los incendios forestales. La razón de esta elección se basó en que en el año 2020, la región cercana a la universidad,

sufrió la sequía más extrema en 80 años y asociado a ello, se sucedieron varios meses de numerosos incendios, algunos de ellos, espontáneos debidos a la sequía y al calor y muchos más, provocados por las personas, de manera involuntaria o persiguiendo determinados intereses económicos.

Por último, el grupo 3, eligió el eje de Salud (Eje 4) y más particularmente, una temática asociada con problemas psicológicos provocados por la exposición mediática en redes sociales. Tal como los estudiantes lo fundamentan, esta es una problemática que atraviesa a los adolescentes y jóvenes en la actualidad y por ello consideraron relevante analizarla, dado que reconocen que es algo que puede afectar a sus futuras vidas profesionales en sus roles de profesores.

### **Origen de los datos utilizados en la investigación estadística**

Como se resume en la Tabla 3, sólo el grupo 1 decidió trabajar con datos obtenidos del sitio de la Dirección Nacional de Bosques, dependiente del Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible de Argentina. En este caso, los estudiantes fundamentaron su decisión en la complejidad de obtener datos propios, debido a que era necesario cubrir un área sumamente extensa y a que no tenían la posibilidad de determinar si cada incendio fue involuntario o intencional, ya que ello requiere de conocimiento de expertos. Teniendo en cuenta esto, los estudiantes realizaron búsquedas por internet en organismos oficiales de Argentina relacionados con la temática. A partir de esta indagación, identificaron distintos sitios, muchos de los cuales tenían pocos datos disponibles, o en algunos casos, tenían datos incompletos o sin acceso público. Todo ello los llevó a decidir que trabajarían con la base de datos abierta y pública que se comparte desde la Dirección Nacional de Bosques.

Así, podemos indicar que si bien estos estudiantes no tuvieron que enfrentarse a un proceso de diseño de un instrumento para recolectar datos, el proceso de indagación y de revisión de literatura que tuvieron realizar, propició el uso de la tecnología para la búsqueda de información, lo que los obligó a poner en juego habilidades críticas y de alfabetización documental (Gal, 2004, 2019), conectadas a la problemática sobre la que se habían propuesto indagar. Asimismo, ese proceso requirió de habilidades de alfabetización, estadística y contextual, necesarias para poder filtrar toda la información recabada y para tomar decisiones sobre los sitios que les permitían obtener datos que sirvieran para analizar estadísticamente y, por sobre todo, para responder a la o las preguntas de investigación que se habían planteado. En este sentido, se ponen de manifiesto las dimensiones de la tecnología, la transnumeración, la metodología y los datos, el cuestionamiento y la valoración objetiva. Además, a través de las relaciones entre esas dimensiones, han debido intervenir elementos de la alfabetización estadística, principalmente las habilidades críticas y de alfabetización. Más

particularmente, los estudiantes han tenido que prever qué variables y tipo de datos podían ser necesarios para dar respuestas a su pregunta de investigación y así, orientar la búsqueda.

En el caso de los otros grupos (Grupos 2, 3 y 4), decidieron recabar sus propios datos, lo cual implicó que la construcción de su propio instrumento de recolección de información. Por supuesto, ello implicó un proceso diferente al que siguió el Grupo 1, pero con una complejidad similar aunque pusieron en juego otras dimensiones del pensamiento estadístico y otros elementos de alfabetización.

Así, una de las dificultades o confusiones observadas en los avances presentados fue la confusión entre preguntas de investigación y preguntas del instrumento de recolección de datos. Esto implicó un proceso de análisis y de estudio de referentes metodológicos que los llevó a la diferenciación y delimitación de ambos tipos de interrogantes. En la Figura 1, se presenta evidencia de la confusión mencionada, referida a la entrega parcial del Grupo 4. En el Grupo 2 pudo observarse una dificultad similar.

**Figura 1.** Evidencia sobre la confusión entre preguntas de investigación y del instrumento de recolección de datos

<b>Pregunta/s de investigación:</b>	
1. Responde la encuesta en calidad de: <input type="checkbox"/> Padre, madre o tutor.	
<input type="checkbox"/> Docente.	
<input type="checkbox"/> Ambas.	
<i>Según la respuesta anterior se los deriva a una determinado cuestionario (en el caso de "ambas" responde los dos)</i>	
<b>Padre Madre o Tutor:</b> 1. ¿Cuántos jóvenes a su cargo se encuentran en el sistema educativo obligatorio?	<b>Para Docentes:</b> 1. La/s institución/es en donde trabajan es: <input type="checkbox"/> Escuela secundaria de gestión estatal.

**Fuente:** Extracto obtenido de la primera entrega parcial del Grupo 4 (Año 2021)

Este es uno de los tantos fundamentos que podemos utilizar para valorizar el trabajo con investigaciones estadísticas, dado que el hecho de que los estudiantes vayan socializando sus avances, permite este tipo de revisiones y también, permite establecer intercambios centrados en promover la reflexión situada en los distintos elementos y etapas que componen una investigación. En este sentido, los intercambios y la reflexión que se produce, abre espacios para nuevos aprendizajes que no refieren a los contenidos estadísticos específicos del plan de estudios, pero que conforman el andamiaje metodológico dentro del que debe vivir el análisis estadístico. En palabras de Behar y Grima (2014), este proceso permite sentar las bases para la generación del pensamiento estadístico a largo plazo.

Este proceso de revisión del propio trabajo, de vincular las lecturas metodológicas adicionales y sus relaciones con los aspectos estadísticos más específicos, como la definición de las variables a analizar, permitió que los estudiantes reflexionaran críticamente sobre sus propios trabajos y pudieran redefinir aquellos elementos que no eran adecuados. En las Figuras 2 y 3, se presentan las preguntas de investigación y una parte de las preguntas presentadas en el instrumento construido. Con base en esa evidencia, es posible indicar que este grupo logró la revisión mencionada y pudo identificar las diferencias entre ambos tipos de interrogantes.

**Figura 2.** Preguntas de investigación presentadas en el informe final por el Grupo 4

<p><b><u>Pregunta/s de investigación:</u></b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. ¿Los medios de comunicación digitales para el intercambio han sido adecuados para mantener el contacto entre los/as estudiantes, madres y padres, tutores y docentes?</li><li>2. ¿Fue posible garantizar la permanencia y la transición en el sistema educativo por medio de los dispositivos tecnológicos?</li><li>3. ¿A quién/es se considera responsable de que la educación esté al alcance de todos?</li></ol>
--

**Fuente:** Información obtenida de la entrega final del Grupo 4 (Año 2021)

En el caso de los Grupos 2 y 3, una de las dificultades se centró en la definición de variables asociadas a los datos que se recolectaban con el instrumento construido (en ambos casos, encuestas). Esto se debió a que, en las pautas iniciales se estipuló que debían considerar la obtención de datos asociados con variables cualitativas con escalas nominal y ordinal y, con variables cuantitativas. Así, se evidenció que, en casos donde se consideraban respuestas asociadas a una escala Likert, los estudiantes clasificaban a la variable asociada como cuantitativa, y no identificaban que correspondía a una variable cualitativa ordinal. Cuando se le preguntaba el fundamento de porqué era cuantitativa, los estudiantes indicaban: “porque los datos que obtenemos son números”. En otros casos, se observaron confusiones entre la definición de la variable, su clasificación y la escala de medición. Un ejemplo de ello se presenta en la Figura 4, donde se muestra una de las preguntas realizadas en la encuesta por los estudiantes del Grupo 3, la variable tal como la definieron, su clasificación que es correcta y la escala de medición, que como se observa es incorrecta.

De esta manera, podemos indicar que los grupos que decidieron elaborar sus propios instrumentos, también debieron poner en relación diversas dimensiones del pensamiento estadístico, tales como: Metodología, Comunicación, Datos, Evidencia y Valoración objetiva y aplicaron, además, distintos elementos de la alfabetización estadística necesarios para poder diferenciar entre dato, variable, definición de la variable, tipo de variable y de escala, unidad de observación, entre otros.

**Figura 3.** Algunas preguntas incluidas en el cuestionario elaborado por el Grupo 4

<p>5. ¿Por medio de qué plataforma recibían las actividades y se comunicaban con el/la docente en modalidad virtual?</p> <p><input type="checkbox"/> Classroom.</p> <p><input type="checkbox"/> Correo electrónico.</p> <p><input type="checkbox"/> Redes sociales (WhatsApp, Telegram, Facebook).</p> <p><input type="checkbox"/> Fotocopias.</p> <p><input type="checkbox"/> Videoconferencia.</p> <p><input type="checkbox"/> Otro:.....</p> <p>6. ¿Considera que el medio empleado era el adecuado?</p> <p><input type="checkbox"/> Si.</p> <p><input type="checkbox"/> No.</p> <p>7. Justifique su elección anterior.....</p> <p>8. ¿El/la estudiante recurrió a clases de apoyo?</p> <p><input type="checkbox"/> Si.</p> <p><input type="checkbox"/> No.</p> <p>9. Si en la pregunta anterior respondió "Si" ¿Cuál fue el motivo por el que recurrió?</p> <p><input type="checkbox"/> Realizar las actividades semanales.</p> <p><input type="checkbox"/> Profundizar los temas vistos.</p> <p><input type="checkbox"/> Prepararse para instancias de acreditación.</p> <p><input type="checkbox"/> Otro: .....</p>	<p><input type="checkbox"/> No</p> <p>5. Justifique la elección anterior.....</p> <p>6. ¿Cuál considera fue su grado de acompañamiento para con los/as estudiantes? (Considere 1 bajo y 5 alto)</p> <p><input type="checkbox"/> 1.</p> <p><input type="checkbox"/> 2.</p> <p><input type="checkbox"/> 3.</p> <p><input type="checkbox"/> 4.</p> <p><input type="checkbox"/> 5.</p> <p>7. Justifique su elección anterior.....</p>
---	---

**Fuente:** Información obtenida de la entrega final del Grupo 4 (Año 2021)

**Figura 4.** Ejemplo de una pregunta del instrumento, definición y clasificación de la variable y escala de medición

<p><b>Pregunta 9:</b> "¿Le das importancia a la cantidad de personas que te siguen y seguís en Instagram? (por ejemplo, "que el número de seguidores sea mayor a la cantidad de personas que sigo")"</p> <p><u>Variable:</u> Consideración que le da cada joven a la cantidad de personas que sigue y que lo siguen en Instagram</p> <p><u>Tipo:</u> Cualitativa. <u>Escala de medición:</u> De razón o proporción</p>
--

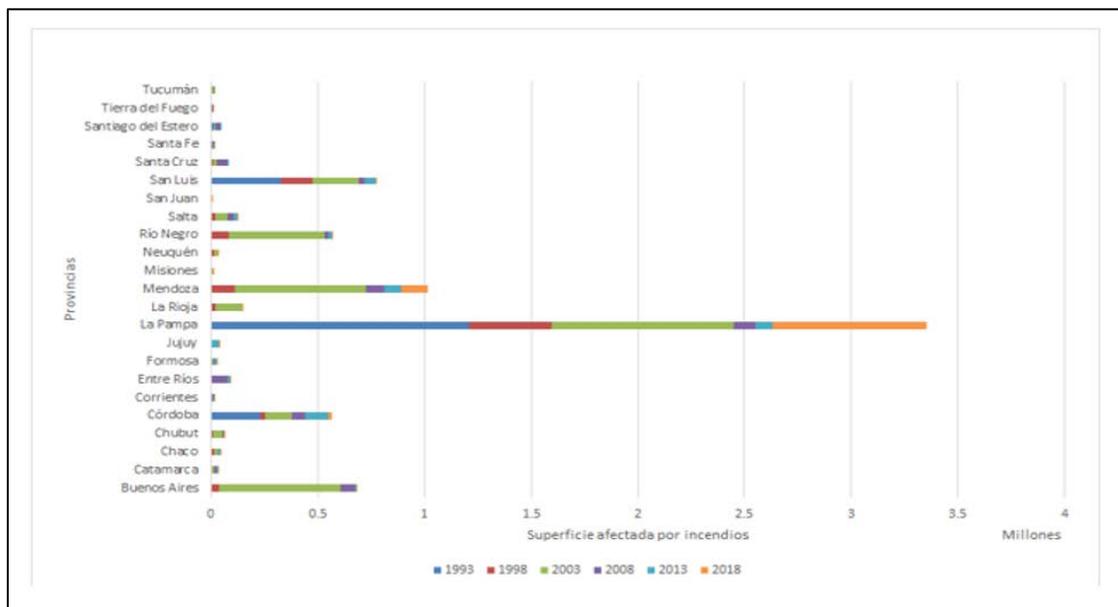
**Fuente:** Información obtenida de la primera entrega parcial del Grupo 3 (Año 2021)

En lo referido al trabajo con los datos de la investigación (ya sea datos propios u obtenidos desde un organismo oficial), podemos indicar que ha sido una potente fuente de aprendizaje ya que, tanto el proceso de construcción de los datos, como el proceso de depuración y de sistematización de los mismos, son momentos únicos que sólo pueden vivirse cuando se realiza una investigación estadística. Este proceso no surge si simplemente se resuelve un problema de un libro en el que los datos ya vienen dados. A modo de ejemplo, los estudiantes del Grupo 1, que trabajaron con los incendios forestales, cuando tuvieron que procesar con Rstudio los datos obtenidos del sitio elegido, encontraron que la versión de Excel con la que levantaron los datos no coincidía con la versión en la que se construyó la base de datos. Esto implicó que, por ejemplo, un dato que indicaba que en el año

2020, en la provincia de La Pampa hubo 1.200,00 Km<sup>2</sup> de incendios, la versión de software que ellos utilizaban leía ese dato como si fuera 1.200.000 Km<sup>2</sup>. Esta dificultad pudo ser detectada, en una de las entregas parciales, una vez concluida la etapa de análisis y procesamiento de los datos, cuando los estudiantes presentaron en la clase el gráfico que se muestra en la Figura 5. Al momento de exponer oralmente lo que habían analizado, uno de los integrantes del grupo indicó que le llamaba la atención el dato referido a la provincia de La Pampa, para el año 1993. A raíz de ello, las docentes pidieron a los estudiantes que verificaran la veracidad de la información, con lo cual recurrieron primero a indagar sobre la superficie de la provincia, resultando 143.440 Km<sup>2</sup>, según datos del sitio oficial: <https://www.argentina.gob.ar/lapampa>. A partir de esa información, los mismos estudiantes indicaron que ese dato debía ser erróneo, con lo cual las docentes les plantearon el desafío de investigar cuál podía ser el error. Así, los estudiantes buscaron información complementaria y de allí, pudieron determinar que el error provenía de una lectura incorrecta que hacía el software, propio de la configuración asociada con el significado del punto (decimal o separador de miles). Una vez develado el problema, revisaron y depuraron la base de datos para rehacer los resúmenes elaborados.

Este es otro punto importante que se puede vivenciar cuando alguien se enfrenta a un análisis estadístico real y, por supuesto, provoca distintos tipos de razonamientos que llevan a poner en relación dimensiones del pensamiento tales como: Evidencia, Datos, Metodología, Tecnología y Transnumeración.

**Figura 5.** Gráfico con datos erróneos elaborado por el Grupo 1



**Fuente:** Resumen obtenido de la primera entrega parcial del Grupo 1 (Año 2020)

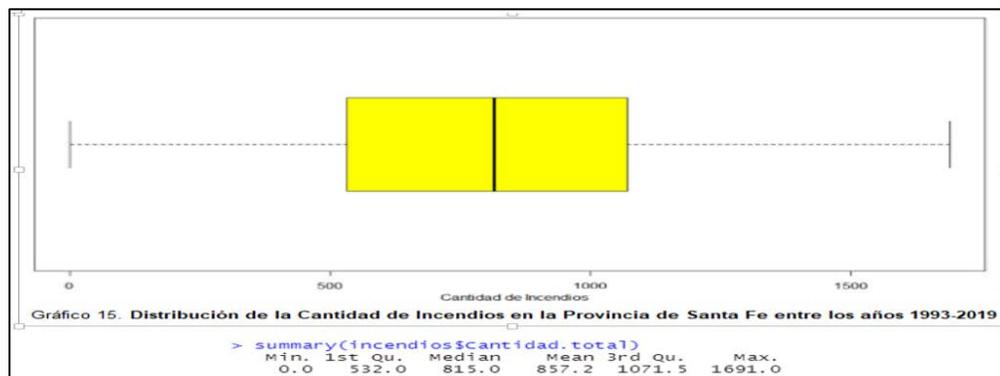
### Análisis estadísticos y conclusiones obtenidas a partir de la investigación estadística

En cuanto a los análisis estadísticos realizados por los estudiantes, han sido variados y la elección de los mismos ha sido coherente con el tipo de variable y de datos que pretendían resumir. Este proceso habilitó a trabajar con distintas herramientas tecnológicas. Más específicamente, a los grupos que diseñaron su propio instrumento, les permitió aprender a diseñar un formulario Google para distribuir la encuesta o cuestionario de manera on-line. Asimismo, una vez recolectados los datos, pudieron observar que según como habían definido el tipo de respuestas en el formulario, los resúmenes que presentaba Google, no eran adecuados para representar los datos recolectados. Esto los obligó a tener que mejorar la base de datos y a elaborar sus propios resúmenes, tomando conciencia de que un software no resuelve directamente los problemas del análisis de datos como lo expresaban los docentes encuestados por Tauber (2017).

Así, tanto los grupos que realizaron su propio instrumento, como los que trabajaron con una base de datos obtenida de un sitio oficial, utilizaron Excel para la elaboración o depuración de la base de datos y Rstudio y Geogebra, para realizar los resúmenes que sirvieron de evidencia para la elaboración de los informes y de las conclusiones que daban respuesta a las preguntas de investigación.

A modo de ejemplo, en las Figuras 5 a 9, se presenta una muestra de los análisis elaborados por los estudiantes en sus informes finales. En el caso del Grupo 2, mostramos parte de la base de datos que construyeron a partir de la depuración de las respuestas al formulario Google diseñado.

**Figura 6.** Resúmenes elaborados por el Grupo 1



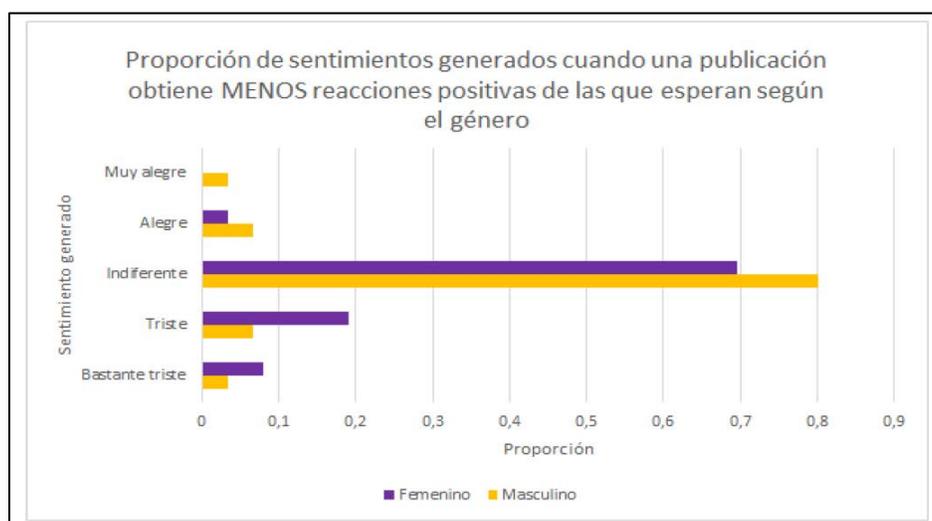
**Fuente:** Obtenido del informe final del Grupo 1 (Año 2020)

**Figura 7.** Base de datos parcial elaborada por el Grupo 2

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
D_A	D_J	D_MD	D_APP	D_AAP	D_CT	D_VIAS	D_LF	D_D	D_CD	D_SI	D_CO	D_OT	D_UPE	D_PEP	D_PE
24 FHUC - ENS 32		5 SI	SI	H	PC		3	1	2	3	2	SI	IF	AV - A2020	
25 FHUC		4 SI	SI	H	PC - CeWiñ		1	1	1	2	2	No		EV - AV - A20	
13 ISP 8 - FHUC		1 SI	SI	H	PC		1	1	1	3	1	SA	EV	EV	
5 ISLC		1 SI	SI	H	PC - CeWiñ - CelDM		1	1	2	1	1	No		EV	
15 UNER		4 SI	SI	H	PC		1	1	1	2	1	SI	M	AV	
34 CSSM		3 SI	SI	H	PC		1	1	1	1	1	SI	ED	EV - AV	
33,67 UNMDP - ISFT 151		4 SI	SI	H	PC		1	1	2	2	1	SI	M	AV	
4 UNRAF - CRSF		3 SI	SI	H	PC - CeWiñ		2	5	5	4	1	No		EV - AV	
4 FHUC - FICH		5 SI	SI	H	PC - CeWiñ - CelDM		2	1	3	2	2	SA	EF - EV	EV - A2020	
14 UCSE - ISP 2 - UNRAF		10 SI	SI	H	PC		2	2	1	2	1	SA	M - ED	AV	
5 ISP 20		7 SI	SI	H	PC - CeWiñ		1	1	2	3	1	SI	CE	AV	
8 FHaYCS - FCYT - ISFD 229		3 SI	SI	H	PC - CeWiñ - CelDM		1	1	2	3	1	SI	M - S	AV	
14 ISP 6 - ISP 60 - ESN 30		8 SI	SI	H	PC		1	3	4	2	1	No		AV	
7 ISFD		3 SI	SI	H	PC - CelDM		2	2	2	5	1	No		AV	
32 FHUC		2 SI	SI	H	PC		3	4	3	5	2	SA	EV	EV - A2020	
30 FCE - UTN		3 SI	SI	H	PC		5	4	4	3	1	SI	EV - CV	EV	
15 ISPI 4013 - UTN		3 SI	SI	H	PC - CeWiñ - CelDM		5	3	3	1	5 RH	No		EV	
8 IFD		2 SI	SI	H	PC - CelDM		4	1	1	3	1	SA	PI	EV	
15 FHUC - ISP 8		8 SI	SI	H	PC - CeWiñ - CelDM		1	2	3	5	4 CA	No		A2020	
14 ESUNL - EB		5 SI	SI	H	PC - CeWiñ		4	5	5	5	2 ID	SA	EV	EV - AV - A20	

**Fuente:** Obtenido del informe final del Grupo 2 (Año 2020)

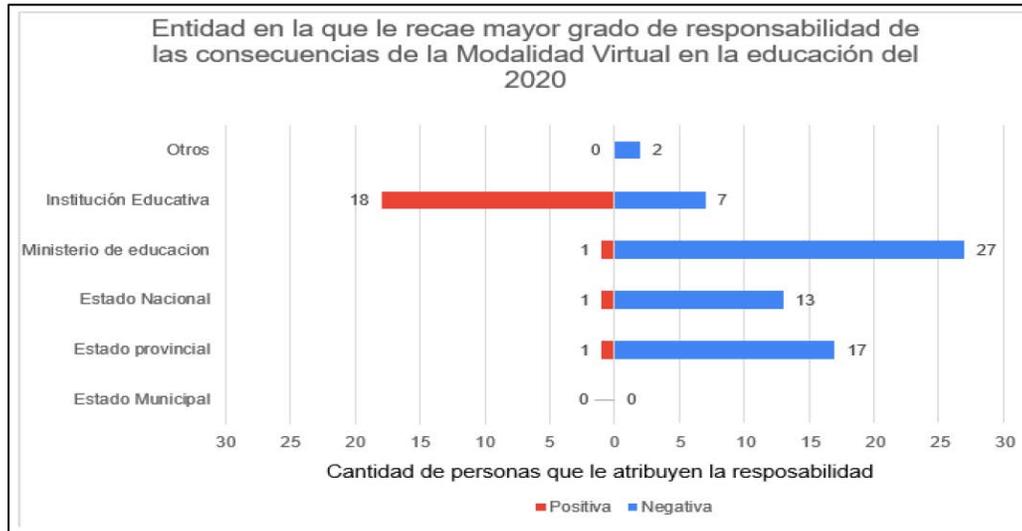
**Figura 8.** Gráfico de barras adosadas elaborado por el Grupo 3



**Fuente:** Obtenido del informe final del Grupo 3 (Año 2021)

A partir de los análisis y resúmenes presentados por los estudiantes, es posible indicar que el producto final permite evidenciar que han logrado establecer relaciones complejas entre elementos de la alfabetización estadística y dimensiones del pensamiento estadístico. Esas relaciones quedan aún más explícitas cuando se analizan las descripciones y las conclusiones incluidas en el informe estadístico que debían elaborar.

**Figura 9.** Gráfico de barras bidireccionales elaborado por el Grupo 4



**Fuente:** Obtenido del informe final del Grupo 4 (Año 2021)

En las Figuras 10 y 11, se presentan pequeñas partes extraídas del informe estadístico y de las conclusiones redactadas por el Grupo 4, sobre las consecuencias de la pandemia en la educación secundaria. Incluimos sólo estos párrafos a modo de ejemplo, pero podemos afirmar que los informes elaborados por los otros grupos, han sido muy completos y al igual que el Grupo 4, fundamentaron sus conclusiones con la evidencia analizada.

**Figura 10.** Parte del informe estadístico elaborado por el Grupo 4

Podemos afirmar que, en cuanto a la cantidad de dispositivos digitales de los que disponían los hogares, la moda es de tres dispositivos (se repite 5 veces), y la moda en la cantidad de miembros del hogar que utilizan los dispositivos es 2 (se repite 5 veces). Sin embargo, podemos observar que, al realizar la proporción entre la cantidad de dispositivos digitales y el número de miembros del hogar, la mediana es exactamente 1, es decir, el 50% de la población analizada contaba como mucho con un dispositivo digital por miembro del hogar.

**Fuente:** Obtenido del informe final del Grupo 4 (Año 2021)

**Figura 11.** *Parte de las conclusiones finales realizadas por el Grupo 4*

<b>CONCLUSIONES</b>	
A partir de los resultados obtenidos y descritos anteriormente, podemos realizar las siguientes conclusiones:	
✓	Las/os madres/padres y/o tutores, en su mayoría, se encuentran satisfechos con los medios de comunicación digital utilizados para el intercambio entre las/os docentes y estudiantes, mientras que las/os docentes, si bien se encuentran en un alto nivel de satisfacción con el uso de los mismos, se presenta insatisfacción por parte de algunos de ellas/os.
✓	Las/os madres/padres y/o tutores y docentes, en su mayoría, consideran que las entidades responsables de que la modalidad virtual en la educación haya afectado de forma positiva es la Institución Educativa, mientras que le atribuyen el carácter negativo al Ministerio de Educación.
✓	Durante el 2020, la mayoría de las/os docentes hicieron uso de una computadora personal para fines educativos, mientras que la mayoría de las/os estudiantes utilizaba el celular. Si bien muchos de estos últimos contaban con computadoras como medio destinado para la realización de actividades escolares, estas eran compartidas con hermanas/os, padres/madres y/o otros miembros del hogar.
✓	La mayoría de las/os madres/padres, tutores y docentes dispuso de conexión a internet por medio de Wi-Fi de red domiciliaria.

**Fuente:** Obtenido del informe final del Grupo 4 (Año 2021)

A partir del análisis que hemos realizado sobre todos los informes, podemos identificar que los estudiantes lograron relacionar todas las dimensiones del pensamiento, con diversas variantes asociadas a la temática elegida. Todos supieron fundamentar sus conclusiones, considerando no sólo los datos sino también los resúmenes y medidas que, en su mayoría, han sido integrados al informe de manera coherente y adecuada. Asimismo, es posible indicar que han utilizado resúmenes univariados y bivariados, y que en algunos casos, a partir de las conclusiones a las que arribaron, se permitieron sugerir nuevas líneas para profundizar en la indagación.

El análisis de contenido realizado con base en los trabajos de los estudiantes, se adoptó también para la elaboración de rúbricas que fueron compartidas con los estudiantes y que permitieron realizar una valoración cualitativa del trabajo de cada grupo, abriendo un espacio donde se resaltaban las virtudes de cada trabajo y se aportaban sugerencias para ampliar o profundizar en aquellos puntos en los que era necesario. Estas rúbricas se utilizaron durante todo el proceso evaluativo y formaron parte de las devoluciones realizadas en cada uno de los momentos de trabajo descritos en la Tabla 1.

## **DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

Con base en la evidencia presentada en el apartado anterior, consideramos que ha sido posible llevar a cabo un proceso evaluativo que permite vislumbrar distintas relaciones entre elementos de la alfabetización y del pensamiento estadísticos. Tal como propone Behar (2018), el modelo propuesto por Pfannkuch y Wild (2004), así como el que proponemos en nuestro marco de referencia, pueden

llegar a ser modelos abstractos para los profesores y, por lo tanto, es necesario llevar a cabo acciones que permitan que las personas “se ensucien las manos con los datos”. En este sentido, consideramos que el análisis de contenido realizado, ha permitido mostrar en qué etapas o momentos del trabajo de cada grupo se han puesto en funcionamiento cada una de las dimensiones del pensamiento estadístico. Además, esta experiencia ha brindado posibilidades para discutir con los futuros profesores cuáles son los beneficios de trabajar con datos reales que se generan a partir de un contexto y de un problema propuesto por ellos mismos.

También del análisis se desprende que cada tema motivó, distintos procesos que, en términos de Pfannkuch y Wild (2004), estarían implícitos en los distintos tipos de pensamiento asociados a los ciclos de investigación e interrogativo. Particularmente, la indagación bibliográfica, el estudio de las metodologías utilizadas por distintos organismos, la búsqueda de datos o la necesidad de construcción de los mismos, implica también otras dimensiones propuestas en Behar (2009), tales como la necesidad de obtener evidencia confiable, de ser objetivo y, por lo tanto, la necesidad de datos y el reconocimiento del alcance y validez de los mismos.

Enfrentar a los futuros profesores a un proceso estadístico, ya sea de toma de datos como de interpretación metodológica de los mismos, implicó que tuvieran que concientizarse de que para poner en funcionamiento las ideas estocásticas fundamentales, es necesario inmiscuirse en un proceso de investigación estadística, el cual implica hacerse preguntas, entender el contexto, pensar críticamente sobre la situación bajo estudio. En este sentido, coincidimos con lo que propone Zapata-Cardona (2018) y consideramos que el trabajo realizado con los futuros profesores se convirtió en una experiencia real que permitió conectar el saber escolar con algunos contextos ambientales, sociales, políticos y económicos en los que están inmersos los estudiantes, siendo un instrumento que permitió conectar el conocimiento estadístico con el mundo.

En este sentido, los intercambios y la reflexión que se produjeron en los distintos momentos de trabajo, abrieron espacios para nuevos aprendizajes que no referían específicamente a los contenidos estadísticos, pero que es posible que conformen el andamiaje metodológico dentro del que debe vivir el análisis estadístico. En palabras de Behar y Grima (2014), consideramos que este proceso permitió sentar las bases para la generación del pensamiento estadístico a largo plazo y permitió poner en relación distintos significados de las ideas estocásticas fundamentales, logrando poner en práctica algunas de las sugerencias que se realizan en Cabrera et al. (2020).

Entre algunas de las ideas fundamentales mencionadas en el párrafo anterior, podemos mencionar a los datos y sus representaciones, ya que permiten desarrollar distintas habilidades

asociadas con visualización de las características más relevantes de las distribuciones y de los modelos, además de que permiten comunicar el comportamiento de los datos. Todo ello forma parte de distintas dimensiones del pensamiento estadístico, pero particularmente de las dimensiones de la transnumeración, la comunicación y la tecnología, en coincidencia con lo planteado por Ridgway et al. (2011). Una vez más, los análisis que realizaron los estudiantes brindan evidencias prácticas del pensamiento estadístico, aportando información de relevancia que se deberían considerar cuando se realizan propuestas didácticas y evaluativas, de modo de que los marcos referenciales didácticos no queden escindidos de la práctica pedagógica o en otras palabras, que la teoría didáctica no sea solo algo declarativo que se podría alcanzar en situaciones ideales, sino que permita aportar explicaciones a lo que efectivamente ocurre en el aula. En este sentido, coincidimos con evidencias aportadas por Martínez-Castro y Zapata-Cardona (2021), ya que las investigaciones estadísticas en el aula permitieron a los futuros profesores vivir un ciclo de indagación empírica, a partir del cual vincularon conceptos, herramientas, procedimientos, razonamientos, disposiciones y contextos reales, los cuales les permitieron aproximarse a respuestas sobre las preguntas estadísticas planteadas. De esta forma, relacionaron elementos de la alfabetización estadística con las dimensiones del pensamiento estadístico, lo cual les permitió estudiar y comprender las problemáticas seleccionadas.

Entre las limitaciones del estudio, es posible indicar que el estudio ha sido realizado sobre pocos sujetos los cuales son representativos de una población muy limitada que corresponde a aquellos estudiantes de un Profesorado de Matemática de una universidad pública. Para ampliar los alcances del estudio, se podría aplicar este mismo tipo de investigación en profesorado de Matemática de otras universidades o de institutos superiores de formación docente que, en Argentina, nuclean a la mayor cantidad de estudiantes de esta carrera.

## CONCLUSIONES

Este trabajo ha permitido mostrar la potencialidad de una propuesta evaluativa basada en la realización de investigaciones estadísticas. De este modo, aportamos evidencias que apoyan las ideas expresadas por Zapata-Cardona (2018), y mostramos que tales investigaciones propician la conexión de diversos elementos de la alfabetización estadística con dimensiones del pensamiento estadístico, además de propiciar un conocimiento contextual profundo y real, en el que los conceptos estadísticos se derivan del estudio de problemáticas que son de interés para los futuros profesores, permitiéndoles reconocer distintas etapas de un proceso de estudio estadístico y afianzar distintos tipos de aprendizajes y de razonamientos que están implícitos en el desarrollo de este tipo de trabajos.

Consideramos que el análisis de contenido realizado sobre los trabajos de los estudiantes, respalda nuestra postura, en la que argumentamos que, la evaluación no debería escindirse de la propuesta didáctica, sino que debe interactuar con ella, para producir información que permita a los docentes mejorar la enseñanza de la Estadística y a los estudiantes, revisar sus propios aprendizajes.

En ese sentido, el análisis de la producción de los estudiantes puede servir de retroalimentación al aprendizaje individual y colectivo de estudiantes y docentes reunidos en una comunidad de aprendizaje. Mostramos que, aún los futuros profesores sin formación estadística previa y sin experiencias previas relacionadas a las investigaciones estadísticas, logran relacionar elementos de la alfabetización estadística, que enriquecen paulatinamente el pensamiento estadístico, cada vez más necesario para un profesional y ciudadano que desempeñará su labor en la sociedad. Estos resultados nos dan la esperanza de que, si se sigue profundizando en este tipo de experiencias, puedan revertirse los resultados que han sido discutidos en los antecedentes.

La herramienta de análisis basada en las dimensiones del pensamiento estadístico, brinda un aporte invaluable para detectar particularidades y generalidades en las producciones de los estudiantes y, permite analizar el grado de ajuste de los aprendizajes logrados con lo esperado en el diseño de la evaluación.

Consideramos que, brindar oportunidades a nuestros estudiantes para adoptar una perspectiva de ciudadanía crítica podría contribuir a crear un mundo más justo mañana, fomentando la conciencia y valoración de la pluralidad inherente a nuestra sociedad y cuestionando las estructuras en juego que ponen en desventaja a aquellos con diferentes puntos de vista, valores o ideas.

Aunque hemos profundizado en la evaluación de las producciones realizadas por los estudiantes, queda pendiente el análisis de todo el proceso didáctico, a partir del cual esperamos aportar nuevas evidencias que sirvan de referencia en la formación continua de profesores. Asimismo, es deseable poder ampliar el alcance de la investigación, aplicando este tipo de propuesta a estudiantes de profesorado de Matemática de otras instituciones.

### **Agradecimiento.**

Esta investigación se ha realizado en el marco del Proyecto CAI+D: Estudio exploratorio de las relaciones entre Cultura Estadística y Alfabetización Científica y Tecnológica en dispositivos didácticos basados en el enfoque STEAM. 50520190100144LI. UNL.

### **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Anijovich, R. y Cappelletti, G. (2017). La evaluación en el escenario educativo. En R. Anijovich y G. Cappelletti, (Eds.), *La evaluación como oportunidad* (pp. 13-38). Buenos Aires: Paidós.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.

- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.
- Behar, R. (2009). Búsqueda del Conocimiento y Pensamiento Estadístico. [Material de curso] *Segundo Encuentro Iberoamericano de Biometría y V Reunión de la región Centroamericana y del Caribe de la Sociedad Internacional de Biometría*. 27 al 31 de julio de 2009. Veracruz: Universidad Veracruzana.
- Behar, R. y Grima, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior: ¿Estamos Formando Pensamiento Estadístico? *Revista Ingeniería y Competitividad*, 5(2), 84-90. Agosto, 2004, Universidad del Valle. Cali.
- Behar, R. y Grima, P. (2014). Estadística: Aprendizaje a largo plazo. Factores que inciden y estrategias plausibles. En: G. Sanabria Brenes y F. Núñez Vanegas (Eds.), *Actas del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*. Costa Rica.
- Behar, R. (2018). Importancia del contexto en la formación del pensamiento y la cultura estadística. En I. Álvarez (Ed.), *Memorias del III Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 85-110). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.
- Bergmann, J. y Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. USA: International Society for Technology in Education.
- Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht: Springer.
- Cabrera, G. P., Tauber, L. M. y Fernández, E. (2020). Educación Estocástica para pensar estadís-criticamente. *Matemáticas, educación y Sociedad*, 3(2), 89-109.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Escudero, W. (2019). *Big data*. Colección Ciencia que ladra. Segunda edición. Buenos Aires: Siglo XXI editores.
- Gal, I. (2004). Statistical literacy: meanings, components, responsibilities. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47-78). Dordrecht: Springer.
- Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Giroux, H. A. (1989). *Schooling for democracy: Critical pedagogy in the modern age*. London: Routledge.

- Giroux, H. A. (1993). Literacy and the politics of difference. In C. Lankshear & P. McLaren (Eds.), *Critical literacy: Politics, praxis, and the postmodern* (pp. 367–377). Albany, NY: SUNY Press.
- Goetz, S. (2009) Fundamental Ideas and Basic Beliefs in Stochastics: Theoretical Aspects and Empirical Impressions from the Education of Student Teachers. In: M. Kourkoulos & C. Tzanakis (Eds), *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics, Vol. II*, 279-291. Rethymnon: University of Crete.
- Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (2021). *Planeta Dato, V. 1*. Disponible en: [https://www.indec.gov.ar/ftp/documentos/alfabetizacion/planeta\\_dato\\_1.pdf](https://www.indec.gov.ar/ftp/documentos/alfabetizacion/planeta_dato_1.pdf)
- MacGillivray, H., & Pereira–Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading, *Teaching statistics in school mathematics—Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/LASE Study* (pp. 109–120). Springer Science+Business Media. doi: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_14](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_14).
- Martínez–Castro, C. y Zapata–Cardona, L. (2021). El pensamiento estadístico como herramienta para la ciudadanía crítica en la formación inicial de profesores de Estadística. *Yupana*, (13), 8-27. <https://doi.org/10.14409/yu.v0i13.10823>
- Ministerio de Educación de la Nación (2011). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP). Matemática, Ciclo Básico. Educación Secundaria.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-87.
- Moore, D. (1997). New Pedagogy and New Content: El Case of Statistics. *International Statistical Review*, 65, 123-165.
- Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. (17 – 45). Dordrecht: Springer.
- Pfannkuch, M. & Rubick, A. (2002). An exploration of students’ statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, 1 (2), 4-21.
- Pinto, J., Tauber, L., Zapata-Cardona, L., Albert, J., Ruiz, B. y Mafozoki, J. (2017). Alfabetización Estadística en Educación Superior. En: L. A. Serna (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, V. 30, pp. 227-235. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD). (2020). *Informe de desarrollo humano 2020. La próxima frontera: El desarrollo humano y el Antropoceno*. <https://report.hdr.undp.org/es/index.html>
- [Primer Censo argentino] (1872) Descargado el 30 de junio de 2020, de <http://deie.mendoza.gov.ar/#!/censos-nacionales-de-poblacion/1869-primer-censo-de-la-nacion-argentina-17>.

- Ridgway, J., Nicholson, J. & McCusker, S. (2011). Developing Statistical Literacy in Students and Teachers. In C. Batanero, G. Burrill and C. Reading (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series, Vol. 15, 311-322. Dordrecht: Springer.
- Rosling, H. [TED. Ideas worth spreading] (2007, Marzo). Hans Rosling revela nuevas ideas sobre la pobreza. [Video]. YouTube. [https://www.ted.com/talks/hans\\_rosling\\_reveals\\_new\\_insights\\_on\\_poverty?language=es#t-51199](https://www.ted.com/talks/hans_rosling_reveals_new_insights_on_poverty?language=es#t-51199).
- Santellán, S. y Tauber, L. (2016). Conceptos fundamentales de un marco teórico sobre inferencia estadística informal. En Veiga, D. (Ed.), *Acta del XI Congreso Argentino de Educación Matemática*. Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática.
- Snee, R. (1993). What's missing in Statistical education? *The American Statistician*, 47, 149-154.
- Tauber, L. (2017). Alfabetización y cultura estadística de los profesores: ¿un logro o una necesidad? Conferencia presentada en la 3ª Jornada de Educación Estadística «Marta Bilotti». Sociedad Argentina de Estadística (17 de octubre de 2017). Rosario.
- Tauber, L. [Educação Estatística GT12] (2022, Mayo, 26). Logros, necesidades y desafíos de la Educación estadística en Argentina. [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=NDVDIiPELTs>
- Tauber, L., Cravero, M. y Redondo, Y. (2013). Ideas estocásticas fundamentales que ponen en relación los profesores de matemática al analizar la información estadística. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 2063–2072. Montevideo.
- Wallman, K.K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, 88 (421), 1-8.
- Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 33-47.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265. ISI.
- Zapata-Cardona, L. (2018). Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. *Yupana*, (10), 30-41. <https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7695>

## **DIDACTIC AND EVALUATIVE PROPOSAL AIMED AT THE FORMATION OF STATISTICAL THINKING IN FUTURE MATHEMATICS TEACHERS**

### **ABSTRACT**

Within the framework of a design investigation, the implementation of an evaluative proposal focused on the development of statistical investigations has been carried out. This proposal has been designed and applied to students of a Mathematics Faculty who were taking their first and only university course in Statistics. The main results have been obtained from a content analysis of the students' productions, focused on a categorization specifically constructed within the framework of this research. The constructed category system makes it possible to show the relationships between different elements of statistical literacy and the dimensions of statistical thinking. The evidence obtained shows that the students manage to develop statistical investigations that have a great methodological coherence, in which various critical and questioning skills arise on problems of interest chosen by the students. Likewise, they manage to use different technologies and prepare reports and conclusions in which different statistical, methodological and contextual knowledge are integrated.

Keywords: Teacher training, Statistical Literacy, Statistical Thinking, Critical Citizenship, Statistical Research, Didactics of Statistics.

## **PROPOSTA DIDÁTICA E AVALIATIVA VISADA À FORMAÇÃO DO PENSAMENTO ESTATÍSTICO EM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

### **RESUMO**

No âmbito de uma investigação de design, foi realizada a implementação de uma proposta avaliativa focada no desenvolvimento de investigações estatísticas. Esta proposta foi concebida e aplicada a alunos de uma Faculdade de Matemática que estavam a frequentar o seu primeiro e único curso universitário de Estatística. Os principais resultados foram obtidos a partir de uma análise de conteúdo das produções dos alunos, com foco em uma categorização construída especificamente no âmbito desta pesquisa. O sistema de categorias construído permite mostrar as relações entre os diferentes elementos do letramento estatístico e as dimensões do pensamento estatístico. As evidências obtidas mostram que os alunos conseguem desenvolver investigações estatísticas de grande coerência metodológica, nas quais surgem várias habilidades críticas e questionadoras sobre problemas de interesse escolhidos pelos alunos. Da mesma forma, conseguem utilizar diferentes tecnologias e elaborar relatórios e conclusões em que se integram diferentes conhecimentos estatísticos, metodológicos e contextuais.

Palavras-chave: Formação de professores, Alfabetização Estatística, Pensamento Estatístico, Cidadania Crítica, Pesquisa Estatística, Didática da Estatística.

LILLIANA MABEL TAUBER

*Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina*

[estadisticamatematicafhuc@gmail.com](mailto:estadisticamatematicafhuc@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0003-2219-5761>

Profesora en Matemática, Universidad Nacional del Litoral. Doctora en Pedagogía, Universidad de Sevilla. Profesora Titular de Estadística, Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral. Profesora responsable de cursos de posgrado sobre Educación Estadística y Metodología de la Investigación en el marco de la Especialización en Didáctica de la Matemática y de la Maestría en Didácticas Específicas (UNL) y en la Especialización en Enseñanza de la Matemática, Universidad Nacional de Catamarca. Directora del Proyecto de Investigación “Estudio exploratorio de las relaciones entre cultura estadística y alfabetización científica y tecnológica en dispositivos didácticos basados en el enfoque STEAM”, Programa CAI+D, Universidad Nacional del Litoral. Autora y co-autora de artículos y conferencias sobre Educación Estadística. Directora y codirectora de adscriptos en docencia e investigación y de becarios en la Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL. Directora de tesis de posgrado.

SILVANA SANTELLÁN

*Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina*

[silvanamsantellan@gmail.com](mailto:silvanamsantellan@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-7385-5435>

Profesora de Matemática y Magister en Didácticas específicas por la Universidad Nacional del Litoral. Especialista en Educación y TIC por el Instituto Nacional de Formación Docente. Profesora Adjunta de Estadística en la Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL, con funciones en Profesorado de Matemática, Profesorado de Biología, Licenciatura en Biodiversidad y Licenciatura en Sociología. Docente del curso “El problema del Sentido en Probabilidad y Estadística” en la Especialización en Didáctica de la Matemática de la UNL y directora de trabajos integradores finales de dicha Especialización. Co-Directora del Proyecto de Investigación “Estudio exploratorio de las relaciones entre cultura estadística y alfabetización científica y tecnológica en dispositivos didácticos basados en el enfoque STEAM” del programa CAI+D, Universidad Nacional del Litoral. Co-autora de diversos artículos sobre Educación Estadística. Directora y codirectora de adscripciones en docencia e investigación de estudiantes y graduados del Profesorado de Matemática y del Profesorado de Biología de la Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL.



# CONOCIMIENTOS DE PROFESORES DE BACHILLERATO SOBRE UN ACERCAMIENTO INFORMAL A LAS PRUEBAS DE SIGNIFICACIÓN ESTADÍSTICA

FRANCISCO SEPÚLVEDA VEGA  
ERNESTO A. SÁNCHEZ SÁNCHEZ

## RESUMEN

Existe una forma de abordar las pruebas de significación desde un acercamiento informal con ayuda de tecnología; no obstante, poco se sabe acerca del conocimiento de los profesores para llevar esta alternativa a las aulas. Por esto nos preguntamos: ¿Cómo se manifiesta el conocimiento de la materia y de los estudiantes de los profesores de bachillerato en el tema de pruebas de significación estadística desde un acercamiento informal y con ayuda de tecnología digital? Para responder la pregunta llevamos a cabo un curso de actualización en línea con 19 docentes de un bachillerato en México. El curso se planeó como un experimento de diseño en el que los profesores resolvieron en equipo problemas de pruebas de significación utilizando el software Fathom y discutieron respuestas de estudiantes a problemas similares. Al analizar las producciones de los profesores observamos algunas deficiencias en su conocimiento sobre las pruebas de significación y dificultades para adoptar el enfoque con tecnología. Con relación a su conocimiento pedagógico, los profesores no generan modelos de razonamiento que expliquen las respuestas no-normativas de los estudiantes, sino que simplemente señalan los errores y omisiones que estos cometen. Todo lo anterior nos permitió obtener retroalimentación acerca del diseño del curso y hacer algunas recomendaciones para futuros cursos de formación y desarrollo docente.

Palabras clave: Razonamiento inferencial informal, Simulación, Pruebas estadísticas, Conocimiento estadístico para la enseñanza, Experimento de diseño, Desarrollo profesional.

## INTRODUCCIÓN

La reflexión sobre el conocimiento de los profesores ha dado lugar a conceptualizaciones que dan cuenta de su complejidad y diversidad. El modelo clásico de Shulman (1986) sobre el conocimiento de los profesores incluye el conocimiento de contenido, conocimiento pedagógico general y del contenido y conocimiento de los aprendices, entre otros. El modelo de Ball et. al (2008) elabora y amplía las categorías de Shulman. En este modelo el conocimiento de los estudiantes es una parte del conocimiento de contenido pedagógico, y se cree que influye en los planes de enseñanza del profesor. Conviene señalar que este conocimiento no está desligado de las otras categorías de conocimiento del profesor, como el conocimiento del contenido y el de la enseñanza.

Sepúlveda, F. y Sánchez, E. (2022). Conocimientos de profesores de bachillerato sobre un acercamiento informal a las pruebas de significación estadística. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 297-320). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

La categoría *Conocimiento de los estudiantes* se refiere al conocimiento sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes, sus concepciones (favorables y contrarias para su aprendizaje) y las estrategias generales y de contenido específico que frecuentemente utilizan en sus actividades de aprendizaje. Los profesores con experiencia poseen un conocimiento de los estudiantes adquirido en su práctica docente. Por otro lado, los profesores deben estar dispuestos a innovar la manera en que enseñan la materia, en particular, se espera de ellos que participen en, y hagan suyas, las propuestas de llevar a cabo las innovaciones que implica la incorporación de la tecnología en sus clases. ¿Cómo se manifiesta el conocimiento de los profesores acerca de los estudiantes en actividades innovadoras? En el presente trabajo se propone a un grupo de profesores en ejercicio de un bachillerato público en México una forma alternativa de abordar el tema de pruebas de significación desde un acercamiento informal con ayuda de la tecnología y se explora cómo se manifiesta en este contexto su conocimiento de la materia y de los estudiantes. Así, formulamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cómo se manifiesta el conocimiento de la materia y de los estudiantes de los profesores de bachillerato en el tema de pruebas de significación estadística desde un acercamiento informal y con ayuda de tecnología digital?

## ANTECEDENTES

En las dos últimas décadas se ha desarrollado la idea de buscar acercamientos en la enseñanza que “expongan a los estudiantes a situaciones que les permitan utilizar métodos informales para hacer inferencias” (Zieffler, et al. 2008) los cuales podrían ser relevantes para los estudiantes de niveles intermedios preparándolos para sus futuros cursos universitarios sobre el tema (Pratt, y Ainley, 2008). Los recursos que proporcionan los softwares educativos dinámicos de estadística (v. gr. TinkerPlots, Fathom, CODAP) amplían las posibilidades de desarrollar acercamientos informales para la enseñanza de conceptos abstractos de inferencia estadística accesibles en el pasado sólo para estudiantes de nivel universitario. En particular, pensamos en los conceptos de distribución muestral,  $p$ -valor y pruebas estadísticas. La tecnología brinda la oportunidad de simular de manera automática muestreos repetidos donde el usuario puede modificar el tamaño de muestra y la proporción de la población, así como observar y sombrear el  $p$ -valor en las colas de las distribuciones muestrales para aproximarlos (Case y Jacobbe, 2018; Chance y Rossman, 2006). En este contexto, Batanero y Díaz (2015) sugieren que, en vez del cálculo formal, la simulación puede utilizarse para propiciar que los alumnos se enfoquen en la lógica del proceso y en los conceptos del contraste de hipótesis. Esto sería posible siempre y cuando se combinen armónicamente los aspectos conceptuales y procedimentales.

Con este preámbulo, García-Ríos (2017) caracterizó las intuiciones y los razonamientos de estudiantes de bachillerato al resolver problemas de pruebas de significación utilizando simulación observando que, a pesar de que los estudiantes pueden tener concepciones ingenuas al comenzar a utilizar distribuciones simuladas para hacer inferencias, éstos son capaces de lograr avances significativos en la comprensión de la lógica de las pruebas estadística a partir de la correcta retroalimentación del profesor.

Bajo este mismo paradigma Matuszewski (2018) capacitó y entrevistó a tres profesores en servicio de bachillerato que adaptaron su conocimiento estadístico al enfoque con simulación. Los profesores expresaron que consideran este enfoque más claro y directo, e incluso indican que les permitió comprender mejor la lógica subyacente en las pruebas de hipótesis.

No obstante, la formación general de los profesores de nivel bachillerato sobre inferencia estadística suele presentar un acercamiento tradicional a las pruebas de hipótesis, por lo que han desarrollado formas de enseñanza congruentes con dicho enfoque. Esta formación no incluye el desarrollo del uso de la simulación para resolver problemas. En consecuencia, los profesores deben conocer y familiarizarse con el contenido estadístico y pedagógico relacionado a los acercamientos informales basados en la simulación antes de utilizarlos en la enseñanza.

Por otro lado, Da Ponte y Noll (2018) señalan la escasez de investigaciones con profesores en servicio. Los mismos autores indican que los cursos de desarrollo profesional son más efectivos cuando se enfocan en crear el tipo de entorno de aprendizaje que a los profesores de estadística les gustaría desarrollar en sus aulas. Además, enumeran las siguientes cuatro sugerencias para el diseño de los cursos para profesores:

1. Aprovechar las experiencias y conocimientos previos de los docentes.
2. Que los profesores creen planes de lecciones y preguntas para los estudiantes.
3. Que los profesores examinen y respondan al trabajo de los estudiantes.
4. Incorporar las grandes ideas de la estadística en el trabajo del curso.

Con estos antecedentes diseñamos un curso de actualización para profesores en servicio en el que reflexionamos junto con ellos acerca de utilizar simulación para introducir las pruebas estadísticas en bachillerato.

## **MARCO CONCEPTUAL**

### **Pruebas de significación estadística**

Las pruebas de significación tienen el propósito de desacreditar una hipótesis conservadora o de no cambio (hipótesis nula). Se basa en un argumento que expresamos de manera informal así: *Se*

Conocimientos de profesores de bachillerato sobre un acercamiento informal a las pruebas de significación estadística

*rechaza la hipótesis nula cuando una muestra aleatoria de la población resulta inusual bajo el supuesto de que la hipótesis nula es verdadera.* La operativización de este argumento implica tener una manera de medir cuándo una muestra es inusual bajo la hipótesis dada. La *distribución muestral de las proporciones*, es decir, la distribución de las proporciones de todas las muestras obtenidas de una población con una proporción dada (parámetro), es un instrumento para calcular la probabilidad de obtener una muestra con una proporción en un intervalo dado. Con respecto a una distribución muestral se considera que una muestra es inusual si la probabilidad de que ocurra una proporción igual a la proporción de dicha muestra u otra más extrema (p-valor) es menor o igual al 0.05. El valor 0.05 se llama *nivel de significación* y es convencional; podría ser sustituido por otros valores, no obstante, adoptar el nivel de significación de 0.05 es la convención más generalizada.

### **Razonamiento inferencial informal (RII)**

Una tendencia actual en la enseñanza es buscar acercamientos informales que prefiguren las ideas y procedimientos tradicionales y más formales de la inferencia estadística. Esto como antecedente para preparar a los estudiantes para sus cursos tradicionales posteriores. Se han utilizado los términos Razonamiento Inferencial Informal (RII) (Pratt y Ainley, 2008) e Inferencia Estadística Informal (IEI) (Makar y Rubin, 2009) para referirse a los enfoques informales a la inferencia. Pratt y Ainley (2008) advierten acerca del carácter relativo de estos acercamientos:

Reconocemos desde el principio que la definición de lo que cuenta como "inferencia informal" es resbaladiza: lo que es informal podría depender de la naturaleza de las tareas inferenciales que se estudian, de la complejidad de los conceptos estadísticos o probabilísticos involucrados, del nivel educativo, y de otros factores (p. 3).

En este trabajo combinamos la caracterización de Zieffler et al. (2008) sobre el Razonamiento Inferencial Informal (RII) y el marco de Makar y Rubin (2009) sobre la Inferencia Estadística Informal (IEI) para elaborar la siguiente definición de inferencia informal (RII o IEI): *La manera en que los estudiantes utilizan sus intuiciones y conocimientos previos para formular y argumentar generalizaciones que prefiguren las que se obtendrían del razonamiento formal, basadas en los datos como evidencia y que expresen el reconocimiento de la incertidumbre intrínseca en la generalización.* Un aspecto fundamental de la inferencia informal es que sea una antesala para la inferencia con mayores niveles de formalidad; por esta razón debe concebirse como una etapa transitoria.

## Conocimiento de la materia y del estudiante

Se analizan dos tipos distintos de conocimiento de los profesores conforme al marco de Groth (2013)<sup>1</sup>: el conocimiento de la materia y el conocimiento de los estudiantes. El conocimiento de la materia se conforma, entre otros, por el conocimiento común y el especializado. El conocimiento común es el que los profesores son responsables de enseñar a sus alumnos. En nuestro trabajo este conocimiento abarca el procedimiento tradicional para realizar pruebas de significación, e implica conocer los conceptos de población, muestra (aleatoria), distribución muestral (principalmente la distribución normal),  $p$ -valor y nivel de significación. El conocimiento especializado es un conocimiento único de los profesores, y abarca distintas representaciones de los conceptos de muestra, muestreo,  $p$ -valor y las distribuciones muestrales, particularmente aquellas representaciones que se obtienen mediante simulación, así como estar familiarizados con las distintas maneras de solucionar un problema de pruebas de significación, en específico para nuestro trabajo, mediante el uso del software Fathom. Finalmente, el conocimiento de los estudiantes que forma parte del conocimiento del contenido pedagógico y contempla que los profesores conozcan las dificultades y concepciones comunes de los estudiantes con el contenido, y sus patrones de razonamiento. Si bien el curso se diseñó para que cada actividad pusiera énfasis en cada uno de estos conocimientos, en la práctica aparecen entrelazados, particularmente en la Actividad 2 presentada en este capítulo.

## Simulación por computadora en Fathom

Entendemos por distribución muestral simulada (DMS) una distribución de muestras aleatorias de un mismo tamaño obtenidas a partir de una población simulada por computadora con una proporción determinada. En nuestro trabajo simulamos las distribuciones en Fathom (Finzer, 2014), bajo el supuesto de que patrones similares de razonamiento pueden presentarse al utilizar otros softwares como CODAP o TinkerPlots.

La simulación por computadora modifica la manera de hacer una inferencia estadística y no es una réplica o extensión de lo que se hace en el enfoque tradicional. Mientras que en el enfoque tradicional se utilizan cálculos, fórmulas y tablas (de oscura procedencia para la mayoría de los usuarios), en el enfoque con simulación, la validez de la inferencia depende de que la simulación del muestreo repetido sea para un gran número de muestras, de modo que se aproxime el límite matemático de la distribución. Lo que une a ambas perspectivas, además de los parámetros de cada

---

<sup>1</sup> Groth (2013) utiliza los términos conocimiento de la materia, conocimiento del contenido común, conocimiento del contenido especializado y conocimiento del contenido y de los estudiantes (SMK, CCK, SCK y KCS por sus siglas en inglés respectivamente). Simplificamos estos términos para hacer más amena la lectura.

una de las variables utilizadas, es el teorema del límite central. Por lo tanto, el éxito de este enfoque depende de los conocimientos, aunque sean informales, que se tengan de este teorema.

En otras palabras, que tanto estudiantes y profesores comprendan que la computadora puede ayudarnos a hacer una inferencia válida acerca de la realidad puede resultar contraintuitivo si no se tiene cierto dominio de este teorema. La idea de que la computadora está ‘programada’ para producir resultados determinados ante ciertos comandos choca con la idea de utilizar un conjunto de comandos ordenados para hacer una inferencia con validez más allá del entorno de la computadora (Zimmermann y Jones, 2002).

Los estudiantes solucionan este choque explicando la DMS como un simulacro, es decir, ven lo hecho en la computadora como un experimento que no genera validez científica y lo entienden como una serie de pasos a repetir en la realidad para hacer una inferencia. Cómo resuelven este conflicto los profesores es parte del objeto de estudio de nuestra investigación.

En particular, para generar las DMS utilizamos Fathom porque es una herramienta de software educativa dinámica que permite usar, modificar y desarrollar micromundos integrados. En tales micromundos, el alumno tiene acceso a representaciones múltiples y vinculadas, así como a la posibilidad de modelar y ejecutar simulaciones, y a utilizar funciones exploratorias interactivas como los deslizadores (Hofmann et al., 2014).

## MÉTODO

### Metodología

La investigación se enmarca en un experimento de diseño (Bakker, 2018) los cuales son descritos como ampliamente intervencionistas, pero, por lo mismo, útiles para proponer secuencias didácticas originales que contemplen el uso de recursos tecnológicos desconocidos para los participantes. Estos experimentos tienen propósitos tanto pragmáticos como teóricos, con tareas diseñadas con base en la discusión y la literatura existente, y con datos producidos que podrían analizarse en varios niveles dentro de una ecología de aprendizaje que incluye los problemas que los profesores deben resolver, “los tipos de discurso [...], las normas de participación [...], las herramientas y los medios materiales relacionados proporcionados, y los medios prácticos por los cuales los [instructores] del aula pueden orquestar las relaciones entre estos elementos” (Cobb et al., 2003, p. 9). Conviene hacer explícito que las producciones analizadas en el capítulo fueron propuestas por equipos de profesores, por lo que no se caracteriza un razonamiento individual, sino el tipo de producciones que podrían suscitarse en un entorno bajo las mismas condiciones (trabajo en equipo,

enfoque de resolución de problemas, uso de tecnología, y modalidad virtual sincrónica) conforme el marco de los experimentos de diseño.

### Participantes

Se trabajó con un grupo de 19 profesores en servicio de distintos planteles de un bachillerato público en la ciudad de México. La Tabla 1 indica siete variables y sus frecuencias que reflejan la orientación y experiencia de los profesores. Se observa que los profesores en general cuentan con muchos años en servicio; se observa también bastante presencia de ingenieros (13); además, la gran mayoría cuenta con estudios de posgrado (16), lo que en conjunto permite calificar a los profesores como profesionales con amplia experiencia y especialización. No obstante, para ellos no es común enseñar el tema de las pruebas de hipótesis y utilizan escasamente Fathom en sus clases.

**Tabla 1.** *Características de los participantes*

Antigüedad	Menos de 5 años: 1	Entre 5 y 10 años: 5	Más de 10: 13
Experiencia enseñando estadística	Nunca: 6	Menos de 10 años: 5	Más de 10 años: 8
Profesión	Actuarios: 1	Físico/Matemáticos: 5	Ingenieros: 13
Estudios superiores	Doctorado: 1	Maestría: 15	Licenciatura: 3
Experiencia enseñando prueba de hipótesis	Sí: 11	No: 8	
Experiencia enseñando con Fathom	Sí: 6	No: 13	

**Fuente:** Elaboración propia

### Instrumento

Se diseñaron dos actividades, una para explorar el conocimiento de la materia de los profesores sobre los conceptos y la lógica alrededor de las pruebas de significación. La otra para explorar su conocimiento sobre los estudiantes. La primera actividad se basó en dos problemas de pruebas de proporciones los cuales se escogieron por su relativa sencillez con respecto a los de medias u otros estadísticos como desviaciones estándar, lo que también permite simularlos con mayor facilidad. El problema 1 trató de ver si la muestra es suficiente para rechazar la hipótesis nula, mientras que el problema 2 implicó además una toma de decisión. En este capítulo se muestra el análisis realizado de algunas respuestas al Problema 1 que se muestra en la Figura 1. No obstante se contemplaron también las respuestas al Problema 2 para cuantificar y describir el progreso de los profesores en el curso.

Para la segunda actividad se presentaron a los profesores respuestas seleccionadas de los estudiantes. En el primer caso, se eligió una respuesta en donde se observa que los estudiantes

generaron un argumento genuino a partir de la DMS sin tomar en cuenta la muestra-dato. En el segundo caso, se seleccionó una respuesta en la que los estudiantes generan un argumento determinista. A partir del análisis de estas respuestas, se solicitó a los profesores hacer una tabla en donde identificaran los problemas que detectaron, que explicaran por qué creían que los estudiantes procedieron de esa manera y enunciaran cuáles y cómo serían las correcciones que harían a las respuestas. En este trabajo no se estudian las correcciones propuestas por los profesores, sino solamente sus análisis de los razonamientos de los estudiantes (conocimiento de los estudiantes). Esta actividad se detalla en los resultados.

**Figura 1.** *Problema 1*

Problema 1. Tradicionalmente se cree que la mitad de la población que toma refresco de cola prefiere Pepsi y la otra mitad prefiere Coca. Sin embargo, con fines publicitarios, la propaganda de Coca Cola presume que la mayoría (más del 50%) de la población que consume refresco de cola prefiere Coca en lugar de Pepsi. Para apoyar esta afirmación se hizo una encuesta a 180 personas escogidas al azar que consumen refresco regularmente. De los 180 participantes 104 personas prefirieron Coca Cola. ¿La información de la muestra obtenida es suficiente para rechazar la hipótesis de que la población está dividida a la mitad con un 5% de nivel de significación? Respuesta correcta: Hipótesis nula ( $H_0$ ):  $p=0.50$ ,  $n=180$ ,  $p\text{-valor}=0.022$ , se rechaza  $H_0$ .

### **Procedimiento de aplicación**

Se llevó a cabo un curso en línea sincrónico de veinte horas bajo un esquema de actualización intersemestral. El propósito del curso fue mostrar a los profesores el enfoque con simulación a las pruebas de significación.

El curso se impartió a través de la plataforma Zoom. Durante una semana se tuvieron cinco sesiones de cuatro horas cada una. Las sesiones se dividieron en dos tipos, sesiones plenarias y sesiones de trabajo en equipo. Las sesiones plenarias fueron útiles para exponer a los profesores los temas e instrucciones y hacer las discusiones grupales. El curso comenzó con una discusión acerca de las dificultades características de la enseñanza de las pruebas de hipótesis. A continuación, introdujimos la resolución de problemas de pruebas de significación con simulación. En seguida, utilizamos algunas de las producciones de los estudiantes que identificó García-Ríos (2017) para que los profesores examinaran y discutieran sus razonamientos. Finalmente, invitamos a los profesores a crear trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) con el fin de llevar este enfoque al aula. Se tuvo una

sesión plenaria en la que se introdujo a los profesores a Fathom y éstos además contaron con un manual que detallaba paso a paso cómo generar una DMS.

En la Tabla 2 se presenta un esquema general del curso. En la primera y la última sesión los profesores respondieron un cuestionario general acerca del contenido del curso. En la Actividad 1 Problema 1 participaron 16 profesores (4 equipos de 3 y 2 de 2) y en la Actividad 1 Problema 2 participaron 15 profesores (3 equipos de 3 y 3 de 2). En la Actividad 2 Situación 1 participaron 16 profesores divididos en cinco equipos (4 equipos de 3 y 1 de 4) y en la Actividad 2 Situación 2 participaron 12 profesores (4 equipos de 3).

**Tabla 2.** *Organización del curso*

Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5
Cuestionario general	Actividad 1 Problema 1	Discusión plenaria	Discusión plenaria	Presentación de THAs
Cuestionario diagnóstico	Discusión plenaria	Actividad 2 Situación 1	Actividad 2 Situación 2	Cuestionario de cierre
Introducción a Fathom	Actividad 1 Problema 2		Discusión plenaria	Discusión plenaria

**Fuente:** Elaboración propia

Para resolver cada actividad los equipos dispusieron de dos horas. Ni los cuestionarios, ni las THAs son objeto de estudio del presente capítulo. Entre cada actividad hubo una discusión plenaria en la que dos equipos de docentes expusieron sus respuestas y recibieron retroalimentación por parte de sus colegas y los investigadores. Sólo se videograbaron las sesiones plenarias y se recibió una sola respuesta por cada equipo. Los equipos se crearon tratando de equilibrar la experiencia de los profesores, de modo que cada equipo tuviera al menos un profesor con diez o más años de experiencia enseñando estadística; no obstante, algunos profesores se ausentaron en las sesiones. Finalmente, el enfoque que adoptamos en nuestro programa de investigación es de resolución de problemas y promueve la exploración tanto del software como de los datos y las variables del problema. Es por esto por lo que, al menos en un principio, ni los estudiantes ni los profesores recibieron una explicación explícita del tema de las pruebas estadísticas o instrucciones paso a paso para realizar una inferencia.

### **Procedimiento de análisis**

El análisis que se realizó de las producciones de los profesores es de tipo cualitativo descriptivo. Para el análisis de la Actividad 1, las respuestas de los profesores se codificaron y

clasificaron con respecto a sus razonamientos. Una de nuestras hipótesis al diseñar las actividades del curso era que los profesores recurrirían a los cálculos tradicionales de las pruebas de hipótesis (Matuszewski, 2018) lo cual efectivamente sucedió en algunos equipos. Buscando este tipo de patrones e intentando describir y comprender cómo es que los profesores utilizaron la tecnología para responder los problemas pudimos observar tres tipos distintos de inferencias que se describen en los resultados. En lo que respecta a la Actividad 2 se presentan las respuestas de los profesores con una interpretación de su razonamiento articulada con los elementos del marco conceptual postulado lo cual nos permitió observar cómo utilizan su conocimiento para evaluar las respuestas de estudiantes.

## RESULTADOS

### Actividad 1

Esta actividad consistió en dos problemas, no obstante, se muestran solo respuestas al primer problema (ver Figura 1). Ambos problemas se acompañaron de las siguientes instrucciones:

Generar una distribución muestral simulada (DMS) en Fathom que resulte útil para resolver este problema. 1. Respondan el problema. 2. Expliquen su conclusión. 3. Detallen paso a paso cómo llegaron a su respuesta. Pueden usar imágenes del programa (imprimir pantalla) para tener un informe completo.

A continuación, se describen los tres tipos de inferencias observados entre las respuestas acompañados de un ejemplo.

#### *Inferencia ingenua*

Se caracteriza porque no se observan en la respuesta elementos pertinentes al procedimiento de la prueba de significación ya sea informal o formal. La respuesta se basa en creencias de los profesores acerca de la relación entre la muestra y la población; por ejemplo, la respuesta que se reproduce abajo es de un equipo que basa su respuesta simplemente en que la proporción en la muestra favorece a la Coca:

La información obtenida nos da a entender que la hipótesis es aceptada porque la población no está dividida a la mitad del nivel de significación, porque de acuerdo con los datos obtenidos representa el 60% (Coca cola 57.77%) contra el 40% (Pepsi 42.22%) entre los dos refrescos, aproximadamente.

Conviene notar que este equipo utiliza la palabra “población” para referirse a la muestra y también hacen un uso idiosincrático de la expresión “nivel de significación”. Una interpretación de dicha respuesta, al margen del mal uso de los términos, es que creen que cuando la muestra pertenece a la población, la proporción de la muestra es igual o muy cercana a la proporción de la población. Esta es una manifestación del sesgo conocido como “Ley de los pequeños números” (Tversky &

Kahneman, 1971). Los profesores que responden de esta manera no consideran o subestiman la variabilidad muestral. Además, aplican un razonamiento directo: si la proporción de la muestra es cercana a la hipótesis nula, ésta se confirma y no se rechaza, si está alejada se invalida y se rechaza. Está ausente el razonamiento hipotético deductivo subyacente en la prueba, es decir, si fuera verdad la hipótesis nula, ¿la muestra a la mano sería inusual, o no? Al confiar en dicho criterio, los profesores no ven razones para utilizar el recurso tecnológico, así en las dos respuestas clasificadas como ingenuas los equipos no utilizaron el software ni la DMS.

### ***Inferencia tradicional***

Se caracteriza porque se basa en el procedimiento tradicional, aunque utiliza el software para hacer cálculos. Por ejemplo, al resolver el primer problema en la respuesta que se muestra abajo un equipo de profesores simula correctamente el muestreo repetido y obtienen la distribución adecuada (1000 muestras  $n=180$ ). Sin embargo, utilizan comandos del programa para calcular la media y la desviación estándar de la DMS. Entonces recurren al procedimiento tradicional para determinar la zona de rechazo. Además, utilizan un cálculo correspondiente a un problema de dos colas.

De acuerdo con la distribución experimental (1000 muestras de tamaño 180), se obtuvo una media de 90, con una desviación estándar de 6.76, de acuerdo con esto y tomando en cuenta un nivel de significación de 5%, sería 1.96 desviaciones estándar el valor que nos permitiría aceptar o rechazar el tamaño de muestra. Para esto el número mínimo de personas que debiera contestar que le agrada más la Coca Cola (valor crítico), para ese tamaño de muestra, tendría que ser de 103.25 personas, por lo que al contestar 104 personas podemos concluir que sí se puede rechazar la hipótesis de que la mitad prefiere Pepsi y Coca Cola.

Este equipo entiende que la hipótesis nula es equivalente a que la mitad prefiere Coca Cola y el complemento Pepsi y, también, de que la prueba se trata de ver si la evidencia permite rechazar o no la hipótesis nula. No obstante, también hace un uso inadecuado del lenguaje de las pruebas de significación; dice por ejemplo “aceptar o rechazar el tamaño de muestra”. Pero su manera de establecer la región de rechazo es utilizando el valor estandarizado de 1.96; este valor proviene de considerar la distribución normal, el nivel de significación del 5% y una prueba de dos colas, es decir, es la solución para  $x$  de la ecuación  $P(X \leq x) = 0.975$ .

### ***Inferencia informal***

Es aquella en la que se sigue el proceso de hacer una simulación y calcular a partir de la DMS el  $p$ -valor y la zona de rechazo. En las respuestas de los profesores, éstos utilizaron la DMS para

obtener las conclusiones y en ningún momento recurrieron al enfoque formal (no utilizaron una distribución teórica ni la desviación estándar).

Se observó que de las 500 muestras de tamaño 180 solo en 10 de ellas la cantidad de personas que prefirieron Coca-Cola fue de 104 o más, lo que equivale al 2% del total de muestras. Considerando un nivel de significación del 5% el valor obtenido de 2% sugiere que en realidad la proporción de preferencia de Coca-Cola es mayor a la mitad.

El procedimiento de este equipo es razonable, pues la proporción de valores ‘104 o más’ es una estimación del  $p$ -valor. Con base en que éste es 2%, menor al 5% el equipo concluye que la preferencia por Coca-Cola “es mayor a la mitad”. Esta expresión refleja que el equipo concibe (incorrectamente) que el procedimiento de la prueba sirve para determinar si la hipótesis es verdadera o no.

**Tabla 3.** *Relación de inferencias por equipo en Actividad 1*

Equipo	Inferencia problema 1	Inferencia problema 2
1	Tradicional	Informal
2	Ingenua	Tradicional
3	Informal	Informal
4	Informal	Informal
5	Ingenua	Ingenua
6	Informal	Ingenua

**Fuente:** Elaboración propia

La Tabla 3 resume los tipos de inferencias que cada equipo hizo en los problemas. Es de destacar que se presentan cuatro respuestas ingenuas. En dos ocasiones los equipos no sustituyeron el método tradicional que ya conocían por el método informal. Conviene observar que sólo tres equipos lograron al menos en una ocasión adoptar el enfoque informal. Al parecer, el enfoque con simulación no es del todo aceptado por los profesores, posiblemente porque requieren más tiempo para asimilarlo o porque no se convencen de sus bondades. Algunos equipos, aunque hicieron inferencias informales, agregaron a sus respuestas el cálculo tradicional. Quizás buscan la certeza en los cálculos y procedimientos que ya conocen.

## **Actividad 2**

La actividad 2 consistió en plantear a los profesores dos situaciones. En ambas situaciones se presentaron a profesores respuestas de estudiantes a un mismo problema. Estas respuestas fueron obtenidas por García-Ríos (2017) años antes en un curso impartido por él mismo y fueron el objeto

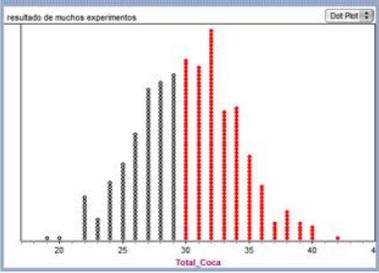
de estudio de su investigación doctoral. Junto con las situaciones se solicitó a los profesores crear una tabla con sus observaciones, y contestar preguntas precisas acerca de las producciones de los estudiantes. Las situaciones se presentan en las Figuras 2 y 3 de manera simplificada. Se observan en letra cursiva las respuestas de los estudiantes. La respuesta de los estudiantes elegida en esta situación a) muestra un razonamiento ingenuo y b) aparentemente se interpreta la DMS como si fuera la población. Se observa que los estudiantes de bachillerato argumentan que más del 50% de la población prefiere Coca-Cola. Destaca en su redacción que los estudiantes no utilizan la proporción de la muestra para hacer la inferencia, sino que se refieren a la DMS como un conjunto de encuestas, y, de hecho, utilizan la proporción de muestras de dicha distribución cuyo parámetro es mayor que 30 para justificar que más del 50% de la población prefiere Coca-Cola, por lo que clasificamos su inferencia como ingenua.

**Figura 2.** *Actividad 2. Situación 1*

**Problema 1.** Tradicionalmente se cree que la mitad de la población que toma refresco de cola prefiere Pepsi y la otra mitad prefiere Coca. Sin embargo, con fines publicitarios, la propaganda de Coca Cola presume que la mayoría (más del 50%) de la población que consume refresco de cola prefiere Coca en lugar de Pepsi. Para apoyar esta afirmación hizo una encuesta a 60 personas escogidas al azar que consumen refresco regularmente. De los 60 participantes 35 personas prefirieron Coca Cola. ¿La información de la muestra obtenida es suficiente para rechazar la hipótesis de que la población está dividida a la mitad? Explica cuál es tu conclusión.

*En la simulación se muestra que en 285 encuestas de 500 se mostró un gusto por Coca Cola en más de 50% de 60 personas entrevistadas en cada una de las encuestas. En cambio, en 215 encuestas realizadas se mostró un gusto en menos del 50% de 60 personas.*

resultado de muchos experimentos	
	Total_Coca
1	29
2	34
3	31
4	33
5	29
6	30
7	24
8	34
9	24



Resultados de encuestas con resultados satisfactorios para Coca Cola

¿Qué tan seguro estás de tu conclusión?

*Estamos seguros debido a las encuestas realizadas en las que se obtuvo un resultado favorable para Coca Cola en las cuales más del 50% de la población prefiere su refresco. [Sin embargo] este informe contiene algunas restricciones, una de ellas es que nos basamos en simulaciones de encuestas, esto, porque si realizáramos las encuestas costaría un alto capital para contratar personal para llevar a cabo el Estudio.*

Se exponen a continuación cuatro fragmentos de explicaciones de equipos de profesores a lo observado en estas respuestas de los estudiantes.

R1: Pareciera que no encuentran diferencia entre población y muestra.

R2: No utilizan la muestra [...]No están logrando ver para qué sirve una muestra, están totalizando todas las muestras (en la distribución muestral).

R3: Los alumnos solo están describiendo lo que observan en las gráficas. No realizan una inferencia explícita, aunque puede observarse que al tomar una postura sobre que más de la mitad prefieren Coca-Cola, lo están haciendo de manera implícita.

R4: Usan la palabra encuesta, en lugar de muestra. No han comprendido que, con la muestra, pueden obtener información sobre la población. Confunden una muestra, con la población.

Los comentarios de los profesores destacan varios aspectos pertinentes de la respuesta que se les muestra, no obstante, ninguno ofrece una interpretación satisfactoria. La observación de R2 menciona dos conceptos cruciales: la muestra-dato y la distribución muestral. Es claro que la omisión de la muestra-dato impide hacer la inferencia, pero no se entiende la interpretación de que los estudiantes “están totalizando todas las muestras (en la distribución muestral).” Los equipos R1 y R4 interpretan que los estudiantes confunden muestra con población. Muy probablemente sus concepciones de muestra y población influyen en la respuesta, pero no explican cómo las confunden para dar lugar a la respuesta que se analiza. Por otro lado, la mención de R4 sobre el uso de “encuesta” en lugar de “muestra” revela que el profesor considera importante el lenguaje que utilizan los estudiantes, sin embargo, sólo señala el hecho sin interpretarlo. El equipo R3 menciona que los estudiantes sólo describen la gráfica y que no hacen una inferencia explícita; esto es correcto, pero no buscan las razones de tales acciones de los estudiantes. Consideran que el equipo hace una inferencia implícita simplemente porque concluyen que hay preferencia por la Coca-Cola.

La respuesta de la Situación 2 presentada en la Figura 3 se eligió porque se basa en un argumento determinístico: 1) De una población con una proporción del atributo del 50% se sacan 500 muestras de tamaño 60. 2) Dentro de estas 500 muestras se obtienen muestras con un número de éxitos que van desde 19 hasta 41, entre ellas se obtienen muestras que tienen 35 éxitos. 3) Por lo tanto, del hecho de que una muestra de una población tenga 35 éxitos de 60 no es posible rechazar la hipótesis de que la población tiene una proporción del atributo del 50%. Para fortalecer el anterior argumento, los estudiantes ensayan con una proporción del atributo del 44%, y muestran que también en este caso se puede obtener una muestra de 35 favorables, lo cual reafirma su conclusión. El problema de este argumento es que no incluye un razonamiento probabilístico, es decir, no ve a la DMS como un instrumento para medir, en términos de probabilidad, si la muestra-dato es usual o

inusual. Los estudiantes utilizan la DMS sólo para saber si la muestra-dato es posible o imposible suponiendo verdadera la hipótesis nula. En efecto, definen un intervalo que abarca la totalidad del rango de la DMS. Cabe destacar que el argumento pone en juego un razonamiento hipotético-deductivo, pues suponen que la hipótesis es verdadera y obtienen sus consecuencias (que una muestra con 35 casos favorables es posible); también conviene señalar que el procedimiento que describen toma en cuenta la muestra-dato. Finalmente, y de manera positiva, se observa un uso del software como medio para experimentar con distintas proporciones de la DMS.

**Figura 3.** *Actividad 2. Situación 2*

**Mismo problema que Figura 2.** Explicas cuál es tu conclusión

*En el programa probamos con varios resultados, con diferentes porcentajes a los que les gusta la Cola-Cola de la población total*

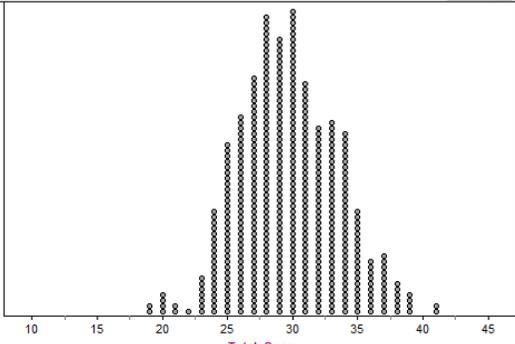
---

 **p = 0.50**

1.0 0.2 0.4 0.6 0.8

p es la proporción de la población de personas que prefieren Coca cola

resultado de muchos experimentos Dot Plot



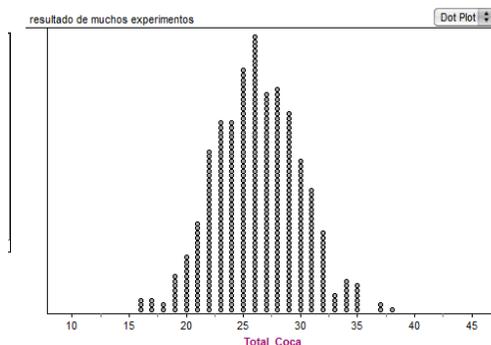
Total\_Coca

*Por ejemplo, en la encuesta anterior, se estableció un porcentaje del 50% (que les gusta la Coca-Cola) de esto se esperaría que dieran resultados de que a 30 les gusta la Coca-Cola, sin embargo, los valores llegan hasta el 19 siendo el más bajo y 41 el más alto, de ahí vemos un rango de 10 valores aproximadamente.*

 **p = 0.44**

1.0 0.2 0.4 0.6 0.8

p es la proporción de la población de personas que prefieren Coca cola



*De igual manera en la encuesta anterior a pesar de que el porcentaje es menor al 50% [ $p=0.44$ ] y se espera un valor de 26, nos salen resultados de hasta 16 (siendo el más bajo) y 38 (siendo el más alto) de aquí podemos observar un valor mayor al que nos presenta en el problema, donde la mayoría de la población no prefiere la coca-cola, por eso es que **el 35 no asegura que a la mayoría de la población les guste más la coca-cola.***

*Nuestra conclusión es que debemos tomar un mayor porcentaje de la población en general a encuestar para que nosotros podamos concluir que efectivamente a más del 50% de la población le gusta o prefiere Coca-Cola ya que dentro de las encuestas se debe establecer un rango de alrededor de 10 valores más y 10 valores menos al valor esperado.*

En las respuestas de los profesores no se percibe que hayan captado el argumento expuesto. A continuación, se muestran los análisis que los equipos de profesores escribieron sobre esta situación.

R1: Los estudiantes tratan de ajustar la información del deslizador para ajustar la información de la población con la información de la muestra. No comprendieron la diferencia entre parámetro y estadístico ni la función de la prueba de hipótesis.

R2: Los estudiantes no tienen claro algunos conceptos. Plantearon empíricamente un valor crítico para decidir si aceptan o no la hipótesis a partir de la muestra.

R3: El problema es la parte conceptual del Teorema del Limite Central. Los estudiantes no perciben la necesidad de repetir el experimento para aproximar la predicción al verdadero valor del parámetro. Consideran que al simular una sola vez se debería tener exactamente el valor esperado, lo cual es falso como lo afirma el TLC. Por ejemplo, al considerar una proporción en la población del 50%, esperan que exactamente 30 de 60 personas prefieran Coca-Cola. Cuando cambian la proporción al 44% esperan que sean alrededor de 26 de 60. No es claro por qué consideran arbitrariamente  $\pm 10$ . Es de esperar que piensen de esta manera. La experiencia docente nos muestra que la mayoría de los alumnos piensa así, si la proporción de la población es “p”, ellos esperan que al tomar una muestra de elementos de la población se mantenga la misma proporción de la población sin considerar que estamos ante un fenómeno aleatorio.

R4: Los estudiantes tomaron intuitivamente un valor crítico a partir de la muestra para decidir si aceptan o no la hipótesis porque interpretaron que el 50% prefieren la Coca.

En estos comentarios de los profesores se refleja, a diferencia de sus comentarios a la tarea previa, la ausencia de los aspectos centrales del argumento que propusieron los estudiantes. El equipo R1 menciona que éstos no ven la diferencia entre parámetro y estadístico y mencionan tres tipos de información: del deslizador, de la población y de la muestra y al respecto, de manera general, dicen que los estudiantes tratan de ajustar dicha información. Por su parte, los equipos R4 y R2 señalan que los estudiantes definen intuitivamente un valor crítico para tomar la decisión, pero no es realmente un valor crítico, sino que determinan el rango de lo posible. El equipo R3 expresa su conocimiento previo de los estudiantes sin estudiar la respuesta en comentario. Dice por ejemplo "los estudiantes no perciben la necesidad de repetir el experimento", pero la DMS es el resultado de al menos 500 repeticiones del experimento. Comentan que los estudiantes "esperan que exactamente 30 de 60 personas prefieran Coca-Cola", pero en realidad los estudiantes dicen "se esperaría que dieran resultados de que a 30 les gusta la Coca-Cola, sin embargo, los valores llegan hasta el 19 siendo el más bajo y 41 el más alto". Dice que no es claro porque consideran un rango de "más-menos 10" pero los estudiantes dicen explícitamente que el  $\pm 10$  lo obtienen del rango de la DMS. En conclusión, en las respuestas a la Actividad 2 ningún equipo de profesores revela el argumento de los estudiantes que se resume en la frase: si bajo la hipótesis nula es posible obtener nuestras como la muestra -dato, entonces no se puede rechazar la hipótesis nula.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Un conocimiento de la materia deficiente por parte de los profesores puede afectar negativamente su conocimiento de los estudiantes (Yilmaz, 2022). En este sentido, pudimos constatar que el conocimiento adquirido por los profesores sobre el acercamiento informal a las pruebas de significación es aún precario. En efecto, sólo dos equipos parecen haber asimilado el acercamiento informal, pues sus respuestas a ambos problemas fueron clasificadas como inferencia informal. En cambio, tres equipos llevaron a cabo inferencias ingenuas y una de las respuestas de R1 y R2 fue clasificada como inferencia tradicional. En consecuencia, hay poca probabilidad de que los profesores que examinamos muestren un razonable conocimiento de los estudiantes sobre el enfoque informal de las pruebas de significación. No obstante, hay algunas lecciones que aprender de sus intentos.

El análisis de las respuestas de los estudiantes por parte de los profesores en la Actividad 2, se enfoca en lo que aquellos no hicieron, la siguiente lista son sus comentarios negativos de la Situación

1: R1: *No encuentran diferencia entre población y muestra*, R2: *No saben para qué sirve la muestra*. R3: *No realizan una inferencia*, R4: *No comprenden la inferencia*. Respecto a la situación 2 los comentarios negativos son: R1: *No comprenden la diferencia entre parámetro y estadístico*, R2: *No tienen claro algunos conceptos*, R3: *No perciben la necesidad de repetir el experimento*.

Se ha reportado que algunos profesores suelen adoptar una postura evaluadora (Davis, 1996) o analizar el razonamiento de los estudiantes de manera superficial (Moyer y Milewicz, 2002), incluso clasificando sus respuestas solo como correctas o incorrectas (Crespo, 2000). Similar a estas actitudes, en nuestro caso, se observó que algunos profesores sólo constatan que los estudiantes no logran dar una respuesta cercana a la normativa. Este sesgo que tiende a considerar aspectos ausentes y no los elementos presentes de las respuestas es similar a una tendencia que tenían los investigadores de educación matemática en el siglo pasado y que en algunos casos se mantiene hasta nuestros días. Por dicha tendencia Shaughnessy (1997) hizo la siguiente recomendación:

Explorar algunos enfoques de investigación que descubran lo que nuestros estudiantes pueden hacer en la resolución de problemas sobre datos y azar, en lugar de simplemente documentar lo que no pueden hacer (p. 18)

Los cursos de actualización profesional de los profesores pueden ayudar a desarrollar su habilidad para interpretar el razonamiento de los estudiantes, sobre todo si éste se da de manera sostenida (Jacobs et al., 2010). En nuestro caso se comenzaron a observar indicios en esta dirección, pues no todas las proposiciones de los profesores son negativas. Algunos tratan de interpretar lo que hacen los estudiantes, no obstante, son incompletas porque no revelan todavía el razonamiento que subyace en las respuestas. Los siguientes enunciados nos muestran sus interpretaciones positivas; de la situación 1 dicen, R2: *Totalizan las muestras en la distribución muestral*, R3: *Los alumnos describen lo que ven en la gráfica*, R4: *Usan la palabra encuesta en lugar de muestra*. Con relación a la situación 2 comentan: R1: *Tratan de ajustar la información de la población con la información de la muestra*, R2 y R4: *Proponen intuitiva o empíricamente un valor crítico para tomar la decisión*, R3: *Consideran que una sola muestra debe tener una proporción del atributo igual a la proporción de la población*.

Se puede apreciar que las interpretaciones de los profesores acerca de las respuestas de los estudiantes son periféricas y no se refieren al argumento que expresan los estudiantes. Por ejemplo, en las soluciones que proponen los estudiantes y en el procedimiento que se espera que aprendan es central el papel de la distribución muestral, no obstante, los equipos de profesores, excepto en un caso, no mencionan a la distribución muestral en sus comentarios, es decir, no asocian las dificultades de los estudiantes con la interpretación que hacen de la DMS. Tal como les sucede a profesores en

formación (Yilmaz, 2022), es posible que estas dificultades para interpretar los razonamientos de los estudiantes se deban tanto a carencias en su conocimiento de la materia como a su falta de experiencia con este enfoque hacia las pruebas de significación.

En nuestro caso, los profesores no buscan reconstruir el razonamiento de los estudiantes de manera consistente con las trazas que éstos dejan en sus respuestas. Ninguna de las proposiciones que sugieren ofrece una conexión convincente con lo que hacen los estudiantes. Por ejemplo, ¿Cómo la confusión entre población y muestra implica ver en la DMS los casos favorables a la Coca-Cola vs casos favorables a la Pepsi? y ¿Por qué la solución consiste en contar los puntos muestrales ‘favorables’ a la Coca-Cola en la DMS?

La actividad de reconstruir los razonamientos de los estudiantes a partir de sus respuestas requiere de un conocimiento especializado de las pruebas de significación desde un enfoque informal, pero al parecer no se suficiente; por ejemplo, los equipos 3 y 4 en la actividad 1 asimilaron bien el enfoque informal, pero no lograron discernir el argumento central de cada respuesta de los estudiantes. Por ejemplo, en la R3 de la actividad 2 reflejan conocimiento de los estudiantes, pero no se relaciona con la respuesta que están analizando. Es decir, tal como lo indica Groth (2017), el conocimiento de un contenido es necesario, pero no suficiente para enseñarlo.

Nuestra reflexión final es que una parte importante del conocimiento de los estudiantes por parte de los profesores proviene de la habilidad para interpretar los razonamientos que hay detrás de las respuestas (informales, parcialmente acertadas o alejadas de la norma) de los estudiantes. Dicha habilidad se requiere, de manera importante, en las propuestas innovadoras apoyadas con tecnología porque ésta puede funcionar como reorganizadora conceptual y propiciar formas de razonar originales y propias de los estudiantes que conviene canalizar (Batanero, 2009). En este estudio se muestra que la tendencia a observar sólo errores y deficiencias, como también lo reporta Stohl (2005), no contribuye a que los profesores entiendan las producciones de sus estudiantes.

Como Groth (2017) lo señala, los experimentos de diseño tienen un gran potencial para fomentar el aprendizaje de los docentes debido a la atención cuidadosa a los datos del aula que implica. Es sabido que no suele ser fácil para los profesores dilucidar el razonamiento de los estudiantes (Jacobs et al., 2010), sin embargo, se ha demostrado que el estudio de casos reales e interpretación de respuestas típicas en cursos de desarrollo profesional es favorable para que los profesores progresen en este sentido (Jacobs et al., 2010; Yilmaz, 2022). En la Actividad 2 se solicitó a los profesores que identificaran los problemas en las respuestas de los estudiantes y que explicaran por qué creían que los estudiantes procedieron de esa manera. Creemos que este tipo de preguntas abiertas, si bien nos

permitieron observar los razonamientos más genuinos y espontáneos de los profesores, también limitaron de alguna manera sus producciones al no poner el foco sobre aspectos particulares de los argumentos de los estudiantes. Tenemos la hipótesis de que, con fines didácticos, conviene utilizar preguntas más específicas como se mostrará a continuación. En conjunto, como consecuencia de nuestra investigación, y con el fin de que en cursos de actualización como el que se llevó a cabo se pueda favorecer el conocimiento de los estudiantes por parte de los profesores, hacemos las siguientes recomendaciones:

- Fomentar el uso de preguntas precisas y específicas acerca del razonamiento de los estudiantes tales como “¿Cómo aproximaron el p-valor los estudiantes en esta respuesta?” por sobre preguntas vagas y abiertas tales como “¿Qué problemas identificas en la siguiente respuesta?”. En nuestro caso, dichas preguntas permitirían poner en relieve los razonamientos que surgen por parte de los estudiantes al utilizar tecnología y sus diferencias con respecto al enfoque tradicional.
- Diseñar casos en los que las respuestas de los estudiantes se sinteticen o simplifiquen más que en el presente estudio con el objetivo de destacar aspectos específicos de sus razonamientos, y presentar brevemente el contexto en el que se suscitaron, tal como lo hace Yilmaz (2022). Es decir, no presentar a los profesores las respuestas de los estudiantes tal cual sucedieron, sino redactarlas de nuevo y contextualizarlas para favorecer su comprensión y así evitar ambigüedades, por supuesto, no se deben perder los aspectos más importantes de la argumentación de los estudiantes.
- Enfatizar en el conocimiento de la materia por parte de los profesores poniendo en relieve el uso de los principales conceptos y la lógica de la inferencia estadística. Evitar abordar el enfoque con tecnología de manera mecánica, teniendo en cuenta la advertencia de Batanero y Díaz (2015). Por ejemplo, discutir más acerca de qué es el nivel de significación o enfatizar reiteradamente que las pruebas de significación son un proceso para desacreditar hipótesis y no para verificarlas. Una opción sería seleccionar, comparar y discutir respuestas de estudiantes que contengan concepciones ingenuas o contrarias para analizarlas e interpretarlas.
- Enfocar el curso para profesores ya sea al conocimiento de la materia o al conocimiento de los estudiantes, pero no estudiar ambos dentro de un mismo curso. Esto se hace necesario en la medida de que el conocimiento de la materia de un enfoque con simulación es nuevo para

los profesores y requiere cierta asimilación antes de que puedan interpretar el pensamiento de sus estudiantes.

Una limitación del presente estudio fue la cercanía entre el aprendizaje del enfoque informal por parte de los profesores y la petición de que interpretaran el razonamiento de los estudiantes detrás de sus respuestas. En un diseño en el que haya un periodo de práctica docente intermedio entre ambos eventos que incluya el contenido en comento, se podría lograr que los profesores desarrollaran su habilidad para deducir el razonamiento detrás de las respuestas de sus estudiantes.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching, what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://10.1177/0022487108324554>
- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education*. London: Routledge.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Escola* (pp. 1-23). Braga, Portugal: Universidade do Minho.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. Contreras, C. Batanero, J. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, . . . M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (Vol. 2, pp. 135-144).
- Case, C., & Jacobbe, T. (2018). A framework to characterize student difficulties in learning inference from a simulation-based approach. *Statistics Education Research Journal*, 17(2), 9-29.
- Chance, B., & Rossman, A. (2006). Using simulation to teach and learn statistics. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education. Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-7)*, Salvador, Brazil. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Crespo, S. (2000). Seeing more than right and wrong answers: prospective teachers' interpretations of students' mathematical work. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 155-181.
- da Ponte, J., & Noll, J. (2018). Building capacity in statistics teacher education. En D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Edits.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 433-455). Springer.
- Davis, B. (1996). *Teaching mathematics: Toward a sound alternative*. New York: Garland Publishing.
- Finzer, W. (2014). *Fathom Dynamic Data Software (Version 2.2) [Software]*. Obtenido de <http://fathom.concord.org/>
- García-Ríos, V. (2017). *Diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la Introducción y Desarrollo del Razonamiento sobre el Contraste de Hipótesis en el Nivel Medio Superior* [tesis doctoral no publicada, Cinvestav].
- Groth, R. (2013). Characterizing key developmental understandings and pedagogically powerful ideas within a statistical knowledge for teaching framework. *Mathematical Thinking and Learning*, 15, 121-145.

- Groth, R. (2017). Developing statistical knowledge for teaching during design-based research. *Statistics Education Research Journal*, 16(2), 376-396.
- Hofmann, T., Maxara, C., Meyfarth, T., & Prömmel, A. (2014). Chapter 21 Using the software FATHOM for learning and teaching statistics in Germany-A review on the research activities of Rolf Biehler's working group over the past ten years. En *Wassong, Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen-Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (pp. 283-304). Springer.
- Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.
- Matuszewski, A. (2018). *High School Statistics Teacher's Understanding of Hypothesis Testing Through Simulation*. Tennessee, US: Middle Tennessee State University.
- Moyer, P., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 293-315.
- Pratt, D., & Ainley, J. (2008). Introducing the special issue on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 3-4.
- Shaughnessy, M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. *20th annual MERGA conference*, (pp. 6-22). Aotearoa.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stohl, H. (2005). Probability in Teacher Education and Development. In G. Jones (Edit.), *Exploring Probability in School, Challenges for Teaching and Learning* (pp. 345-366). NY: Springer.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, 76(2), 105-110. <https://doi.org/10.1037/h0031322>
- Yilmaz, N. (2022). Exploring pre-service mathematics teachers' knowledge of content and students through case reading and discussion. *Journal of Pedagogical Research*, 6(1), 171-195. <https://dx.doi.org/10.33902/JPR.2022175841>
- Zieffler, A., Garfield, J., DelMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.
- Zimmermann, G., & Jones, G. (2002). Probability simulation: What meaning does it have for high school students? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(2), 221-236.

## **KNOWLEDGE OF HIGH SCHOOL TEACHERS ABOUT AN INFORMAL APPROACH TO STATISTICAL SIGNIFICANCE TESTS**

### **ABSTRACT**

There is a way to teach significance tests from an informal approach with the help of technology. However, little is known about the knowledge of teachers to bring this alternative to the classroom. We explore how knowledge of content and students manifests under this approach by a group of teachers. For this, we carried out an online update course with 19 teachers from a high school in Mexico. The course was planned as a design experiment in which instructors' team-solved significance testing problems using Fathom software and discussed student responses to similar problems. When analyzing the productions of the professors, we observe some deficiencies in their knowledge about the significance tests and difficulties in adopting the approach with technology. These problems prevented them from generating accurate models to explain the students' reasoning. All the above allowed us to obtain feedback on the design of the course and make some recommendations for future teacher training and development courses.

Keywords: Informal inferential reasoning, Simulation, Statistical tests, Statistical knowledge for teaching, Design experiment, Professional development.

## **CONHECIMENTO DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO SOBRE UMA ABORDAGEM INFORMAL PARA TESTES DE SIGNIFICAÇÃO ESTATÍSTICA**

### **RESUMO**

Existe uma maneira de ensinar testes de significância a partir de uma abordagem informal com a ajuda da tecnologia. No entanto, pouco se sabe sobre o conhecimento dos professores para trazer essa alternativa para a sala de aula. Exploramos como o conhecimento do conteúdo e dos alunos se manifesta sob essa abordagem por um grupo de professores. Para isso, realizamos um curso de atualização online com 19 professores de uma escola de ensino médio no México. O curso foi planejado como um experimento de design no qual os instrutores resolveram problemas de teste de significância em equipe usando o software Fathom e discutiram as respostas dos alunos a problemas semelhantes. Ao analisar as produções dos docentes, observamos algumas deficiências em seus conhecimentos sobre os testes de significância e dificuldades em adotar a abordagem com a tecnologia. Esses problemas os impediram de gerar modelos precisos para explicar o raciocínio dos alunos. Todos os itens acima nos permitiram obter feedback sobre o design do curso e fazer algumas recomendações para futuros cursos de formação e desenvolvimento de professores.

Palavras-chave: Raciocínio inferencial informal, Simulação, Testes estatísticos, Conhecimento estatístico para o ensino, Design experimental, Desenvolvimento profissional.

FRANCISCO SEPÚLVEDA VEGA

*Cinvestav, Ciudad de México, México*

[francisco.sepulveda@cinvestav.mx](mailto:francisco.sepulveda@cinvestav.mx)

<https://orcid.org/0000-0002-3615-3493>

El Mtro. Francisco Sepúlveda Vega es estudiante de doctorado en el Cinvestav. Su proyecto de investigación es acerca de la enseñanza de las pruebas de significación en el nivel bachillerato con profesores. Cuenta con una maestría en educación matemática por la misma institución y una licenciatura en ingeniería industrial por la Universidad la Salle. Ha participado en diferentes ocasiones en congresos internacionales de educación matemática. Los datos analizados en este capítulo forman parte de su investigación de doctorado.

ERNESTO ALONSO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

*Cinvestav, Ciudad de México, México*

[esanchez@cinvestav.mx](mailto:esanchez@cinvestav.mx)

El Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez ha dirigido 15 tesis de doctorado y 33 tesis de maestría. Ha publicado 20 artículos en Revistas Internacionales o capítulos de libros y cerca de 50 artículos en extenso en congresos internacionales. Es editor del libro *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas Escolares*, publicado por la SEP y destinado a los profesores de educación básica de México. Ha publicado junto con otros tres colegas cuatro series de libros de texto para secundaria. También ha publicado dos libros de bachillerato: *Probabilidad y Estadística I y II*. Es actualmente editor en jefe de la revista *Educación Matemática*. Ha sido editor asociado de la *Statistical Education Research Journal (SERJ)* y lo fue de *Innovación Educativa* del IPN.

# LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA VARIABLE ALEATORIA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE URUGUAY

FEDERICO DE OLIVERA  
LUCIANA OLESKER  
DANIELA PAGÉS

## RESUMEN

Se presentan resultados primarios de una investigación cuyo objetivo era determinar qué significados construyen futuros profesores de matemática de Uruguay sobre el concepto de variable aleatoria. Se utilizó una metodología cualitativa, que consistió en la aplicación de un cuestionario. Este fue propuesto a estudiantes de profesorado de matemática que ya habían cursado la asignatura Probabilidad y Estadística de la carrera, y se aplicó a dieciocho estudiantes voluntarios. Se reporta el análisis de las respuestas al cuestionario, y en base a este análisis, se establecen algunas ideas para el futuro diseño de una secuencia de enseñanza, en el formato de Recurso Educativo Abierto. Como resultados del estudio se encontró la creencia, en una gran proporción de participantes, de que toda función de  $\Omega$  en el conjunto de los reales es una variable aleatoria. Además, se encontraron significados personales limitados sobre las variables aleatorias discretas y absolutamente continuas.

Palabras clave: Formación de profesores de matemática; Variable aleatoria; Función de distribución; Tipos de variables aleatorias; Significados personales.

## INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemática en Uruguay es una carrera terciaria no universitaria, de carácter concurrente, que tiene una duración de cuatro años. Se ocupa de formar profesores de matemática que se desempeñarán en enseñanza media básica, superior y terciaria. Se funda en tres pilares: la formación específica en matemática, la formación en Ciencias de la Educación, y la formación en Didáctica-Práctica Docente. La asignatura Probabilidad y Estadística forma parte del tercer año de cursada de la carrera, y es un curso anual, cuyo programa prevé 6 horas semanales de clase. Durante los dos primeros años de la carrera los estudiantes han abordado el estudio de distintas estructuras algebraicas (grupos, anillos, álgebras, cuerpos, espacios vectoriales). En el tercer año de la carrera, junto con el curso de Probabilidad y Estadística, se encuentra un curso de Topología, en el que se abordan los espacios topológicos generales. La primera unidad del programa de Probabilidad y Estadística se propone trabajar con la teoría axiomática de la probabilidad, y la segunda unidad está

De Olivera, F., Olesker, L. y Pagés, D. (2022). La conceptualización de la variable aleatoria en la formación de profesores de Uruguay. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 321-347). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

destinada al estudio de las variables aleatorias. Luego el curso continúa con esperanzas, vectores aleatorios, convergencias y por último inferencia estadística.

Los autores de este trabajo hemos conformado un grupo de investigación desde el año 2016, con el objetivo de comenzar a analizar la formación de profesores de matemática en Probabilidad y Estadística en Uruguay. Nuestro trabajo anterior consistió en un estudio comparativo de los currículos de Probabilidad y Estadística en la formación de profesores de varios países, incluyendo a Uruguay. Asimismo, realizamos un análisis de las recomendaciones de investigaciones sobre la formación de profesores en el área. A partir de estos estudios elaboramos recursos educativos abiertos para la enseñanza de la primera unidad del programa de Probabilidad y Estadística de la formación de profesores de matemática (De Olivera, Olesker y Pagés, 2020).

En este capítulo reportamos una investigación vinculada con la enseñanza del concepto de variable aleatoria en la formación de profesores.

En primer lugar presentamos una revisión bibliográfica sobre las dificultades que conlleva la enseñanza de este concepto, así como de las ideas vinculadas con él. A partir de esta revisión elaboramos un cuestionario, para proponer a estudiantes que ya hubieran cursado la asignatura Probabilidad y Estadística del profesorado, y que presentamos en segundo término, junto con las categorías elaboradas para el análisis de las respuestas. A continuación, analizamos las respuestas a este cuestionario, que fue completado por dieciocho estudiantes. Finalmente presentamos recomendaciones surgidas del análisis de las respuestas al cuestionario, así como proyecciones de este estudio hacia la continuación de la investigación sobre esta temática.

## **JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE ESTUDIO**

Existe una línea en la investigación en Educación Matemática, que analiza la importancia que puede tener el conocimiento matemático avanzado en la práctica docente de los profesores. Zazkis y Leikin (2010) llaman conocimiento matemático avanzado al que se adquiere en los cursos de matemática de la formación de profesores (en un sentido amplio, es decir, más allá de la estructura de la formación). Este conocimiento avanzado forma parte del concepto de pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991). Wasserman (2018), a su vez, presenta un modelo distinto al elaborado por Ball et al. (2008) con base en el constructo de Shulman (1986) de conocimiento didáctico del contenido. Wasserman distingue entre la matemática local y la matemática no local. Con la primera se refiere a la matemática que se enseña. La matemática no local, en tanto, representa el conocimiento matemático que se encuentra fuera del ámbito de lo que se enseña. El autor elabora un modelo a través del que

discute la influencia de la matemática no local en el conocimiento y la enseñanza de la matemática local.

Wasserman (2018) llama vecindad matemática local (local mathematical neighborhood) al conjunto de ideas matemáticas cercanas a lo que se enseña. Distingue también la vecindad matemática no local (non-local mathematical neighborhood) como el conjunto de ideas que están más allá de lo que se enseña (detrás, al lado y más allá del contenido que se enseña).

Como parte de este modelo, Wasserman (2018) plantea que “el conocimiento de la matemática no local se vuelve potencialmente productivo para la enseñanza en el momento en que este conocimiento altera las percepciones de los docentes o sus comprensiones ontológicas sobre el contenido local que enseñan” (p. 121).

La formación docente en Uruguay surge, por motivos de carácter histórico, independientemente de la órbita de la Universidad, las carreras de profesorado se dictan en institutos de carácter terciario que cuentan con una historia de más de 70 años. Más allá de ello, la currícula y su carga horaria se equiparan a la de cualquier carrera universitaria. La formación docente en Uruguay cuenta con tres áreas que son transversales a lo largo de los cuatro años de carrera. Una primera área vinculada a las ciencias de la educación que incluye asignaturas como pedagogía, psicología, historia de la educación, etc. Un segundo bloque de materias específicas de matemáticas, que van recorriendo las diferentes áreas de la disciplina, y finalmente un bloque de didáctica específica, con contenido teórico y con prácticas profesionales en institutos de enseñanza media.

En el tercer año de la carrera, dentro del bloque específico, se encuentra la asignatura Probabilidad y Estadística, cuya segunda unidad requiere el trabajo con el concepto de variable aleatoria. Si bien la matemática que enseñamos en este bloque está ligada a la profesión que luego van a desarrollar los futuros profesores, estamos convencidos que no es lo mismo, por ejemplo, la matemática a enseñar a ingenieros que, a futuros profesores, pero consideramos que la misma no debe estar exclusivamente atada a las definiciones y conceptos que luego el futuro profesor enseñará en nivel medio. Consideramos necesario hacer hincapié en las particularidades de los conceptos que desarrollamos y de su trasposición didáctica para la enseñanza media, trabajando coordinadamente con el área didáctica. Esta necesidad es acorde con los planteos de Wasserman (2018). Una mejor formación matemática favorecerá un docente con mayor capacidad de decisión fundamentada a la hora de planificar, y con espíritu crítico, entendiendo los diferentes conceptos que aparecen en las distintas bibliografías, así como sus ventajas y deficiencias. Por ello, consideramos pertinente en el ámbito de la formación docente la enseñanza de las definiciones formales, como por ejemplo la de

variable aleatoria. Asimismo, nos parece de suma importancia desarrollar investigaciones vinculadas con la comprensión de estas definiciones por parte de los estudiantes. Por otra parte, los futuros profesores ya han visto, antes del curso de Probabilidad y Estadística, distintas estructuras algebraicas en los diferentes cursos, desde el primer año de la carrera, como ser grupos, anillos, álgebras, cuerpos, espacios vectoriales, etc. Además, esta asignatura se cursa simultáneamente con Topología, donde se estudian espacios topológicos generales (Hausdorff, Conexión, Compacidad, etc.) Por lo que los estudiantes están familiarizados, en algún sentido, con las estructuras y el nivel de abstracción.

En el propio curso de probabilidad, previamente son trabajados los Espacios de Probabilidad, donde se realiza un particular desarrollo de las diferentes definiciones convergiendo en los Axiomas de Kolmogorov. La necesidad de la  $\sigma$ -álgebra es introducida por medio de problemas que administran el uso de la información en situaciones concretas y luego se complementa con la noción de conjuntos no medibles en  $\mathbb{R}$ , como ser el conjunto de Vitali.

Wasserman (2018) establece que la conclusión no puede ser que los futuros profesores deben tener menos cursos de matemática avanzada, sino que la enseñanza en estos cursos debe estar vinculada con las necesidades profesionales de los futuros profesores.

A nuestro criterio es necesario que el docente comprenda que la condición sobre las preimágenes de los borelianos nos permite inducir una nueva probabilidad a través de la variable aleatoria. A su vez las probabilidades en este nuevo espacio son las mismas que se trabajaron en el espacio de probabilidad de  $\Omega$ , ya que tenemos asegurado que la preimagen de todo boreliano pertenece a la  $\sigma$ -álgebra definido sobre  $\Omega$ . Por ello es que estamos convencidos que comprender la definición de variable aleatoria, por abstracta que parezca, tendrá efectos positivos en el desempeño del futuro docente en el aula.

Las variables aleatorias tienen el potencial de modelizar situaciones de la realidad, existen situaciones muy cercanas que dan lugar a variables discretas y absolutamente continuas, pero también a mixtas. En nuestro cuestionario aparecen ejemplos sencillos que dan cuenta de esto. Por lo que la distinción entre variables absolutamente continuas y mixtas es un contenido importante dentro de la unidad y también aportará a una mejor comprensión global de la importancia del trabajo con variables aleatorias.

## REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

El concepto de variable aleatoria fue señalado por Heitele (1975) como una de las ideas estocásticas fundamentales, llamando así a las ideas que

[ ] proveen al individuo, en cada nivel de su desarrollo, con modelos explicativos tan eficientes como sea posible y que difieran en los distintos niveles cognitivos, no de una forma estructural, sino solo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración. (p. 188)

En cuanto al funcionamiento del concepto de variable aleatoria como modelo explicativo, Heitele (1975) señala tres aspectos: la distribución de una variable aleatoria, su esperanza, y la composición de variables aleatorias para obtener nuevas variables.

Diversos autores han estudiado las dificultades que se presentan en la enseñanza del concepto de variable aleatoria. Sin embargo, la mayoría se vinculan con la educación secundaria o universitaria, por ejemplo, con la formación de ingenieros. De todos modos, el conocimiento de estas dificultades permite informar nuestro estudio, y orientar el diseño del cuestionario. Esta revisión, complementada con los datos de esta investigación, permitirá generar ideas sobre la conceptualización que los futuros profesores hacen del concepto de variable aleatoria y las ideas vinculadas con él. La relevancia de este conocimiento radica en el hecho de que las concepciones erróneas o las intuiciones fallidas que los futuros docentes desarrollen verán afectado su futuro profesional.

### **Los significados del concepto de variable aleatoria**

Ortiz (2002) reporta un estudio de los significados de diversos conceptos probabilísticos en los libros de texto, basándose en la teoría de significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994). Entre estos conceptos el autor analiza el de variable aleatoria. Como elementos intensionales (atributos o rasgos) del concepto de variable aleatoria enumera los siguientes:

VA1: La variable aleatoria toma sus valores dependiendo de los resultados de un experimento aleatorio.

VA2: Es una función del espacio muestral en  $R$ .

VA3: Queda caracterizada mediante la distribución de probabilidad: conjunto de valores que toma junto con su probabilidad.

VA4: Se requiere que, para cada intervalo  $I$  de  $R$ , el conjunto original sea un suceso del espacio muestral.

VA5: Una variable aleatoria define una medida de probabilidad sobre el conjunto de números reales.

VA6: Para cada variable aleatoria podemos definir una función de distribución de la forma siguiente:

$$R \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(\zeta \leq x)$$

VA7: La función de distribución de una variable aleatoria es una función real de variable real, monótona no decreciente.

VA8: La función de distribución de una variable aleatoria determina en forma biunívoca la distribución de probabilidad.

VA9: Sea  $(x_i, p_i)$  con  $i \in I$  la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Se define la media o esperanza matemática como  $E(\zeta) = \sum_{i \in I} x_i p_i$ . Este concepto extiende la idea de media en una variable estadística.

VA10: La moda es el valor más probable de la variable.

VA11: La mediana es el valor de la variable para el cual la función de distribución toma el valor  $\frac{1}{2}$ . Por tanto, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor o igual que la mediana es exactamente  $\frac{1}{2}$ . (Ortiz, 2002, p. 121)

### **Dificultades reportadas sobre la enseñanza del concepto de variable aleatoria**

Uno de los primeros problemas que se señala en cuanto a la comprensión del concepto de variable aleatoria es su propia definición (Ruiz et al., 2006; Ruiz, 2006; Kachapova, 2012). En particular Kachapova (2012) señala que la definición de variable aleatoria genera la concepción errónea en los estudiantes de que toda función de un espacio muestral en el conjunto de los reales es una variable aleatoria. La autora agrega que esta concepción errónea surge del hecho de considerar que un suceso es cualquier subconjunto de un espacio muestral, generalizando así algo que es cierto para un espacio muestral finito, pero no en el caso general. Kachapova aboga por un enfoque axiomático de la probabilidad, bajo el cual un subconjunto del espacio muestral es considerado un suceso si existe la medida de su probabilidad. Al respecto, Ruiz et al. (2006) y Ruiz (2006) también plantean que, para que una función de un espacio muestral en  $R$  sea una variable aleatoria se requiere que el inverso de un intervalo en dicha relación sea un conjunto medible. Este hecho se vincula de forma directa con los significados intensionales VA1, VA2 y VA4 (Ortiz, 2002). Pero también se relaciona con los significados VA3 y VA5, que establecen el nexo entre el concepto de variable aleatoria y el de función de distribución.

Ruiz et al. (2006), en relación con la necesidad de que el inverso de un intervalo sea un suceso, cuando se define una variable aleatoria, explicitan que esto es necesario para poder definir una función de distribución a partir de cierta variable aleatoria. Esta relación entre los dos conceptos aporta sentido a la condición mencionada, y podría llevar a pensar en definir y enfatizar por igual los dos conceptos al mismo tiempo (Kachapova, 2012).

Otra dificultad que se reporta (Ruiz, 2006) es el doble rol que juega la variable aleatoria, en tanto variable dependiente (en la propia variable aleatoria como función) y variable independiente (en la definición de la función de probabilidad).

Además, Ruiz (2006) señala que, para comprender el concepto de variable aleatoria, es preciso que los estudiantes entiendan los conceptos de función, función inversa, elementos de una función (dominio, recorrido y correspondencia), así como la diferencia entre variable dependiente e independiente. Esto, sumado al uso de diversas representaciones, le da al concepto una complejidad semiótica y epistemológica. En cuanto a lo semiótico, el propio término “variable” para designar una función, ha sido señalado, por ejemplo, por Feller (1973).

Kachapova (2012) señala también algunas concepciones erróneas acerca de las definiciones de los distintos tipos de variables aleatorias. En particular, la definición de variable aleatoria continua (que en nuestro contexto llamamos absolutamente continua) como aquella cuyo conjunto de valores es no numerable, lleva a la concepción de que toda variable aleatoria es discreta o continua, no considerando las variables aleatorias mixtas. La autora propone, para ayudar a los estudiantes a superar esta concepción errónea, hacer énfasis en la siguiente definición de variable aleatoria continua:

“Una variable aleatoria  $X$  es continua si su función de distribución  $F$  puede ser expresada como  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  para cierta función  $f$  no negativa, llamada la función de densidad de  $X$ .” (Kachapova, 2012, p. 5). La autora agrega la necesidad de trabajar con variables aleatorias mixtas para clarificar más aún esta concepción errónea.

Si analizamos algunos libros de texto, observamos que, efectivamente, la mayoría solo tratan las variables aleatorias discretas y las continuas. Por ejemplo, Canavos (1998), Novales (1997), entre otros.

Otra concepción errónea sobre las variables aleatorias continuas, señalada por Kachapova (2012), es la de que una variable aleatoria continua es aquella que tiene una función de distribución continua, condición que es necesaria pero no suficiente. La autora propone trabajar con contraejemplos en este sentido.

En relación con la formación de profesores en el área de la Probabilidad y la Estadística solo encontramos el trabajo de Pérez y Parraguez (2013). Si bien se centra en la comprensión del concepto aleatorio y determinista, presenta algunas consideraciones acerca de las dificultades del concepto de variable aleatoria en la formación de profesores. En cuanto al estudio de los fenómenos aleatorios destacan como factor esencial para su comprensión, la identificación del tipo de variable en juego. Agregan que este concepto tiene dificultades epistemológicas, didácticas, cognitivas y pedagógicas.

También señalan que la noción de variable aleatoria tiende a identificarse con la variable algebraica, y no con una función; que los textos se focalizan en un tratamiento cuantitativo de la variable y fuera de contexto; y que los profesores de matemática están poco preparados en la enseñanza de la estadística, lo que influye en las dificultades sobre este concepto en la educación secundaria. En particular, con respecto a la variable aleatoria, las autoras remarcan la relevancia de la distinción entre suceso y variable aleatoria, en relación con lo que se está investigando (suceso) y a través de qué característica se investiga (variable). Esto trae como consecuencia dificultades en la modelación.

La revisión que hemos realizado es la base conceptual que tomamos para este estudio. Esta revisión, junto con las ideas de los integrantes del equipo que dictan el curso de Probabilidad y Estadística, nos permiten identificar aspectos importantes y problemáticos de la conceptualización de la variable aleatoria en el profesorado, y que se utilizan en el diseño y análisis del cuestionario.

### **PROBLEMÁTICA**

En el estudio anterior realizado por el equipo (De Olivera, Olesker y Pagés, 2020) realizamos el relevamiento de currículos de las carreras de profesorado de matemática de nueve países. Utilizamos como base conceptual la planteada por Godino (2011), centrándonos en las facetas epistémica, cognitiva y mediacional. Construimos un conjunto de categorías, basadas en los trabajos de Rivas (2014) y Lázaro (2015). Entre las categorías que refieren a la variable aleatoria, consideramos las siguientes:

C12: Define variables aleatorias, su clasificación y sus características.

C13: Estudia algunos modelos de variables aleatorias discretas y absolutamente continuas. (De Olivera, Olesker, Pagés, 2020, p. 16).

Se encontró que 19 de los 21 currículos analizados incluye el estudio de las variables aleatorias. Aparecen la definición de variable aleatoria, su clasificación y/o características (esperanza, varianza, etc.). Hay 17 currículos que mencionan los modelos de probabilidad discretos y absolutamente continuos.

En nuestro currículo también aparece esta unidad, la que es trabajada en todos los cursos del profesorado del país. Quienes integramos este grupo de investigación sobre Probabilidad y Estadística comenzamos a notar ciertas dificultades, presentes en los futuros profesores, vinculadas al concepto de variable aleatoria. En especial en el manejo no algorítmico de conceptos asociados a variables aleatorias, entre otras cosas al momento de modelizar situaciones. Esto motivó que indagáramos investigaciones al respecto. Encontramos varios estudios, los que en su mayoría reseñamos en este capítulo, que señalan ciertas dificultades en otros países, pero no encontramos ninguna investigación

en el contexto de nuestro país y mucho menos en el ámbito de la formación de profesores. Por ello, es que consideramos necesario realizar una investigación que dé cuenta de qué ideas tienen los futuros profesores sobre la variable aleatoria y si detectamos las mismas dificultades que reseñan investigaciones en otros países o algunas nuevas. Este sería un punto de inicio para diseñar nuevos estudios sobre la temática en el contexto uruguayo.

Sobre la base de lo expuesto anteriormente nos planteamos los siguientes objetivos:

O1: Determinar los significados que los estudiantes asignan al concepto de variable aleatoria, a partir de cuál definición consideran válida y en qué contextos la aplican.

O2: Identificar ideas erróneas vinculadas a los tipos de variables, en particular a las discretas y absolutamente continuas.

O3: Indagar sobre el reconocimiento de las variables mixtas, en especial si las diferencian de las absolutamente continuas en contextos de aplicación.

## **MATERIAL Y MÉTODOS**

El estudio que presentamos es de tipo cualitativo y exploratorio. El objetivo de este es determinar qué significados construyen futuros profesores de matemática de Uruguay sobre el concepto de variable aleatoria. Se diseñó un cuestionario con base en las dificultades reportadas por la investigación sobre la comprensión del concepto de variable aleatoria, y en las experiencias de dos de los autores, que son formadores en la asignatura Probabilidad y Estadística de la formación de profesores de matemática de Uruguay. Este cuestionario recoge los significados institucionales considerados para esta parte del estudio.

El cuestionario fue compartido a través de un formulario Google, a estudiantes que ya habían cursado la asignatura Probabilidad y Estadística de la carrera de profesorado de matemática. Respondieron el cuestionario dieciocho futuros profesores de forma voluntaria. Además de las preguntas relativas al concepto de variable aleatoria, se les preguntaba si habían aprobado la asignatura, y si estaban dispuestos a realizar una entrevista posterior, en cuyo caso se les solicitaba la dirección de correo electrónico.

A continuación, presentamos las categorías elaboradas para el análisis de las respuestas del cuestionario, que se basan en los significados institucionales establecidos.

### **Descripción del cuestionario y categorías de análisis**

El cuestionario que elaboramos está estructurado en cuatro bloques de preguntas. El primer bloque hace referencia a la definición de variable aleatoria. El segundo bloque, en formato verdadero o falso, recorre aspectos como el concepto de variable aleatoria, el vínculo entre el recorrido y las

probabilidades y algunas cuestiones relacionadas con la función de probabilidad de variables aleatorias discretas y absolutamente continuas, ya sea cuantía, densidad o la propia función de distribución. El tercer bloque busca sacar a luz los significados asociados a variables aleatorias discretas, absolutamente continuas e indagar si los estudiantes manejan la noción de variables aleatorias mixtas.

La primera pregunta del cuestionario se muestra en la figura 1. Fue diseñada para analizar la definición de variable aleatoria que tienen los estudiantes y detectar ideas erróneas respecto de esta. Se optó por brindar a los estudiantes cuatro definiciones que aparecen en libros de Probabilidad y Estadística que son recomendados en la bibliografía del programa, y son utilizados a nivel local en distintas carreras. Se les pidió que eligieran una o más de ellas como correctas y dieran sus argumentos por los cuales rechazaban las demás. La primera definición propuesta fue extraída del libro Canavos (1998), en ella se plantea una variable como una función que a cada elemento del espacio muestral le hace corresponder un número real, no impone ninguna otra característica a esta función. La segunda definición, extraída de James (1996) agrega la condición de que el suceso aleatorio  $[X \leq x]$  pertenezca a la  $\sigma$ -álgebra definida sobre  $\Omega$ . Esta definición es más completa que la anterior. Si bien no hace referencia a todos los borelianos, está presente una familia de borelianos que resulta ser un generador de la  $\sigma$ -álgebra de Borel. Por medio de las propiedades de la preimagen, esta definición es adecuada en este contexto y dirigida más a la introducción de la función de distribución. La tercera definición, adaptada de las notas del profesor Cabaña (s/f), plantea la condición de que la preimagen de cualquier boreliano  $B$  pertenezca a la  $\sigma$ -álgebra definida sobre  $\Omega$ . Si bien es técnicamente más compleja, en los cursos se insiste en dicha propiedad y su necesidad, por medio de ejemplos. Finalmente aparece una definición (Levin y Rubin, 2004) que carece de formalidad, de hecho, estrictamente no define lo que es una variable aleatoria, además de que menciona una dicotomía entre variable discreta y continua, que no es correcta.

**Figura 1.** *Primer bloque del cuestionario*

Decide cuál o cuáles de las siguientes pueden considerarse definiciones correctas de variable aleatoria.	
	Sea $S$ un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea $X$ una función de valor real definida sobre $S$ , de manera que transforme los resultados de $S$ en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que $X$ es una variable aleatoria. (Canavos, 1997)
	Una variable aleatoria $X$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, A, P)$ es una función real definida en el espacio $\Omega$ tal que $[X \leq x]$ es un evento aleatorio para todo $x$ real; es decir: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria si $[X \leq x] \in A \forall x \in \mathbb{R}$ . (James, 1996)
	Dado un espacio probabilizable $(\Omega, A)$ se llama variable aleatoria en $(\mathbb{R}, B)$ a una función $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la preimagen de todo conjunto $B$ de $B$ es un suceso. Donde $A$ es sigma-álgebra sobre $\Omega$ y $B$ es la sigma-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ . (Adaptada de Probabilidad y aplicaciones estadísticas, Cabaña, s.f.)
	Una variable es aleatoria si toma diferentes valores como resultado de un experimento aleatorio. Esta variable aleatoria puede ser discreta o continua. Si puede tomar solo un número limitado de valores, entonces es una variable aleatoria discreta. En el otro extremo, si puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado, entonces se trata de una variable aleatoria continua. (Levin y Rubin, 2004)
Para las definiciones que consideraste incorrectas, explica por qué lo hiciste.	

**Fuente:** Elaboración propia

En este bloque de preguntas, primeramente, entra en juego la concepción de la variable aleatoria como una función, teniendo en cuenta su dominio y codominio en relación con las experiencias aleatorias. Andrade et al. (2013) mencionan el hecho que en la enseñanza del concepto de variable aleatoria no se enfatiza en el carácter funcional de esta, cuyo dominio es precisamente el espacio muestral, sino se describe simplemente como el conjunto de valores que conforma el recorrido de la relación funcional. Destacan los autores que en los libros de texto que han analizado en sus investigaciones, cuando se alude a variables aleatorias con nombre propio como la binomial, la hipergeométrica, etc., se apunta básicamente a ese recorrido o dominio de la relación funcional que constituye la función de distribución de probabilidades, perdiendo de vista el espacio muestral asociado. Otro aspecto que surge de estas definiciones propuestas es que en alguna de ellas se

menciona una condición para que esta sea función de  $\Omega$  en  $R$  y en otras no. Para que una función sea una variable aleatoria se debe garantizar que la preimagen de un boreliano pertenezca a la  $\sigma$ -álgebra definida sobre  $\Omega$ , es decir, pertenezca al dominio de la probabilidad. Como expresamos en nuestra revisión bibliográfica, Kachapova (2012) señala que la definición de variable aleatoria genera la concepción errónea en los estudiantes de que toda función de un espacio muestral en el conjunto de los reales es una variable aleatoria. En base a lo desarrollado anteriormente hemos definido, para este primer bloque del cuestionario, las categorías de análisis que se mencionan a continuación:

**Tabla 1.** *Categorías primer bloque del cuestionario*

Categorías	Descripción
C1: Reconoce el carácter funcional de la variable aleatoria	Se elige alguna de las tres primeras definiciones y se rechaza la cuarta explícitamente por esta razón.
C2: Reconoce la necesidad de exigirle a esta función que la primagen de un boreliano sea un elemento de $\mathcal{A}$ .	Se elige como correcta la definición dos, o la definición tres o ambas.
C3: Comprende la equivalencia entre la definición 2 y 3.	Esto implica una comprensión del concepto de $\sigma$ -álgebra y tener en cuenta que los intervalos $(-\infty, x]$ con $x \in R$ engendran una $\sigma$ -álgebra que es, justamente, la $\sigma$ -álgebra de Borel. Se elegirán las definiciones 2 y 3.

**Fuente:** Elaboración propia

En el segundo bloque del cuestionario se plantean al estudiante una serie de enunciados para que indique si son verdaderos o falsos.

**Figura 2.** Segundo bloque del cuestionario

<i>Para las definiciones que consideraste incorrectas, explica por qué lo hiciste.</i>		
	<i>Verdadero</i>	<i>Falso</i>
<i>Toda función de <math>\Omega</math> en <math>\mathbb{R}</math> es una variable aleatoria.</i>		
<i>Una variable aleatoria es una función que a cada resultado de un experimento aleatorio le hace corresponder su probabilidad.</i>		
<i>El recorrido de una variable discreta es un conjunto finito.</i>		
<i>La función densidad es una función siempre continua.</i>		
<i>Dado un experimento aleatorio que consiste en tirar 2 dados, es correcto definir una variable aleatoria como "al tirar los dados la suma de los puntos es 4"</i>		
<i>La función de distribución (de probabilidad acumulada) en el caso de las variables discretas, a partir de un cierto valor vale 1.</i>		
<i>Si una variable aleatoria toma todos los valores a lo largo de un intervalo, entonces es una variable absolutamente continua.</i>		

**Fuente:** Elaboración propia

La primera consigna afirma que toda función de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  es una variable aleatoria. Nuevamente buscamos indagar en la definición de variable aleatoria que maneja el estudiante, en relación con las presentadas en el bloque anterior.

El segundo enunciado apunta a detectar posibles confusiones entre el valor que da la variable y la probabilidad. Si bien la variable aleatoria induce una probabilidad, no es cierto que a cada elemento de  $\Omega$  asigna su probabilidad, sino un número real.

La siguiente afirmación establece que el recorrido de una variable discreta es un conjunto finito. El propósito de este enunciado es evaluar si el estudiante cuenta con una visión limitada de lo que son las variables discretas. Estas no se reducen solo a recorridos finitos, existen también variables discretas cuyos recorridos son conjuntos infinitos numerables. Si el estudiante piensa algún contraejemplo, como una variable geométrica o variable de Poisson, o cualquier otra con recorrido el conjunto de los naturales percibirá la falsedad de esta información.

Luego se afirma que la función densidad es una función siempre continua. Se espera que el estudiante exponga que es falsa, la función distribución de las variables absolutamente continuas es continua, pero no necesariamente lo es la función densidad.

Para evaluar si el estudiante confunde lo que es una variable aleatoria con un suceso, se le plantea la consigna: dado un experimento aleatorio que consiste en tirar 2 dados, es correcto definir una variable aleatoria como “al tirar los dados la suma de los puntos es 4”.

El siguiente enunciado afirma que la función de distribución (de probabilidad acumulada) en el caso de las variables discretas, a partir de un cierto valor vale 1. Con este enunciado se busca complementar lo analizado en la pregunta anterior sobre variables discretas, el objetivo es indagar qué tan completo es el significado personal que los estudiantes dan a este concepto.

El último enunciado busca evaluar cuál es el criterio utilizado para determinar el tipo de variable aleatoria al que nos enfrentamos. Para determinar el tipo de variable es necesario tener en cuenta que importa la probabilidad y no solo los valores que toma la variable. Si los estudiantes indican que esta afirmación es verdadera, estarán asumiendo que una variable aleatoria que toma todos los valores a lo largo de un intervalo es una variable absolutamente continua. Como ya hemos reportado en el capítulo anterior, Kachapova (2012) plantea que hay una tendencia a definir una variable aleatoria continua como una variable con un conjunto de valores no numerable (a veces un intervalo o combinación de intervalos), lo cual es falso pues podría tratarse de una variable aleatoria mixta. Esto, además, conduce a pensar que toda variable aleatoria es discreta o continua.

**Tabla 2.** *Categorías del segundo bloque del cuestionario*

Categorías	Descripción
C2: Reconoce la necesidad de exigirle a esta función que la primagen de un boreliano sea un elemento de $\mathcal{A}$ .	Indican como falsa la primera proposición.
C4: Percibe el carácter funcional de la variable aleatoria, distingue la variable de la función de probabilidad.	Indican como falsas las proposiciones 2 y 5.
C5: Maneja una visión limitada de las variables discretas.	Indican como verdaderos los enunciados 3 y/o 6.
C6: Maneja una visión limitada de las variables absolutamente continuas.	Indican como verdaderas las proposiciones 4 y/o 7.

**Fuente:** Elaboración propia

En el tercer bloque del cuestionario se presentan experiencias aleatorias y se define una variable aleatoria. En cada una de ellas los estudiantes deben indicar si se trata de una variable discreta, absolutamente continua o ninguna de las dos.

**Figura 3.** Tercer bloque del cuestionario

<i>Indica en cada una de las siguientes situaciones si la variable aleatoria que se define es discreta, absolutamente continua o ninguna de las dos.</i>			
	<i>Discreta</i>	<i>Absolutamente continua</i>	<i>Ninguna de las dos</i>
<i>Una persona está esperando a ser atendida en un negocio, sea <math>X</math> la variable que mide el tiempo que transcurre hasta que la persona sea atendida.</i>			
<i>Un televisor puede fallar en cualquier momento y apagarse, pero tiene una duración útil media de 3 años. Una vez encendido tiene un sistema de descanso de modo que a las 6 horas se apaga automáticamente. Sea <math>X</math> el tiempo que dura encendido una vez que se prendió.</i>			
<i>Se tira una moneda, sea <math>X</math> la variable que cuenta la cantidad de caras que salen hasta obtener por primera vez números.</i>			
<i>Cierta enfermedad tiene una prevalencia del 10%, Sea <math>X</math> la variable que cuenta la cantidad de personas que tienen la enfermedad en una muestra tomada de 100 personas.</i>			
<i>En cierta esquina hay un semáforo, sea <math>X</math> la variable aleatoria que mide el tiempo que espera un auto desde que llega al semáforo y puede avanzar.</i>			

**Fuente:** Elaboración propia

Se busca indagar si los estudiantes reconocen variables que no son discretas ni absolutamente continuas (presentamos ejemplos de mixtas). Kachapova (2012) reporta una dificultad en reconocer variables mixtas. Esta dificultad se traduce en la creencia de que, si la variable aleatoria toma un intervalo de valores continuos, será continua.

**Tabla 3.** Categorías para el tercer bloque del cuestionario

Categorías	Descripción
C7: Reconoce las variables discretas con recorrido finito e infinito.	Indican que las variables planteadas en la 3 y la 4 son variables discretas.
C8: Reconoce una variable absolutamente continua.	Señalan como absolutamente continua la situación 1
C9: Reconoce las variables mixtas, esto es, variables que en el formulario indicamos como ni discretas ni absolutamente continuas.	Eligen la opción “ninguna de las dos” en la experiencia planteada en el punto 2 y 5.

**Fuente:** Elaboración propia

Se espera que se indiquen como discretas las opciones 3 y 4, como absolutamente continua la opción 1 y ninguna de las dos para los casos 2 y 5. En ambos casos si bien el rango de la variable es un intervalo incluido en el conjunto de los reales, las funciones de distribución tienen puntos de discontinuidad.

### ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO

En esta sección analizaremos las respuestas de los participantes en función de las categorías que definimos previamente.

#### Primer bloque

Con respecto al primer bloque de preguntas, dieciséis de los dieciocho estudiantes seleccionaron al menos una de las posibles definiciones que implica el conocimiento del carácter funcional de la variable aleatoria. Solo dos de los participantes seleccionaron la definición dada en Levin y Rubin (2004) como correcta, uno de los casos la señaló junto con la dada en James (1996), mientras que en el otro caso el estudiante seleccionó como correctas las cuatro definiciones propuestas. En el espacio para justificar por qué rechazó alguna, este estudiante escribió: *Considero que todas las definiciones allí plasmadas son correctas, cada una de ellas puntualiza aspectos diferentes de la variable aleatoria, o bien con diferentes expresiones.* Más allá de la amplitud del concepto, la definición dada en Levin y Rubin no tiene en cuenta el carácter funcional de la variable aleatoria, así como tampoco los requisitos respecto a las preimágenes de los borelianos o sus generadores.

En este primer bloque también se pretende indagar si los estudiantes reconocen la necesidad de exigir a una variable aleatoria algo más allá del carácter de función, ya sea vinculando el uso de las  $\sigma$ -álgebras o sus generadores. Once de los participantes seleccionaron como correctas las definiciones

dadas en James (1996), Cabaña (s/f) y al mismo tiempo no seleccionaron como correctas las dadas en Canavos (1998) ni en Levin y Rubin (2004).

Por último, nos interesaba profundizar sobre el reconocimiento de las definiciones dadas en James y en Cabaña. Para esto elaboramos la categoría C3: *Comprende la equivalencia entre las definiciones 2 y 3*. En este caso encontramos que seis de los dieciocho encuestados seleccionaron solo estas dos opciones. Reconociendo como correctas a ambas y también su equivalencia dada porque la familia de sucesos  $\{(-\infty, x]: x \in R\}$  es un generador de la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

Como complemento al análisis de las respuestas de este bloque, realizamos también un análisis individual y cruzado entre las definiciones presentadas, donde obtuvimos los siguientes resultados:

Seis estudiantes aceptan la definición dada en Canavos (1998) como correcta. La mayor parte de los argumentos de los que no la seleccionan como correcta están en la dirección de presentar problemas de medibilidad (preimagen de un boreliano que pertenezca a la  $\sigma$ -álgebra presente en el espacio muestral). Otros resaltan que no hace un manejo adecuado del concepto de función. Por último, algunos argumentan problemas en la terminología ya que la definición se refiere a *puntos sobre la recta*.

Por otra parte, diez estudiantes aceptan como correcta la definición presentada en James (1996). Aquellos que no la aceptan argumentan puntualmente que no contempla todos los borelianos y solo aquellos de la forma  $(-\infty, x]$  con  $x$  real.

La definición adaptada de las notas de Cabaña (s/f) es la más aceptada por los estudiantes, un total de quince la aceptan como correcta. De los tres estudiantes que no la seleccionan, solo uno lo justifica y su argumento indica que la rechaza porque menciona terminología demasiado técnica.

Por último, solo dos estudiantes aceptan la definición dada en Levin y Rubin (2004) como correcta. A modo de resumen, argumentan que omite decir que es función, que es medible y un estudiante menciona que no es correcta porque se enfoca en variable aleatoria discreta y continua.

De este bloque de preguntas podemos explotar algunos cruces, ya que un mismo estudiante podía seleccionar todas las definiciones que le parecieran correctas.

Nueve de los estudiantes que aceptaron la definición dada en James (1996) también aceptaron la de Cabaña (s/f). El único caso que solo aceptó la definición de James y no la de Cabaña, no argumentó su decisión, pero también seleccionó como correcta la dada en Levin, por lo que vislumbramos ciertas contradicciones.

Podemos concluir que en general, los estudiantes que reconocen a la definición dada en James (1996) como correcta, también reconocen a la Cabaña (s/f) como correcta. En este caso encontramos

cierta evidencia de que estos estudiantes no solo manejan el requisito de la preimagen de un boreliano en la  $\sigma$ -álgebra, sino que también reconocen que es suficiente exigirlo solo para un generador de la  $\sigma$ -álgebra de Borel, cosa que observamos en la categoría C3.

Un segundo cruce es que solo dos de los que aceptaron la definición dada en Canavos (1998) no aceptaron las dadas en James (1996) y Cabaña (s/f). Uno de los estudiantes no argumentó y el otro manifestó que su decisión se basaba en no recordar la terminología. En este sentido podemos inferir que los estudiantes que consideran la definición de Canavos como correcta, en general no manejan conceptualmente el uso de las  $\sigma$ -álgebras en los espacios de probabilidad correspondientes.

Finalmente podemos decir que siete de los dieciocho estudiantes no evidencian claridad respecto a la importancia del dominio de la probabilidad más allá del conjunto de partes, o bien no toman en cuenta la necesidad de poder calcular probabilidades mediante la variable aleatoria y con ello el requisito de trabajar siempre con sucesos en el dominio de la probabilidad.

### **Segundo bloque**

Con respecto al segundo bloque (que se integra con siete ítems), la primera pregunta se vincula con la categoría C2 de forma más explícita. Dieciséis de los dieciocho estudiantes responden negativamente, dejando evidencia que de algún modo tienen presente que se requiere alguna propiedad adicional para que una función de  $\Omega$  en  $R$  sea considerada variable aleatoria.

Es interesante observar que de los seis encuestados que seleccionaron como correcta la definición dada en Canavos (1998), cinco indicaron como falsa la afirmación de ese ítem, por lo que de aquellos que seleccionaron esta definición, en algún punto son conscientes de que es necesario exigir algo más.

Reafirmando lo que advertimos en la pregunta anterior, todos los que indicaron que la definición adaptada de Cabaña (s/f) era correcta (quince de dieciocho), indicaron que esta afirmación no lo es, dejando clara evidencia que una amplia mayoría de los participantes son conscientes de que no es suficiente con definir una variable aleatoria como una función de  $\Omega$  en  $R$ .

Cinco participantes de los dieciocho indicaron como falsos los ítems 2 y 5, es decir que distinguen la variable de la función de probabilidad. Nos llama la atención que ocho seleccionaron como falso el ítem 2 mientras que diez lo hacen para el 5, pero solo cinco son conjuntas. Estas respuestas aportan a la categoría C4: *Percibe el carácter funcional de la variable aleatoria, distingue la variable de la función de probabilidad.*

Con respecto a los enunciados de los ítems 3 y 6, hay catorce estudiantes que indican como verdadero alguno de ellos. Estos se discriminan en: siete que seleccionan ambas como verdaderas y

otros siete estudiantes que seleccionan como verdadero el ítem 6 (La función de distribución en el caso de las variables discretas, a partir de un cierto valor vale 1) pero falsa la proposición 3 (El recorrido de una variable discreta es un conjunto finito). Podemos conjeturar que surge un conflicto, pues reconocen que las variables aleatorias discretas pueden tener recorrido infinito, pero no asocian con esto que la función de distribución puede no alcanzar el valor 1 para ningún valor real. Estas respuestas nos informan sobre la categoría C5.

La categoría C6 es similar a la categoría C5 pero para el caso de las variables absolutamente continuas. En cuanto a los ítems 4 y 7, trece de los estudiantes seleccionaron algunos de los dos como verdaderos, y un estudiante no hizo ninguna opción. Con respecto a la proposición 4: *La función densidad es una función siempre continua*, ocho responden que es correcta, evidenciando un concepto erróneo de la mayoría de las densidades estudiadas, como ser el caso de la correspondiente a la distribución uniforme, exponencial, etc. Por otro lado, doce estudiantes indican como verdadero el ítem 7 (Si una variable aleatoria toma todos los valores a lo largo de un intervalo, entonces es una variable absolutamente continua), o no responden. Apreciamos un posible conflicto con la definición de variable aleatoria y su carácter funcional, separado de las correspondientes probabilidades, siendo que una variable aleatoria que tome valores a lo largo de un intervalo puede ser perfectamente mixta, singular, etc. También está el caso de las variables aleatorias singulares, pero no lo consideramos para este análisis.

Al igual que en el bloque anterior, aquí también podemos recorrer las respuestas con un análisis pregunta a pregunta. A continuación presentamos los resultados de forma resumida.

El primer ítem sobre el carácter funcional de las variables aleatorias ya fue analizado junto a la categoría C2. En el segundo ítem de este bloque, ocho estudiantes encontraron falsa esta afirmación (Una variable aleatoria es una función que a cada resultado de un experimento aleatorio le hace corresponder su probabilidad), y diez la consideraron correcta. Esto nos da evidencia del significado que algunos estudiantes otorgan a una variable aleatoria, confundiendo los valores que toma con la probabilidad de tomarlos.

Con respecto al tercer ítem (El recorrido de una variable discreta es un conjunto finito), siete encuestados indican que es correcto. Aquí interpretamos que puede haber un trabajo débil sobre casos donde se requiera otra modelización, como por ejemplo la variable aleatoria geométrica o la de Poisson, entre otras.

En el cuarto ítem (La función densidad es una función siempre continua) son ocho los estudiantes que la indican como verdadera. Esto es similar a lo que ocurre en el ítem anterior, aquí se

deja en evidencia un significado que inferimos proviene posiblemente del curso de Análisis 1, vinculado con la integración.

Es interesante observar que al cruzar los ítems 3 y 4, cinco encuestados dan por verdaderas ambas afirmaciones. Pareciera que manejan una visión limitada, tanto de las variables discretas como absolutamente continuas y esto sin duda limita su comprensión sobre el alcance que pueden tener las variables aleatorias para resolver problemas.

En el siguiente ítem se presenta una complejidad diferente: Dado un experimento aleatorio que consiste en tirar 2 dados, es correcto definir una variable aleatoria como “al tirar los dados la suma de los puntos es 4”. Ocho estudiantes seleccionaron este ítem como verdadero. Interpretamos que el problema está en confundir la función variable aleatoria con un suceso particular.

Para el penúltimo ítem, catorce de los encuestados seleccionaron como verdadero que para una variable aleatoria discreta, a partir de un cierto valor la función de distribución vale uno. Esto es llamativo con respecto al ítem 7, donde en el caso de las variables discretas, ocho estudiantes indicaron que tienen recorrido finito. En este ítem surge con mayor notoriedad la problemática y el significado asociado a las variables aleatorias discretas como aquellas que tienen recorrido finito, o por lo menos acotado (superiormente).

Por último, once encuestados indicaron que es verdadero que si una variable aleatoria toma todos los valores a lo largo de un intervalo, entonces es una variable aleatoria absolutamente continua. Esta dificultad fue reportada por Kachapova (2012). En este punto surge una problemática a profundizar, como ya comentamos. Por un lado, la posibilidad de ser una variable aleatoria mixta, pero por otro lado también podría ser discreta o singular.

### Tercer bloque

El tercer bloque de preguntas indaga sobre el reconocimiento de distintos tipos de variable aleatoria, particularmente proponemos ejemplos de variables aleatorias discretas, absolutamente continuas y mixtas.

Con respecto a los ítems 3 y 4, quince participantes seleccionan ambas como discretas. Dos estudiantes indican que la variable dada en el ítem 3 (*Se tira una moneda, sea  $X$  la variable que cuenta la cantidad de caras que salen hasta obtener por primera vez números*) no es discreta ni absolutamente continua. Uno indica a la variable dada en el ítem 4 como absolutamente continua: *Cierta enfermedad tiene una prevalencia del 10%, Sea  $X$  la variable que cuenta la cantidad de personas que tienen la enfermedad en una muestra tomada de 100 personas*. En general se nota un buen reconocimiento de estas variables aleatorias discretas.

También es de observar que dos estudiantes seleccionan la variable dada en el ítem 2 como discreta: *Un televisor puede fallar en cualquier momento y apagarse, pero tiene una duración útil media de 3 años. Una vez encendido tiene un sistema de descanso de modo que a las 6 horas se apaga automáticamente. Sea  $X$  el tiempo que dura encendido una vez que se prendió.* Estos casos son más llamativos aún dado que la variable a estudiar está relacionada explícitamente con el tiempo.

En cuanto al reconocimiento de las variables absolutamente continuas, dieciséis participantes seleccionan correctamente el ítem 1, mientras que dos indican esa variable aleatoria como ni discreta ni absolutamente continua. Aquí podemos apreciar que de forma general los estudiantes reconocen el tipo de variable absolutamente continua.

Antes de continuar el análisis, es importante observar que una gran mayoría de estudiantes confunden las variables aleatorias mixtas con las variables absolutamente continuas. Esto queda en evidencia, por ejemplo, en el ítem 2, donde quince de los participantes seleccionan a la variable como absolutamente continua, siendo un caso de mixta. Lo mismo ocurre en el ítem 5, nuevamente quince de los dieciocho seleccionan este caso como de una variable aleatoria absolutamente continua.

Es de observar que no son siempre los mismos lo que seleccionan a ambas variables como absolutamente continuas. En su mayoría sí (doce de los quince) pero incluso dos estudiantes seleccionan a la variable del ítem 2 como discreta.

Por último, en relación con el reconocimiento de situaciones en que se presenta una variable aleatoria mixta, como ya señalamos, ningún estudiante las señala.

Si estudiamos individualmente los ítems tenemos que solo un estudiante indica ‘ni discreta ni absolutamente continua’ a la variable del ítem 2. En tanto, tres lo hacen para la variable dada en el ítem 5: *En cierta esquina hay un semáforo, sea  $X$  la variable aleatoria que mide el tiempo que espera un auto desde que llega al semáforo y puede avanzar.*

A continuación, presentamos tres tablas donde se muestra la concordancia entre el significado institucional de referencia, expresado en términos de categorías presentadas en los apartados anteriores, y el significado personal declarado por cada estudiante de la muestra manifestado en sus respuestas al cuestionario de investigación.

**Tabla 4.** *Concordancia de significados*

Concordancia entre el significado institucional de referencia y el personal declarado										
Estudiante	<i>Categorías primer bloque del cuestionario</i>			<i>Categorías segundo bloque del cuestionario</i>				<i>Categorías tercer bloque del cuestionario</i>		
	C1	C2	C3	C2	C4	C5	C6	C7	C8	C9
E1	x	x		x		x		x	x	
E2	x	x	x	x		x			x	
E3	x	x		x	x		x	x	x	
E4	x			x	x	x	x	x	x	
E5				x		x	x		x	
E6	x	x				x	x	x	x	
E7	x			x		x	x	x	x	
E8	x	x		x			x	x	x	
E9	x			x	x	x	x	x	x	
E10	x	x	x			x	x	x	x	
E11	x	x		x			x	x	x	
E12	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
E13				x		x	x	x	x	
E14	x	x	x	x				x	x	
E15	x	x	x	x		x				
E16	x	x	x	x		x	x	x		
E17	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
E18		x	x	x		x	x	x	x	

**Fuente:** Elaboración propia

### CONCLUSIONES

Nos hemos propuesto indagar qué significados asignan al concepto de variable aleatoria, futuros profesores de matemática que ya han cursado la asignatura Probabilidad y Estadística de la

carrera. Con ese propósito realizamos una revisión bibliográfica de investigaciones previas sobre la temática, que nos advirtieron de posibles dificultades en la comprensión del concepto. Esta revisión de antecedentes nos llevó a la elaboración de un cuestionario que indaga sobre algunos aspectos vinculados al concepto de variable aleatoria.

Uno de los primeros aspectos a evaluar fue si los estudiantes reconocen la necesidad de imponerle a la variable aleatoria la condición de que la preimagen de un boreliano debe pertenecer a la  $\sigma$ -álgebra. Al igual que las investigaciones reportadas, notamos que una proporción importante de los estudiantes manifiestan la creencia de que cualquier función de  $\Omega$  en  $R$  sería una variable aleatoria. Por este motivo creemos que al momento de la enseñanza del concepto se debe hacer hincapié en esta condición y sobre todo en su necesidad, para luego poder definir de forma coherente y consistente los conceptos asociados como el de probabilidad inducida y función de distribución. Consideramos también que sería apropiado mostrar algún no ejemplo de una función de  $\Omega$  en  $R$  que no sea variable aleatoria, al menos en contextos teóricos.

Otro aspecto que quedó evidenciado al momento de analizar las respuestas de los estudiantes es la dificultad de reconocer variables que no sean discretas ni absolutamente continuas. Las respuestas de la mayoría de los estudiantes parecen mostrar la creencia de que las variables aleatorias pueden clasificarse en estas dos categorías de forma dicotómica, cuando en realidad existe una diversidad de ejemplos de lo contrario: mixtas, singulares, etc. De esta manera la gran mayoría de los estudiantes que contestaron el cuestionario no lograron reconocer las variables mixtas. Podemos concluir que más allá de que cuando impartimos la enseñanza aclaramos que no toda variable aleatoria se clasifica como discreta o absolutamente continua, luego la idea que queda es esta. Sugerimos entonces que, a la hora de la enseñanza de los tipos de variables aleatorias, se analicen en profundidad las definiciones de variable discreta y de variable absolutamente continua, reflexionando sobre el hecho de que sus definiciones implican que hay otros tipos de variables aleatorias. En segundo lugar, sugerimos incluir más ejemplos y problemas con variables mixtas, que surgen naturalmente en contextos de transformaciones.

Finalmente buscábamos tener una primera aproximación al significado personal que los estudiantes atribuyen a las variables discretas y a las absolutamente continuas. En ambos casos parecería que muchos de los participantes tienen una visión limitada. En el caso de las variables discretas algunas respuestas parecen mostrar que los estudiantes las reducen a las que tienen recorrido finito. Sería necesario, en próximas etapas de esta investigación, indagar sobre ello, analizar si reconocen como discretas aquellas variables que tienen un recorrido infinito, como por ejemplo la

geométrica o la Poisson. En cuanto a las variables absolutamente continuas, los futuros profesores parecen no manejar una definición matemáticamente adecuada. Esto queda al descubierto en algunas afirmaciones sobre que la función densidad es siempre continua o que basta con tener un recorrido continuo. Por otro lado, el hecho de que incluyan variables mixtas en su definición de variable absolutamente continua, abre la interrogante de cuál es la definición que manejan de variable absolutamente continua, qué significado les atribuyen a estas. Estas limitaciones, así como algunas contradicciones identificadas en ciertas respuestas, abren la posibilidad de continuar este estudio por medio de entrevistas a algunos de los participantes. Esto nos permitirá profundizar en la identificación de los significados personales que otorgan a los conceptos involucrados, en relación con los significados esperados. Así obtendremos más insumos para el futuro diseño de una secuencia de enseñanza sobre el concepto, que tenga el objetivo de enriquecer los significados personales de los futuros profesores y la vinculación con su futuro desempeño profesional.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade, L., Fernández, F., y Sarmiento, B. (2013). La búsqueda del espacio muestral “original”: una necesidad para la enseñanza. En A. Salcedo, *Educación estadística en América Latina. Tendencias y perspectivas* (pp. 81 – 98). Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela.
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Beltrán-Pellicer, P. (2016). *Evaluación de la Idoneidad Didáctica de una experiencia de enseñanza de azar y probabilidad en tercer curso de ESO*. Trabajo fin de máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Cabaña, E. (s/f). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Universidad de la República, Departamento de Métodos Cuantitativos de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración y Centro de Matemática de la Facultad de Ciencias.
- Canavos, G. (1998). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. Mc Graw-Hill.
- De Olivera, F., Olesker, L. y Pagés, D. (2020). *Diseño de recursos educativos abiertos para la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística en la formación de profesores de matemática*. Consejo de Formación en Educación. Montevideo: Mastergraf SRL.
- Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones* (Vol. 1) (Trad. S. Morales). México: Limusa. (Original en inglés, 1968).
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

- Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, 8(1), 46—74.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastic ideas. *Educational Studies of Mathematics*, 6, 187 - 205. Dordrecht, D. Reydel Publishing Company.
- James, B. (1996). *Probabilidad: Um curso em nivel intermediario*. Río de Janeiro: IMPA.
- Kachapova, F. (2012). A general approach to teaching random variables. *Mathematics teaching-research journal online*, 5 (2), 1 - 16.
- Lázaro, W. (2015). Panorama de la formación de futuros licenciados en matemáticas en relación con estadística y su didáctica. (Tesis de grado no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Bogotá: Colombia.
- Levin, R. y Rubin, D. (2004). *Estadística para administración y economía*. Pearson Educación.
- Novales, A. (1997). *Estadística y econometría*. McGraw-Hill.
- Ortiz, J.J. (2002). *La Probabilidad en los Libros de Texto [Probability in Textbooks]*; Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada: Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias.
- Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 589 - 598). México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Rivas, H. (2014). Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada, España.
- Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de maestría (no publicada). Instituto Politécnico Nacional de México.
- Ruiz, B., Albert, J. y Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables. En A. Rossman y B. Chance (Eds), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía). International Association of Statistical Education.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4—14.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Wasserman, N. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *Journal of Mathematical Behavior*, 49, 116-128. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.003>
- Zazkis, R., y Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 263—281.

## **THE CONCEPTUALISATION OF THE RANDOM VARIABLE IN MATHEMATICS TEACHER EDUCATION IN URUGUAY**

### **ABSTRACT**

The aim of this research is to determine the meanings that future mathematics teachers in Uruguay construct about the concept of random variables. A qualitative methodology was used, consisting of a questionnaire. It was designed to be proposed to prospective mathematics teachers who had already completed the course Probability and Statistics, and was administered to eighteen volunteer students. The analysis of the responses to the questionnaire is reported, and based on this analysis, some ideas for the future design of a teaching sequence, in the format of an Open Educational Resource, are set out. As results of the study, it was found that a large proportion of participants believed that any function of  $\Omega$  in the set of reals is a random variable. In addition, limited personal meanings of discrete and absolutely continuous random variables were found.

Keywords: Mathematics teacher education; Random variable; Distribution function; Types of random variables; Personal meanings.

## **A CONCEPÇÃO DA VARIÁVEL ALEATÓRIA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES NO URUGUAI**

### **RESUMO**

O objectivo desta investigação é determinar os significados que os futuros professores de matemática no Uruguai constroem sobre o conceito de variáveis aleatórias. Foi utilizada uma metodologia qualitativa, constituída por um questionário. O questionário foi proposto aos estudantes do ensino da matemática que já tinham tomado a disciplina Probabilidade e Estatística, e foi administrado a dezoito estudantes voluntários. A análise das respostas ao questionário é relatada, e com base nesta análise, são apresentadas algumas ideias para a concepção futura de uma sequência de ensino, no formato de um Recurso Educativo Aberto. Como resultados do estudo, verificou-se que uma grande proporção dos participantes acreditava que qualquer função do  $\Omega$  no conjunto de reais é uma variável aleatória. Além disso, foram encontrados significados pessoais limitados de variáveis aleatórias discretas e absolutamente contínuas.

Palavras-chave (o Palabras clave): Formação de professores de Matemática; Variável aleatória; Função de distribuição; Tipos de variáveis aleatórias; Significados pessoais.

FEDERICO DE OLIVERA LAMAS  
*Consejo de Formación en Educación, Atlántida, Uruguay*  
[fdeolivera@cerpsur.uy](mailto:fdeolivera@cerpsur.uy)  
<https://orcid.org/0000-0002-4891-0236>

Licenciado en Estadística (Universidad de la República), magíster en Ingeniería Matemática (Universidad de la República), doctor en Matemática (Universidad de la República). Se ha desempeñado como profesor de Matemática en Centros de Educación Técnico Profesional y como profesor efectivo en el Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación. También ha sido profesor de Matemática en la Facultad de Ciencias Económicas y Administración de la Universidad de la República y en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Montevideo. Ha sido asesor en Estadística de la Inspección General del Ministerio de Trabajo y Seguridad Social.

LUCLANA OLESKER PÉREZ  
*Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay*  
[luciano05@gmail.com](mailto:luciano05@gmail.com)  
<https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0002-6875-9043>

Profesora de Matemática (Instituto de Profesores Artigas), magíster en Enseñanza de las Ciencias Experimentales con mención en Matemática (Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina). Se ha desempeñado como profesora de Matemática en la enseñanza media en liceos y escuelas públicas, como profesora adscriptora, como profesora efectiva de Probabilidad y Estadística, y como profesora interina de Didáctica de la Matemática en el Consejo de Formación en Educación.

DANIELA PAGÉS ROSTÁN  
*Universidad de la República, Rocha, Uruguay*  
[danielapages@gmail.com](mailto:danielapages@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0003-2009-4940>

Profesora de Matemática (Instituto de Profesores Artigas), doctora en Ciencias en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como profesora de Matemática en la enseñanza media en liceos públicos, como profesora efectiva de Matemática en la formación magisterial y como profesora de Didáctica de la Matemática en el Consejo de Formación en Educación. Integra el Sistema Nacional de Investigadores (Nivel Iniciación). Actualmente se desempeña como profesora de Cálculo en la Universidad de la República (Centro Regional del Este).



# O RACIOCÍNIO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE AMOSTRAGEM E ARGUMENTOS PERSUASIVOS NAS REDES SOCIAIS

LEANDRO DE OLIVEIRA SOUZA  
LORRAINE SILVA GONÇALVES  
JOÃO VITOR PIRES VIEIRA

## RESUMO

Dados amostrais utilizados nos meios de comunicação, tanto nas mídias tradicionais (jornais impressos, canais de televisão, etc.) quanto nas redes sociais, são passíveis de manipulações que sustentam os mais diversos argumentos. Em razão da dificuldade da sociedade, de forma geral, em raciocinar, interpretar e argumentar sobre dados quantitativos, esta pesquisa buscou analisar como professores de matemática raciocinam sobre a amostragem exposta em uma mensagem que circulou em grupos de WhatsApp durante as eleições municipais da cidade de São Paulo no ano de 2020. Como caminho metodológico optou-se pela entrevista coletiva organizada no formato de grupos focais. A partir da interação dos participantes, ao analisar o conteúdo da mensagem, emergiram nos seus discursos questionamentos sobre a variabilidade na apuração dos votos. Os discursos fundamentaram-se num suposto uso de dados estatísticos falsos para manipular a opinião pública; a aparente estabilidade na contagem dos votos ao longo da apuração foi o principal argumento que alimentou a demanda política do autor da mensagem. Os resultados evidenciam a necessidade de um olhar cuidadoso sobre as informações falsas veiculadas nas redes sociais e nos outros ambientes que fazem uso da internet com implicações para a Educação Estatística.

Palavras chave: Pensamento Estatístico; Variabilidade; Educação Estatística; *Fake news*; Desinformação.

## INTRODUÇÃO

Na sociedade contemporânea as pessoas estão, a todo momento, expostas a informações divulgadas nas mídias digitais (ex. redes sociais, grupos de trocas de mensagens, canais de plataformas de vídeos, *websites*, entre outros). Essas informações podem ser definidas, segundo Prado (2015, p. 28), “como um conjunto de artefatos tecnológicos que mediam [*sic*] as relações sociais por meio da conectividade”.

Um grande problema da contemporaneidade está relacionado com a distribuição de notícias falsas na internet e nas redes sociais, principalmente aquelas associadas às demandas do contexto social com implicações no contexto político. Nesse sentido, a educação, de forma holística, tem o importante Souza, L., Silva, L. y Pires, J. (2022). O raciocínio de professores de matemática sobre amostragem e argumentos persuasivos nas redes sociais. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Ed.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 349-366). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

papel de auxiliar os indivíduos a analisarem notícias advindas das redes sociais. O reflexo do problema pode ser observado no documento que normatiza o currículo brasileiro, a *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) (Brasil, 2018). Tendo em vista o fenômeno contemporâneo da desinformação na internet, esse documento recomenda que os argumentos utilizados em notícias, em narrativas e em mensagens falsas, estejam nas discussões no âmbito escolar. Estudantes devem ser preparados para ler, compreender, discutir e reconhecer quais mensagens são confiáveis ou não, combatendo o aumento de notícias falsas. Com relação a Matemática e a Estatística, o referido documento aponta que o raciocínio lógico e a capacidade de desenvolver argumentos convincentes são algumas das competências específicas a serem ampliadas na área.

A Educação Estatística, segundo Campos et al. (2011, p. 475), tem fundamental importância no que se refere à compreensão das informações veiculadas nos meios de comunicação. Isso porque na Educação Estatística são levadas em consideração algumas habilidades, como o pensamento e o raciocínio estatístico, que visam ao aperfeiçoamento de uma “postura investigativa, reflexiva e crítica do aluno em uma sociedade globalizada, marcada pelo acúmulo de informações e pela necessidade de tomada de decisões em situações de incerteza”.

Argumentar e contra-argumentar sobre informações falsas, na concepção de Souza e Araújo (2022), em muitos casos exige compreender as estatísticas: ser capaz de ler, coletar, organizar dados, produzir gráficos e tabelas e entender a ideia de usar amostras para fazer previsões. Outro ponto importante é entender que: produtores de estatística e comunicadores, propositalmente, podem apresentar dados com o objetivo de causar uma certa impressão nas pessoas; uma olhada rápida na informação veiculada não é suficiente para tirar conclusões; a maneira de coletar dados também pode ser organizada de um jeito tendencioso ou com vieses.

Com ênfase na problemática das notícias falsas, que se embasam em argumentos estatísticos, realizamos uma pesquisa apoiada em entrevistas em grupos focais. Queríamos compreender como professores de matemática raciocinam sobre amostragem. Os dados da investigação foram coletados por meio de videogravação quando os participantes discutiam sobre uma informação que circulou em um aplicativo de mensagens instantâneas durante a eleição municipal da cidade de São Paulo no ano de 2020. A mensagem colocava em dúvida o processo eleitoral brasileiro organizado por meio de urnas eletrônicas. A alegação propunha que o sistema atual é corrompível. O conteúdo da mensagem, considerado falso, foi objeto de análise do *site E-farsas* (Lopes, 2020), onde foi coletada por nós. Os participantes da pesquisa foram professores de Matemática da educação básica.

Os resultados aqui relatados se deram a partir da análise da comunicação e da interação dos participantes em um dos encontros. Para análise reunimos informações sobre as discussões que seguiram no grupo e foram sustentadas pelo uso de dados estatísticos e por uma aparente estabilidade na variabilidade das amostras ao longo da apuração dos votos. A baixa variabilidade durante a apuração foi usada para reforçar os argumentos da pessoa que produziu o conteúdo falso.

### **A COMUNICAÇÃO NA INTERNET E AS NOTÍCIAS FALSAS**

A propagação de informações tem se expandido nos meios de comunicação contemporâneos. As comunicações e a troca de informações deixaram de ser veiculadas apenas pelos meios tradicionais, como televisão, telefones, jornais e rádios, e passaram a ser transmitidas por aplicativos vinculados à internet, como as redes sociais e aqueles de troca de mensagens. Com o avanço da internet para os *smartphones*, a produção e o consumo de informações passaram a ter seus custos reduzidos. E, ainda, associado a isso, houve um aumento potencial do alcance e da velocidade na propagação de mensagens e de conteúdos. Essas ferramentas também tornaram possível que os usuários busquem, interajam, produzam e amplifiquem os conteúdos que desejam. Um problema emergente nesse cenário tem relação com a divulgação de informações falsas, que atraem inúmeras pessoas e podem ser recontadas, recriadas e compartilhadas milhares de vezes (Braga, 2018).

De acordo com uma pesquisa realizada por Baptista et al. (2019), um grupo significativo de entrevistados afirmou que o WhatsApp possui relevância ou alta relevância para o acompanhamento de notícias relacionadas à política. Portanto, as pesquisadoras Baptista et al. (2019) chegaram à seguinte conclusão:

Pesquisas sobre seleção de notícias em redes sociais sugerem que a influência social é mais forte do que as preferências políticas para determinar o acesso a notícias compartilhadas por outras pessoas (ANSPACH, 2017). Ou seja, a confiança em amigos ou familiares, de quem o usuário recebe informações ou com quem conversa sobre política no WhatsApp, pode afetar a percepção de credibilidade das notícias. (p. 46)

A pesquisa de Baptista et al. (2019) também buscou observar os hábitos de consumo em outras mídias sociais, como o Facebook. As autoras entenderam que os indivíduos consideram o WhatsApp mais confiável que o Facebook, o que determina a credibilidade das notícias. Nesse sentido, nossa pesquisa partiu do pressuposto de que notícias que utilizam argumentos matemáticos, advindas do WhatsApp, podem servir como ferramenta para formar e manipular opiniões, o que traz novos desafios para as escolas, para os processos educacionais e para os professores.

Esses desafios podem ser vistos nas políticas públicas para educação. Por exemplo, a BNCC (Brasil, 2018) propõe orientações referentes às notícias falsas, às quais chama de *fake news*. Na seção

relativa ao ensino da Matemática, a temática não é mencionada diretamente, porém o documento sugere que os professores desenvolvam com os alunos competências matemáticas ligadas ao raciocínio, à representação, à comunicação e à argumentação, junto com a potencialização do pensamento computacional, com foco em uma formação colaborativa, ética e democrática.

Tratando da Educação Estatística, a BNCC (Brasil, 2018) propõe que os estudantes ao final do ciclo escolar se tornem capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação, visto que os conteúdos podem ser publicados com erros relacionados a generalizações equivocadas em resultados de pesquisa ou com uso inadequado da amostragem e na forma de representação dos dados. O problema vai muito além disso, pois informações podem ser propositalmente manipuladas para finalidades diversas. Tal análise crítica pode ser vista em parte como o raciocínio sobre a amostragem, que busca compreender como se dá a relação entre a amostra e a população, e em parte como o sentido dado para as informações e o modo como os indivíduos refletem sobre concepções estatísticas que compõem o raciocínio estatístico (Campos et al., 2011). O raciocínio estatístico, para Garfield (2002), é definido como a maneira como as pessoas raciocinam com ideias estatísticas e dão sentido às informações no conjunto e no contexto da situação analisada.

Para uma melhor compreensão a respeito do que é o raciocínio sobre a amostragem, além da ideia de raciocínio estatístico apresentada acima, se torna necessário, apresentarmos quais as perspectivas de amostra e amostragem que estão sendo tomadas. No mesmo sentido de Luna (2019), entendemos a amostra, como sendo um subconjunto qualquer de uma população, onde esta pode ser vista, como um conjunto de indivíduos e/ou objetos. A finalidade da amostra é estender os resultados obtidos, de tal forma, que esses dados possam representar o todo, sem que seja necessário analisar todos os elementos da população. Assim sendo, a amostragem pode ser vista, como um procedimento amostral, que é definida como um “processo para extração de amostras, que representem a população” (p.3).

O objetivo desta pesquisa recai sobre a análise do raciocínio estatístico empregado por professores de matemática no momento em que eles argumentavam sobre uma mensagem que circulou em grupos de WhatsApp. Na próxima seção descreveremos o contexto da investigação e os procedimentos que adotamos para atingir nossas metas.

## **MATERIAL E MÉTODOS**

Descrevemos aqui o recorte de uma pesquisa de pós-doutorado. Este texto se debruça e mais especificamente sobre a seguinte questão: como professores de Matemática raciocinam sobre amostragem, a partir de uma mensagem que circulou em grupos de WhatsApp durante a eleição

municipal da cidade de São Paulo no ano de 2020? A mensagem em questão tinha por intenção levantar uma discussão sobre a possibilidade de fraude nas eleições municipais, em que a solução para o problema seria a retomada do voto impresso, segundo o *site E-farsas*. O voto impresso foi extinto no Brasil no ano de 1996, desde lá têm sido utilizadas urnas eletrônicas desconectadas da internet.

Para a realização deste estudo foram enviados convites para professores de matemática que lecionavam na Educação Básica, doze dos quais se voluntariaram para participar; esses voluntários atuavam em diferentes redes de ensino da educação básica espalhadas por vários estados do Brasil. Como as experiências dos professores eram das mais diversas, o grupo selecionado reunia certas características heterogêneas que enriqueceram as discussões. Havia, no grupo, desde professores que estavam iniciando a carreira na docência, até aqueles com mais de 20 anos de experiência; professores atuantes em escolas públicas e/ou particulares consideradas por eles de excelência, enquanto outros atuavam em zonas periféricas com características mais complexas; alguns de cidades do interior, onde a população era menor do que quatro mil habitantes, enquanto outros atuavam em grandes capitais.

A estrutura desse grupo manteve um equilíbrio entre a uniformidade e a diversidade, de forma análoga à proposta de Gomes (2005), que vai ao encontro da definição de trabalhos de pesquisa com grupos focais. A concepção metodológica de Trad (2009) define grupos focais como uma técnica de pesquisa qualitativa na qual se busca recolher informações sobre as percepções, as crenças e as atitudes dos sujeitos por meio de interações em grupos. Portanto, o grupo focal foi conduzido de uma forma em que inicialmente exibíamos uma comunicação previamente coletada na internet e depois aplicávamos entrevistas semiestruturadas junto ao grupo para atingir nossos objetivos. A análise recaía na discussão e na interação entre os sujeitos, com o principal objetivo de reunir as informações vindas dos professores de matemática que levantaram argumentos relacionados à amostragem.

Antes de iniciarmos a pesquisa com o grupo focal, os professores foram entrevistados, a princípio, individualmente, em encontros remotos por meio da plataforma Microsoft Teams. Cada entrevista teve duração de aproximadamente 40 minutos, foram videogravadas e posteriormente transcritas. Os objetivos principais dessas entrevistas foram: traçar um perfil profissional dos participantes; compreender o contexto de atuação; levantar as concepções sobre o que eles consideravam boas abordagens de ensino; levantar o que conheciam sobre a temática *fake news*; sondar as abordagens pedagógicas empregadas em suas aulas; e conhecer suas opiniões sobre a introdução de temas políticos nas aulas de Matemática. Além desses objetivos, a entrevista individual buscou ambientar os professores no contexto da pesquisa e estabelecer uma relação de confiança com o pesquisador.

Depois das entrevistas individuais, três encontros dos grupos focais, de aproximadamente duas horas, foram realizados por meio da plataforma Microsoft Teams que, na versão disponibilizada, permitia: criar salas virtuais, silenciar o microfone, levantar a mão por meio de um *emoticon* (forma de comunicação paralinguística), criar certa ordem entre as falas, gravar e transcrever os áudios dos encontros.

A princípio os encontros haviam sido planejados para ocorrer de forma presencial. Contudo, a necessidade do distanciamento social em decorrência da pandemia causada pelo Coronavírus nos fez mudar a organização inicialmente planejada. Como os encontros foram realizados *on-line*, isso garantiu diversidade nacional, o que potencializou as discussões na busca de conclusões por consensos e dissensos (Abreu et al., 2009).

Os encontros foram conduzidos por um mediador responsável, acompanhado de uma mediadora substituta que atuava no caso de problemas de conexão na internet do primeiro mediador. Como apoio para estimular a discussão dos participantes, perguntas foram estruturadas previamente. Para cumprir nosso objetivo, neste texto nos concentramos nos dados coletados durante as interações entre os participantes no segundo encontro. Os encontros foram videogravados e os diálogos transcritos de forma similar às entrevistas individuais.

Além dos dois mediadores, outros quatro pesquisadores iniciantes participaram como observadores, fazendo também anotações em diário de campo. As notas foram objeto de análise em encontros posteriores da equipe (mediadores e observadores). Categorias emergentes das discussões foram levantadas e exploradas pelo grupo de pesquisa a partir dessas anotações e, posteriormente, por uma análise das videograções. Uma dessas categorias é a discutida neste texto. Nomes fictícios foram usados para preservar a identidade dos participantes. Além disso, o projeto de pesquisa foi submetido ao comitê de ética em pesquisa da Universidade Federal de Minas Gerais. Um termo de consentimento livre esclarecido foi disponibilizado e assinado por todos os participantes da pesquisa.

### **O CONTEXTO QUE SUBSIDIU A PESQUISA**

O contexto de discussão foi elaborado em torno de uma mensagem disseminada por meio do aplicativo WhatsApp (Figura 1). Ao analisar a imagem, é possível perceber argumentos favoráveis ao voto impresso, fundamentados na variabilidade das amostras estatísticas. O autor da mensagem embasa-se na amostragem para afirmar que a proporcionalidade dos votos contabilizados, em diferentes momentos da apuração, teria uma variação insignificante. Desse modo ele procura diminuir a credibilidade do processo eleitoral. Ao final, a mensagem enfatiza que “as porcentagens são

EXATAMENTE as mesmas”, porém depois o autor do conteúdo indaga se isso seria possível, levantando dúvidas.

**Figura 1.** Mensagem analisada pelos grupos focais



**Fonte:** imagem adaptada pelos autores

Uma adaptação da imagem original foi feita com objetivo de evitar uma partidarização da discussão. Na imagem original, no título do remetente constava o nome do presidente do Brasil à época da pesquisa. Os dados divulgados no conteúdo da mensagem estão de acordo com as porcentagens que foram registradas no portal *InfoMoney* (Mortari et al., 2020), durante a apuração eleitoral dos quatro primeiros candidatos, no primeiro turno da eleição da cidade de São Paulo (SP), no ano de 2020. Portanto, as porcentagens não estavam incorretas e, embora haja a ocorrência de um padrão ao longo da apuração por amostragem, isso não implica que os dados tivessem sido manipulados. Houve, na época, uma nota oficial de esclarecimento emitida pelo Tribunal Superior

Eleitoral (TSE), mediante a repercussão de mensagens parecidas com essa, que supunham uma possível fraude nas eleições municipais de 2020.

É importante lembrar que toda urna eletrônica emite um Boletim de Urna (BU) com os votos coletados ao longo do dia de votação. Assim, eventual tentativa de alteração de banco de dados seria rapidamente identificada com uma simples conferência do Boletim de Urna, que é impresso e entregue aos representantes de partidos políticos presentes nos locais de votação e disponibilizados posteriormente na internet. (Tribunal Superior Eleitoral, 2020)

Além disso, após o final da votação da eleição de 2020, cada urna emitiu cinco vias do BU, informando todos os votos, além de informações referentes à seção eleitoral. Os dados foram também codificados em mídias de memória, transportados até o Tribunal Regional Eleitoral (TRE), onde foram abertos, autenticados e depois transmitidos ao Tribunal Superior Eleitoral, sem a utilização de internet (Nascimento, 2020). O Tribunal Regional Eleitoral-MG (2018) informa que toda apuração é iniciada assim que todas as seções são fechadas. Cada seção é fechada automaticamente, assim que os boletins são transmitidos, o que permite os resultados parciais.

No Brasil a eleição é dividida em dois turnos, os dois candidatos mais votados no primeiro turno concorrem no segundo turno, porém, no caso de algum candidato obter mais de 50% dos votos no primeiro turno, ele vencerá diretamente a eleição. Normalmente o parâmetro populacional (número de votantes) é estimado, porém no caso dos dados presentes nessa mensagem, como vieram da apuração dos votos das eleições, é possível observar que, com 100% das urnas apuradas foram contabilizados 6 354 100 votos válidos, segundo o portal *G1* (Lima et al., 2020), destes 1 015 314 são de votos brancos e nulos, que não são considerados nas porcentagens dos votos de cada candidato.

Dessa forma, podemos observar que a apuração dos votos, ou seja, a amostragem, pode ser classificada como uma coleta aleatória simples das amostras apuradas, esta que segundo, Mattar (2012, p. 138) “caracteriza-se pelo fato de cada elemento da população ter probabilidade conhecida, diferente de zero e idêntica à dos outros elementos, de ser selecionado para fazer parte da amostra”. Visto que, os votos contabilizados advindos de cada BU, chegam de forma imprevisível ao local de apuração e portanto de forma aleatória.

De acordo com Pereira (2018) a distribuição amostral é obtida pelos valores das estatísticas (média, desvio padrão, entre outros) obtidos nas amostras retiradas da população. Esses valores das estatísticas são dados a partir de todas as amostras possíveis de um certo tamanho que podem ser retiradas de uma população dada, para cada amostra.

No caso da mensagem, mesmo sem trazer dados falsos, ela se apoia na dificuldade das pessoas em raciocinar sobre a amostragem e sobre a lei dos grandes números. Esta lei é um teorema da teoria

da probabilidade e afirma que a regularidade dos dados amostrais, quando observados eventos aleatórios em uma grande quantidade de casos similares, tende a se estabilizar cada vez mais, à medida que aumenta a quantidade de casos observados, cuja proporção se aproxima do valor previsto por meio da probabilidade na visão clássica, probabilidade que é determinada a priori (Sampaio, 2007). Ao raciocinar sobre a amostragem e a lei dos grandes números, estamos olhando para o raciocínio estatístico. A pesquisa, realizada por Garfield (2002), indica que o raciocínio impróprio sobre ideias estatísticas é generalizado, além de persistente e presente de forma similar em todas as idades, até mesmo entre alguns pesquisadores experientes. No caso, notamos que ele ocorre com professores de matemática, o que descreveremos adiante.

Existe na mensagem uma aparente intenção de convencer e manipular a opinião pública. Nesta pesquisa, usamos o termo *fake news* para nos referir a uma narrativa falaciosa, exposta com conteúdo enganoso, que busca manipular a opinião pública. Consideramos o conteúdo da mensagem *fake news* porque “[...] a presença de fatos verídicos não desqualifica uma mensagem como fake news, o seu conteúdo pode ser totalmente fabricado, ou também ser apenas parcialmente falso, mas emparelhado com informações corretas” (Egelhofer & Lecheler, 2019, p. 99, tradução nossa).

Diante da problemática do fenômeno da desinformação foram criadas agências de checagem de fatos no Brasil e no mundo, que têm por finalidade a verificação de informações (Graves & Cherubini, 2016); um exemplo é o *site* de onde esta mensagem foi coletada. Ali são publicadas verificações, comprovações e confirmações de dados e argumentos que são utilizadas em notícias e mensagens veiculadas nos ambientes de comunicação contemporâneos.

Com vistas ao nosso objetivo, na próxima seção, realizaremos uma discussão relacionada às concepções que os professores de matemática apresentaram acerca de amostragem a partir da mensagem supracitada.

### **RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

É muito comum que estudantes terminem o Ensino Médio sem compreender e sem ter nenhuma experiência sobre o comportamento amostral (Pfannkuch et al., 2015). Isso ocorre porque nas aulas de estatística são raros os casos em que as atividades pedagógicas são conduzidas para coletar amostras e raciocinar sobre o processo de amostragem. Neste estudo percebemos que muitos professores de matemática possuem a mesma dificuldade, o que não é novidade. A novidade que apresentamos neste texto tem relação com a maneira como os conteúdos são construídos para manipular a opinião pública, manipulação à qual não escapam professores de matemática, que acabam empregando o mesmo raciocínio da maior parte da população.

Pesquisas anteriores (Pratt & Ainley, 2008) relatam que problemas com o raciocínio sobre amostragem são evidenciados quando alunos e professores tentam fazer inferências ou afirmações em situações de comparação. Quando amostras são postas em jogo, ambos, alunos e professores, não sabem se estão raciocinando sobre os dados e referindo-se a toda uma população, ou se o raciocínio é sobre uma população subjacente da qual os dados eram uma amostra. É necessário ter uma compreensão profunda sobre acaso, probabilidade e variabilidade amostral para raciocinar neste cenário.

Ao apresentarmos a imagem do WhatsApp (Figura 1) ao grupo, a professora Janaina se posicionou da seguinte forma: “... a gente batendo o olho na mensagem vê que é muito forçada. Está muito errado, começa com menos de 1% com a mesma porcentagem e vai até 99% praticamente com a mesma porcentagem. Forçou demais, muito forçado, muito fake news.” Em seguida a professora continua:

Quero dizer que a pessoa não se teve nem ao trabalho de mudar esse percentual, permaneceu com o mesmo percentual. O que ela queria provar, né!? No final ela forçou uma justificativa, mas não deu o argumento matemático correto para pautar a justificativa que apresentou no final, então ficou muito forçado. Então, para a gente que entende um pouco de matemática, a gente salta os olhos né!? Aqueles dados ali, muito incorretos. (Professora Janaína, videogravação em 01/04/2021)

No argumento da professora Janaína é possível notar sua expectativa de que, ao longo da apuração, houvesse uma variação maior na comparação entre as porcentagens dos votos apurados de cada um dos candidatos. O contraditório é que o autor da mensagem utilizou o mesmo argumento para contestar a idoneidade das urnas. A diferença é que a professora acredita que ele manipulou os números, o que de fato não ocorreu. A estabilidade amostral foi tomada tanto pelo autor da mensagem quanto pela professora como algo incomum. Outros professores acompanharam o raciocínio da professora Janaína e atribuíram ao autor do conteúdo a manipulação das informações.

Eu acho que os dados estão bem forçados. Quando a gente olha o menor percentual de urnas apuradas, o percentual de cada candidato, ele manteve-se intacto com todas as urnas sendo apuradas, não mudou praticamente nada, mudou pouquíssima coisa e eu acho que no final ainda colocou o “voto impresso já” quer dizer que dessa forma não está passando credibilidade. Ainda fez uma ironia ao voto impresso, né!? Porque do jeito que está não está confiável. (Professora Ivone, videogravação em 01/04/2021)

O cara coloca um ponto de vista dele lá e para mim nitidamente esses dados são manipulados, porque provavelmente recolheu os dados na hora que ele quis, do jeito que ele quis, justamente para levar uma situação que ele está querendo aqui pregar que é o voto impresso. Voltar a 30 anos atrás para mim é uma forçação de barra usando a matemática para dar credibilidade mais uma vez a uma *fake news*. (Professor Jairo, videogravação em 01/04/2021)

É possível que a contestação do conteúdo, feita por alguns professores de forma imediata, possa ter sido influenciada por algumas razões. Uma delas é que na primeira etapa da pesquisa os professores foram informados que estariam participando de uma investigação e que esta trataria do assunto de desinformação na internet. Notamos que imediatamente, ao analisarem o conteúdo, os participantes procuraram classificar a informação como falsa. A professora Sílvia confirmou essa hipótese: “A gente está indo muito nessa direção de que é *fake news*, porque a proposta dos encontros é esse, estar trazendo noticiários que sejam *fake news*”. Outro motivo para que os participantes tenham classificado a informação como falsa pode ter relação com o contexto. É bem provável que o processo eleitoral no Brasil passe aos participantes certa credibilidade. Desacreditar do processo eleitoral poderia ir contra as suas crenças (Souza & Araújo, 2022), então os professores irão buscar justificativas de várias maneiras para contestar a mensagem. Isso é possível notar na argumentação do professor Jairo “...ele está querendo aqui pregar o voto impresso, voltar a 30 anos atrás no tempo?...”.

O fato é que o principal argumento dos participantes leva em conta que os números não são verdadeiros, embora a estabilidade das amostras na apuração cause estranheza para quem não está acostumado a observar situações de amostragem; o comportamento dos números dessa forma não prova nada. Depois de um tempo de discussão a professora Tamara levantou essa questão:

Então, eu acho que essa notícia é fake, mas eu estou aqui pensando se numa eleição isso não pode acontecer estatisticamente falando. Se durante uma eleição nunca pode acontecer isso, falando assim, estatisticamente que você não pode ter estabilidade do começo até o final de uma eleição, sabe? (Professora Tamara, videogravação em 01/04/2021)

Alguns colegas contestaram a opinião da professora, como neste argumento usado pelo professor Geraldo:

Estatisticamente isso não pode acontecer conforme a Tamara falou. Tem regiões que determinado candidato é mais forte do que o outro. Então não tem essa constância de ficar sempre no mesmo patamar, entendeu? Acho que a visão nossa em relação a isso seria que ela quer apresentar para a gente, mas não tem como aceitarmos isso, entendeu? (Professor Geraldo, videogravação em 01/04/2021)

A partir dos argumentos da professora Tamara, outros professores também começaram a levantar suspeitas sobre o comportamento da apuração. A professora Ivana complementou: “É! Eu estava bem aqui na dúvida, mas li até tudo de novo, eu acho que os dados é, por si só né, pode ser que seja muita (ênfase na palavra) coincidência, mas eu acho que é possível, sim”.

Um ponto que não foi levado em consideração pelos professores é que a estabilidade nas apurações parciais dos votos pode ser justificada pela lei dos grandes números. Neste sentido, nossa pesquisa mostra, de forma análoga ao que foi proposto por Garfield (2002), que inclusive professores

de matemática têm fortes intuições sobre amostras aleatórias e, na maioria dos casos, essas intuições estão incorretas. É possível notar que, mesmo afirmando ser possível que a estabilidade ocorra, a professora Ivana alega que o fenômeno seria muita coincidência. Souza (2016, p. 379) argumenta que o problema tem relação com a formação docente, que em “grande parte dos cursos de licenciatura não dá suporte para que os professores compreendam as conexões existentes entre a aleatoriedade, a lei dos grandes números e as distribuições estatísticas.”

Existe outro ponto a ser analisado. Ao raciocinar sobre o contexto da apuração dos votos, a aleatoriedade das amostras coletadas também foi questionada. Por exemplo, no trecho em que Geraldo relatou “...tem regiões que determinado candidato é mais forte do que o outro...”. O professor quis dizer que, se as urnas fossem apuradas região por região, haveria uma variabilidade maior. Não sabemos se isso aconteceu na prática e nem se teria influência na variabilidade em uma situação real. Essa seria uma hipótese a ser checada, porque o procedimento de apuração associado ao contexto descrito pelo professor podem ter, juntos, fundamento estatístico para ser questionado. Porém, mesmo que pudéssemos observar as condições, ainda assim, não teríamos uma prova para questionar a variabilidade. Embora a linha de raciocínio tenha uma fundamentação adequada, o estudo seria válido para aquele contexto.

Para que os alunos compreendam o comportamento da variabilidade entre as amostras, para Shaughnessy (2007), eles precisarão desenvolver o raciocínio distribucional. Ou seja, o aluno precisa ser formado para ir além de sua propensão de focar num valor esperado por ele e desenvolver intuições para uma quantidade razoável de dados com foco na variação das amostras. Para o pesquisador, há evidências de que o raciocínio distributivo dos alunos poderia ser melhorado, se eles realizassem simulações em atividades práticas. Uma possibilidade para observar os resultados neste cenário estatístico seria criar experimentos pelos quais seja possível extrair várias amostras aleatórias, manualmente, de uma população e observar as mudanças na contabilização das porcentagens de ocorrência da amostra ao longo de vários momentos. Assim seria possível começar a desenvolver a intuição dos alunos sobre a variabilidade da amostragem.

Mais adiante solicitamos aos professores que propusessem atividades pedagógicas para tratar do conteúdo da mensagem em sala de aula. Nesse momento as atividades de simulação foram uma das propostas colocadas em pauta:

Porcentagem dá pra gente trabalhar com proporção, a gente poderia brincar de urna. Assim, colocar umas 100 bolinhas dentro de uma caixinha, né!? Dentro de uma urna e tirando as bolinhas, tirando como se fosse uns votos, e fazer de 100, esse número maior que seria os 100% e a gente poderia estar fazendo a metade, dentro das proporções e dentro do que foi colocado dos dados do primeiro e do

segundo candidato, a gente poderia até escolher 2 alunos, para ser, um candidato e o outro. A gente poderia fazer uma brincadeira, assim, sabe? (Professora Janaína, videogravação em 01/04/2021)

Embora a professora propusesse uma atividade de simulação na prática, suas crenças ainda sobrepuseram a possibilidade de o comportamento dos dados ter sido manipulado.

[...] a gente poderia trazer as proporções que foram colocadas na notícia. No final das nossas averiguações, do que a gente propôs na sala a gente poderia estar verificando, trazer pra porcentagem que, né!? Menos de 1%, imagina, né? 37 (por cento) já de apuração, já dos votos, muito estranho ... a gente acompanha processo de apuração já algum tempo e não tem essa parte de equilíbrio do início até o fim. (Professora Janaína, videogravação em 01/04/2021)

Uma das razões para que professores mantenham crenças preconcebidas pode ter relação com a falta de experiência docente como aprendiz em investigações, fazendo uso de simulações, tanto de ordem empírica quanto de simulações computacionais, o que também é sugerido por Souza (2016). Poucos professores tiveram a oportunidade, enquanto aprendizes, de participar de investigações empíricas. Essa falta de experiência enquanto aprendiz pode ser uma das razões para que suas interpretações sejam preconcebidas por heurísticas, que são processos mentais simples que os ajudam a encontrar respostas adequadas às suas crenças, embora imperfeitas para questões difíceis como a variabilidade. O fato é que criadores de conteúdos falsos se aproveitam dessa oportunidade para manipular a opinião pública.

## CONCLUSÕES

Esta pesquisa empírica buscou identificar a forma como docentes raciocinam sobre a amostragem, diante de uma mensagem circulada no aplicativo WhatsApp. Consequentemente, foram realizadas algumas análises sobre o modo como os participantes, em grupo, raciocinam a respeito dos dados utilizados pelo autor, referentes à aparente estabilidade na variabilidade das amostras coletadas durante a apuração dos votos na eleição municipal de São Paulo no ano de 2020.

O estudo levanta questões que têm implicações na Educação Estatística. Boa parte dos professores raciocina de forma equivocada sobre amostragem, acaso, aleatoriedade e lei dos grandes números para sustentar suas crenças sobre a impossibilidade de uma estabilidade na variabilidade das amostras em uma apuração de votos. Dessa forma, atribuem ao autor do conteúdo a manipulação dos dados e apresentação de números falsos. O perigo é que esse raciocínio seria contradito, ao verificarem que os dados são verdadeiros. Embora a estatística discutida na mensagem não prove a ilegalidade do processo de apuração dos votos, o argumento poderia ser tomado como verdadeiro por muitas pessoas, inclusive por professores.

A partir dos resultados obtidos por esta análise, vemos que é necessário um aperfeiçoamento na formação estatística dos professores. Além disso, é importante que haja um olhar mais atencioso, por parte da Educação Matemática, para as estruturas comunicativas, principalmente as redes sociais, tendo em mente as diversas intenções dos sujeitos, ao se utilizar de dados matemáticos para dar aparência de verdade a ideias utópicas pautadas em demandas políticas.

Com esta pesquisa estabelecemos um novo paradigma. É necessário que investigações futuras se debrucem sobre os ambientes comunicativos, sobre os contextos de veiculação de informações na internet e sobre os fenômenos sociais contemporâneos, para aprimorar propostas de ensino que impliquem em uma formação mais ampla dos professores de matemática. O raciocínio estatístico não é tomado como prioridade nos cursos de formação de professores, e esta pesquisa mostra que precisamos refletir sobre como aperfeiçoar as práticas educativas, de modo que o fenômeno da desinformação perca força e traga menos prejuízos às estruturas democráticas da sociedade.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abreu, N. R., Baldanza, R. F., & Gondim, S. M. G. (2009). Os grupos focais on-line: das reflexões conceituais à aplicação em ambiente virtual. *Revista de Gestão da Tecnologia e Sistemas de Informação: an international Journal of Information Systems and Technology Management*, 6(1), 05-24.
- Baptista, E. A., Rossini, P., Oliveira, V. V. de, & Stromer-Galley, J. (2019). A circulação da (des)informação política no WhatsApp e no Facebook. *Lumina*, 13(3), 29-46.
- Braga, R. M. da C. (2018). A indústria das fake news e o discurso de ódio. In R. V. Pereira, (Ed.). *Direitos políticos, liberdade de expressão e discurso de ódio* (pp. 203-220). IDDE. [https://bibliotecadigital.tse.jus.br/xmlui/bitstream/handle/bdtse/4443/2018\\_pereira\\_direitos\\_politicos\\_liberdade.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://bibliotecadigital.tse.jus.br/xmlui/bitstream/handle/bdtse/4443/2018_pereira_direitos_politicos_liberdade.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*. Ministério da Educação.
- Campos, C. R., Jacobini, O. R., Wodewotzki M. L. L., & Ferreira, D. H. L. (2011). Educação estatística no contexto da educação crítica. *Bolema- Mathematics Education Bulletin*, 24(39), 473-494. <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/72582>
- Egelhofer, J., & Lecheler, S. (2019, maio 24-28). Fake news as a two-dimensional phenomenon: a framework and research agenda [Review]. In *Annals of the International Communication Association*, Washington, D. C., Estados Unidos.
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3).
- Gomes, A. A. (2005, dezembro 1). Apontamentos sobre a pesquisa em educação: usos e possibilidades do grupo focal. *EccoS- Revista Científica*, 7(2), 275-290.
- Graves, L., & Cherubini F. (2016). The rise of fact-checking sites in Europe. In Reuters Institute for the Study of Journalism. *Digital News Project Report*. <https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid:d55ef650-e351-4526-b942-6c9e00129ad7>

- Lima, A., Lemos, C., Apolinário, I., Veroneze, J., Oliveira, P., & Banquieri, R. (2020, novembro 14). Apuração por zona eleitoral. *G1*. <https://especiaisg1.globo/sp/sao-paulo/eleicoes/2020/mapas/apuracao-zona-eleitoral-prefeito/sao-paulo/1-turno/>
- Lopes, G. (2020, novembro 16). Porcentagem dos 4 primeiros candidatos à Prefeitura de São Paulo comprovou fraude nas eleições de 2020? *E-Farsas*. <https://www.e-farsas.com/porcentagem-dos-4-primeiros-candidatos-a-prefeitura-comprovou-fraude-nas-eleicoes-de-2020.html>
- Luna, L. C. (2019, outubro 25-27). O estudo de amostragem em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. In *Annals of the XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática* (p. 1-12), São Paulo, SP.
- Mattar, F. N. (2012) *Pesquisa de Marketing: metodologia e planejamento*, 5 Ed., São Paulo: Editora Atlas.
- Mortari, M., D'Ávila, M. Z., & Fonseca, M. (2020, novembro 15). Ao vivo: eleições municipais 2020. *InfoMoney*. <https://www.infomoney.com.br/politica/ao-vivo-eleicoes-municipais-2020>
- Nascimento, L. (2020, novembro 07). Agência Brasil explica como é feita a apuração dos votos no Brasil. *Agência Brasil*. <https://agenciabrasil.ebc.com.br/eleicoes-2020/noticia/2020-11/agencia-brasil-explica-como-e-feita-apuracao-dos-votos-no-brasil>
- Pereira, M. B. (2018) *Distribuição Amostral no Ensino Médio*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Paulo]. <https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/52913>
- Pfannkuch, M., Arnold, P., & Wild, C. (2015). What I see is not quite the way it really is: students' emergent reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 343–360.
- Prado, J. do. (2015). *Dos consultórios sentimentais à rede: apoio emocional pelas mídias digitais*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos]. <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7122>
- Pratt, D., & Ainley, J. (2008). Introducing the special issue on informal inferential reasoning. *Statistical Education Research Journal*, 7(2), 3–4.
- Sampaio, M. de M. (2007) *Lei dos grandes números na percolação multi-dimensional*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco]. <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/6296>
- Shaughnessy, M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on the teaching and learning of mathematics* (pp. 957–1009). Charlotte, NC: Information Age Publishers.
- Souza, L. (2016). Formação de professores para o ensino de probabilidade: simulação conectando ideias estatísticas. *Vidya*, 36(2), 377-395.
- Souza, L., & Araújo, J. (2022). Fake news phenomenon: formation of beliefs under pragmatic optics and mathematical education. *Acta Scientiae*, 24(1), 1-29.
- Trad, L. (2009). Grupos focais: conceitos, procedimentos e reflexões baseadas em experiências com o uso da técnica em pesquisas de saúde. *Physis: Revista de Saúde Coletiva*, 19(3), 777-796.
- Tribunal Superior Eleitoral (2020, novembro 15). *Nota de esclarecimento sobre suposta fraude nas Eleições Municipais de 2020*. Tribunal Superior Eleitoral. <https://www.tse.jus.br/imprensa/noticias-tse/2020/Novembro/nota-de-esclarecimento-sobre-suposta-fraude-nas-eleicoes-municipais-de-2020>

O raciocínio de professores de matemática sobre amostragem e argumentos persuasivos nas redes sociais

Tribunal Regional Eleitoral-MG (2018, setembro 19). *Dúvidas frequentes - sistema eletrônico de votação*.  
Tribunal Regional Eleitoral-MG. <https://www.tre-mg.jus.br/eleicoes/eleicoes-2018/duvidas-frequentes-sistema-eletronico-de-votacao>

## **THE REASONING OF MATHEMATICS TEACHERS ABOUT SAMPLING AND PERSUASIVE ARGUMENTS IN SOCIAL NETWORKS**

### **ABSTRACT**

Sample data used in the media, both in traditional media (print newspapers, television channels, etc.) and in social networks, are subject to manipulations that support the most diverse arguments. In view of the difficulty of society, in general, in reasoning, interpreting and arguing about quantitative data, this research sought to analyze how mathematics teachers reason about the sample exposed in a message that circulated in WhatsApp groups during the municipal elections in the city of São Paulo in 2020. As a methodological path, we opted for the collective interview organized in the format of focus groups. From the interaction of the participants, when analyzing the content of the message, questions about the variability in the counting of votes emerged in their speeches. The speeches were based on an alleged use of false statistical data to manipulate public opinion; the apparent stability in the counting of votes throughout the counting was the main argument that fueled the political demand of the author of the message. The results show the need for a careful look at the false information conveyed on social networks and in other environments that make use of the internet that have implications for Statistical Education.

Keywords: Statistical Thinking; Variability; Statistical Education; Fake news; Disinformation.

## **EL RAZONAMIENTO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE MUESTREO Y ARGUMENTOS PERSUASIVOS EN REDES SOCIALES**

### **RESUMEN**

Los datos muestrales utilizados en los medios de comunicación, tanto en los medios tradicionales (diarios impresos, canales de televisión, etc.) como en las redes sociales, son objeto de manipulaciones que sustentan los más diversos argumentos. Ante la dificultad de la sociedad, en general, para razonar, interpretar y argumentar sobre datos cuantitativos, esta investigación buscó analizar cómo razonan los profesores de matemáticas sobre la muestra expuesta en un mensaje que circuló en grupos de WhatsApp durante las elecciones municipales en la ciudad de São Paulo en 2020. Como camino metodológico, optamos por la entrevista colectiva organizada en el formato de grupos focales. De la interacción de los participantes, al analizar el contenido del mensaje, surgieron interrogantes sobre la variabilidad en el conteo de votos en sus discursos. Los discursos se basaron en un supuesto uso de datos estadísticos falsos para manipular la opinión pública; la aparente estabilidad en el conteo de votos a lo largo del escrutinio fue el principal argumento que alimentó la reivindicación política del autor del mensaje. Los resultados muestran la necesidad de una mirada atenta a las informaciones falsas que se transmiten en las redes sociales y en otros entornos que hacen uso de internet que tienen implicaciones para la Educación Estadística.

Palabras clave: Pensamiento Estadístico; Variabilidad; Educación Estadística; *Fake news*; Desinformación.

LEANDRO DE OLIVEIRA SOUZA  
Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, Brasil  
[olilean@gmail.com](mailto:olilean@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0003-1626-0766>

Doutor e Mestre em Ensino Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul, Licenciado em Pedagogia com habilitação em administração e supervisão e Licenciado em Matemática. Foi bolsista CAPES (Doutorado Sanduíche) na Universidade de Auckland na Nova Zelândia. Tem mais de dez anos de experiência lecionando e atuando como professor e coordenador de escolas públicas e particulares de educação básica. Atualmente é professor da Universidade Federal de Uberlândia (ICENP). Participa do grupo de pesquisa NUPEM, produzindo pesquisas na área de ensino de Probabilidade e Estatística, tecnologia, educação estatística e formação de professores. Orienta pesquisas nos programas de Pós-graduação em Educação e em Ensino de Ciências e Matemática (UFU). Foi membro da Diretoria Nacional Executiva da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (2016-2022).

LORRAINE SILVA GONÇALVES  
Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, Brasil  
[lorraine.goncalves@ufu.br](mailto:lorraine.goncalves@ufu.br)  
<https://orcid.org/0000-0002-6705-9985>

Graduanda em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e bolsista do Programa de Estudos Tutorados (PET). Participa do projeto de pesquisa “Mídias, mitos e desinformação: experiências na Educação Matemática a serviço do empoderamento político”, na condição de pesquisador em nível de iniciação científica e orientado pelo primeiro autor.

JOÃO VITOR PIRES VIEIRA  
Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil  
[joaovitor212@ufmg.br](mailto:joaovitor212@ufmg.br)  
<https://orcid.org/0000-0003-2814-9395>

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e professor bolsista na Escola de Educação Básica da UFMG. Participa do projeto de pesquisa “Mídias, mitos e desinformação: experiências na Educação Matemática a serviço do empoderamento político”, na condição de pesquisador em nível de iniciação científica e orientado pelo primeiro autor.

# FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE ESTADÍSTICA EN UNA PERSPECTIVA CRÍTICA

CINDY ALEJANDRA MARTÍNEZ-CASTRO  
LUCÍA ZAPATA-CARDONA

## RESUMEN

El presente capítulo describe una experiencia en un programa de formación de profesores de matemáticas, a partir de las investigaciones estadísticas, y su contribución al desarrollo de la conciencia crítica de los futuros profesores. El objetivo del estudio fue analizar el aporte de las investigaciones estadísticas al desarrollo de la conciencia crítica, en la formación inicial de profesores de estadística. Se siguió una metodología cualitativa con un enfoque crítico-dialéctico. Los participantes fueron 10 profesores en formación que hicieron parte de un curso de didáctica de la estadística en un programa de licenciatura en matemáticas, en una universidad colombiana. Las principales fuentes de información fueron las discusiones de los participantes al desarrollar cuatro investigaciones estadísticas, escritos autobiográficos y escritos narrativos. Los resultados revelan que las investigaciones estadísticas contribuyeron al desarrollo de la conciencia crítica de los participantes en dos dimensiones. La conciencia crítica se evidenció (1) al dinamizar el razonamiento estadístico que ayudó a los participantes al estudio empírico de las crisis sociales y (2) al reconocer el carácter político de la estadística y al asumirla como una poderosa herramienta para la participación y transformación social.

Palabras clave: Educación estadística; Formación crítica; Formación de profesores; Investigaciones estadísticas

## INTRODUCCIÓN

La introducción de la estadística en los currículos de la educación obligatoria ha representado un desafío para la formación de profesores (Batanero et al., 2011; Estrella, 2017) debido a la sistemática demanda por el fortalecimiento del saber disciplinar y por el desarrollo de formas para llevar ese saber al aula de clase. No obstante, la mayoría de los programas de formación de profesores responden pobremente a las demandas de la sociedad actual. Por ejemplo, abundan los programas de formación inicial de profesores que enfatizan en el saber disciplinar que no logra conectar con el mundo en el cual se produce. Es decir, el dominio de la disciplina es la esencia en la formación (Loya, 2008) y al culminar esos programas que siguen estos cuestionados formatos, el profesor es incapaz de reconocerse a sí mismo como ciudadano de un mundo democrático y justo (Giroux, 2006).

El profesor avanza por estos programas de formación y al final consigue un conocimiento del saber disciplinar que no logra vincular con su futura labor como educador estadístico. Se genera así

Martínez-Castro, C. A. y Zapata-Cardona, L. (2022). Formación inicial de profesores de estadística en una perspectiva crítica. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 367-384). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

una fractura entre el saber y el ser (Radford, 2016). Para poder atender a los desafíos actuales en la formación de profesores, es necesario que el profesor sea capaz de utilizar la estadística para participar, cuestionar, evaluar críticamente, reflexionar y proponer acciones de transformación frente a los problemas sociopolíticos presentes en sus comunidades (Weiland, 2019). En otras palabras, se requiere que los profesores desarrollen una conciencia sociopolítica para apropiarse del mundo y de la realidad en la que viven, para actuar sobre ella y aportar a su transformación (Guerrero, 2008). Para ser coherentes con esta tensión proponemos como objetivo: analizar el aporte de las investigaciones estadísticas al desarrollo de la conciencia crítica, en la formación inicial de profesores de estadística.

## MARCO TEÓRICO

### Formación de profesores en una perspectiva crítica

En una perspectiva crítica para la formación inicial, los futuros profesores son asumidos como sujetos reflexivos, críticos y éticos (Lopes, 2008) capaces de reconocer la estadística y sus usos en los entornos socioculturales para participar en la comprensión y transformación de la sociedad. De acuerdo con Skovsmose (1999), una de las principales preocupaciones de la educación radica en la necesidad de formar a los estudiantes y profesores como ciudadanos capaces de revelar la naturaleza crítica de la sociedad. “Ser crítico significa prestarle atención a una situación crítica, identificarla, tratar de captarla, comprenderla y reaccionar frente a ella. [...] Significa enfocarse en una situación crítica y buscar alternativas” (Skovsmose, 1999, pp. 16-18).

De esta forma, se busca propiciar que los profesores en formación se conviertan en actores que comprendan, transformen su realidad y contribuyan a la creación de condiciones justas y democráticas en la sociedad. La formación inicial se asume como una actividad crítica (Loya, 2008), en la cual, hay un cuestionamiento constante por teorías, prácticas y experiencias alienantes y represivas para la sociedad dominada, con el fin de promover soluciones que aporten a la transformación de las situaciones críticas y a la emancipación social (Giroux, 2006). Se busca combinar conocimiento y crítica con una apelación a transformar la realidad al servicio de comunidades más democráticas y humanizadas. La formación de profesores “debe estar vinculada con la transformación crítica del escenario escolar, y por extensión, del escenario social más amplio” (Giroux, 2006, p. 263).

La formación de profesores, en una perspectiva crítica, también se centra en la posibilidad de que los futuros profesores puedan leer y escribir el mundo con la estadística (Weiland, 2019), para aportar a la construcción de la justicia social. Leer el mundo significa usar la estadística para comprender problemas que involucran justicia y equidad en los contextos sociopolíticos, y escribir el mundo en el sentido de actuar para transformar y remediar situaciones de injusticia (Gutstein, 2006).

En tal sentido, la lectura y la escritura del mundo por medio de la estadística son dos procesos dialécticos y tienen que ver con lo que algunos autores han denominado el desarrollo de la conciencia crítica (Guerrero, 2008) o conciencia sociopolítica (Gutstein, 2006). Esta se entiende como la capacidad de utilizar la estadística para comprender las relaciones de poder, las desigualdades de recursos y las oportunidades dispares entre diferentes grupos sociales (Gutstein, 2003). Así, el desarrollo de la conciencia crítica tiene que ver con los procesos de ayudar a los profesores en formación a comprender, formular y abordar preguntas y desplegar análisis sobre su sociedad. Como lo proponen Zapata-Cardona y Marrugo (2019), la estadística debe ser una herramienta para ayudar a los ciudadanos a entender y transformar su mundo más allá del dominio de conceptos y procedimientos estadísticos; es necesario utilizar esas habilidades y esos conocimientos para comprender y transformar los problemas críticos presentes en la sociedad.

### **Investigaciones estadísticas**

Las investigaciones estadísticas son una propuesta holística para orientar la enseñanza de la estadística, que busca en las personas el desarrollo de conocimientos estadísticos y habilidades en el manejo de herramientas, y a la vez, una conciencia crítica (Zapata-Cardona, 2018). En otras palabras, es una forma de organizar la enseñanza de la estadística que se interesa tanto por la formación técnica como por la formación crítica de los sujetos. Esta estrategia permite una reconexión entre el saber y el ser cuando se aborda la estadística, y, además, vincula la enseñanza con los contextos sociales, políticos, económicos y culturales en los que se encuentran inmersos los sujetos. El profesor en formación asume una responsabilidad frente a fenómenos de naturaleza social y, por ende, pone a su servicio todos los conocimientos y habilidades estadísticas adquiridas en los procesos investigativos para formar su conciencia crítica y aportar a la transformación de sus realidades (Zapata-Cardona, 2018).

Las investigaciones estadísticas permiten estudiar de forma empírica situaciones y problemas propios de los contextos socioculturales de los participantes, pasando por todo un ciclo de investigación (Wild y Pfannkuch, 1999) apoyado en el desarrollo de varias fases: planteamiento de un problema, un plan de recolección de datos, un análisis y el establecimiento de unas conclusiones coherentes con el problema planteado. De esta forma, las investigaciones estadísticas, como una estrategia metodológica apoyada en un ciclo de investigación, pueden ser usadas para comunicar información estadística y argumentos en un esfuerzo por desestabilizar y modificar las estructuras de injusticia (Weiland, 2019) para la construcción de sociedades más justas, democráticas y humanizadas. Es decir, las investigaciones estadísticas en el aula pueden ser una herramienta para identificar y

cuestionar los usos de la estadística en la sociedad y sus tensiones, donde al realizar preguntas estadísticas, utilizar métodos de recolección y análisis de datos se comprenden dichas tensiones (Weiland, 2019).

### **Razonamiento estadístico**

El razonamiento estadístico está relacionado con la forma en que las personas razonan con ideas estadísticas y dan sentido a la información estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2008; Garfield, 2002). Esto implica comprender y explicar los procesos estadísticos y hacer interpretaciones basadas en conjuntos de datos, representaciones gráficas y resúmenes estadísticos (Garfield, 2002). En este tipo de razonamiento es fundamental comprender el contexto en el que se interpreta la información estadística (Campos et al., 2013; Campos, 2016). Por lo tanto, en el desarrollo del razonamiento estadístico, es importante siempre que sea posible trabajar con datos reales, relacionar los datos con el contexto y promover la interpretación de los resultados.

## **METODOLOGÍA**

El presente estudio se apoyó en un paradigma de investigación cualitativo (Denzin y Lincoln, 2012), y en un enfoque crítico-dialéctico (Sánchez, 1998). El componente crítico estuvo representado en el diseño del trabajo de campo que demandó de los participantes atención a algunas situaciones críticas, entendidas estas como situaciones que generan desequilibrio y donde se manifiestan las fragilidades sociales. Los participantes fueron 10 profesores en formación que cursaban un seminario de didáctica de la estadística en un programa de licenciatura en matemáticas, en una universidad pública de la ciudad de Medellín, Colombia. La participación fue voluntaria y se protegió la identidad nombrando a los participantes con seudónimos en el reporte de investigación. A los participantes se les propuso discutir y desarrollar cuatro investigaciones estadísticas relacionadas con algunas situaciones críticas de la sociedad: calentamiento global, valor adquisitivo del salario mínimo en Colombia, desnutrición y obesidad en América Latina y el Caribe, e inequidad de género en Colombia. Cada investigación estadística se inició con la lectura y análisis de una noticia relacionada con cada situación crítica en cuestión. Después de la lectura, se indagó sobre el potencial pedagógico de la noticia para la enseñanza de la estadística, y se propusieron respuestas hipotéticas de estudiantes, algunas de ellas descabelladas y otras razonables, con el fin de estimular la discusión. Finalmente, para cada investigación estadística se propuso una pregunta estadística que los profesores en formación debían responder usando herramientas estadísticas y datos reales: ¿Se está calentando nuestra ciudad?, ¿El salario mínimo en Colombia ha perdido valor adquisitivo?, ¿Cuáles factores están asociados a la desnutrición y a la obesidad en Colombia? ¿Cuáles son las variables que explican mejor la desnutrición

en América Latina?, ¿Existe inequidad de género en nuestro país? La investigación estadística terminaba cuando los profesores en formación, en grupos de dos o tres, lograban responder a la pregunta estadística y presentaban al resto del curso todo el proceso seguido y las herramientas de indagación empíricas usadas (información detallada del trabajo de campo se encuentra en Martínez-Castro, 2020).

Las principales fuentes de información para el análisis fueron las discusiones durante el seminario (8 encuentros de 2 horas cada uno) en el que los profesores estudiaron empíricamente las problemáticas planteadas en cada investigación estadística. La información complementaria incluyó la escritura de autobiografías y textos narrativos. La producción de los datos estuvo acompañada de grabaciones de audio y video, y los encuentros fueron transcritos palabra a palabra para facilitar el análisis. Se tomaron como unidades de análisis los fragmentos del discurso de los profesores en formación que daban cuenta del desarrollo de la conciencia crítica. De acuerdo con Lerman (2001), el discurso constituye la conciencia.

Con las transcripciones y los escritos autobiográficos y narrativos, se anotaron y codificaron episodios de forma independiente siguiendo una estrategia inductiva y las diferencias fueron resueltas por consenso entre las dos investigadoras apoyadas en los referentes teóricos. Los fragmentos del discurso de los participantes se estudiaron en una rutina comparativa constante (Fram, 2013), para darles sentido e ir seleccionando episodios representativos que daban indicios de los aportes de las investigaciones estadísticas al desarrollo de la conciencia crítica. Si bien se cuenta con transcripciones, autobiografías y narrativas de todos los participantes, solo se seleccionaron los fragmentos que más ayudaron a ilustrar el objetivo planteado en este capítulo.

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Un detallado análisis de la información producida se organizó en dos apartados que dan cuenta del aporte de las investigaciones estadísticas al desarrollo de la conciencia crítica. En el primer apartado se presentan indicios de la dinamización del razonamiento estadístico y en el segundo se presentan algunos indicios del reconocimiento del carácter político de la estadística.

### **Razonamiento estadístico**

En esta sección se discute el razonamiento estadístico y su aporte al desarrollo de la conciencia crítica cuando se usan las investigaciones estadísticas en el aula como estrategia para organizar la enseñanza. Desarrollar una conciencia crítica no se limita a dominar técnicas estadísticas y términos formales (Engel, 2019; Zapata-Cardona y Marrugo, 2019), también se trata de interactuar con la información estadística y darle sentido dentro del estudio de problemas sociopolíticos para formar

posiciones propias y dar argumentos basados en la evidencia que entregan los datos (Engel, 2019, Weiland, 2019). En otras palabras, para participar como ciudadanos informados en las sociedades actuales es importante que los sujetos puedan aprender a razonar estadísticamente para estudiar y comprender las diferentes cuestiones críticas presentes en la sociedad.

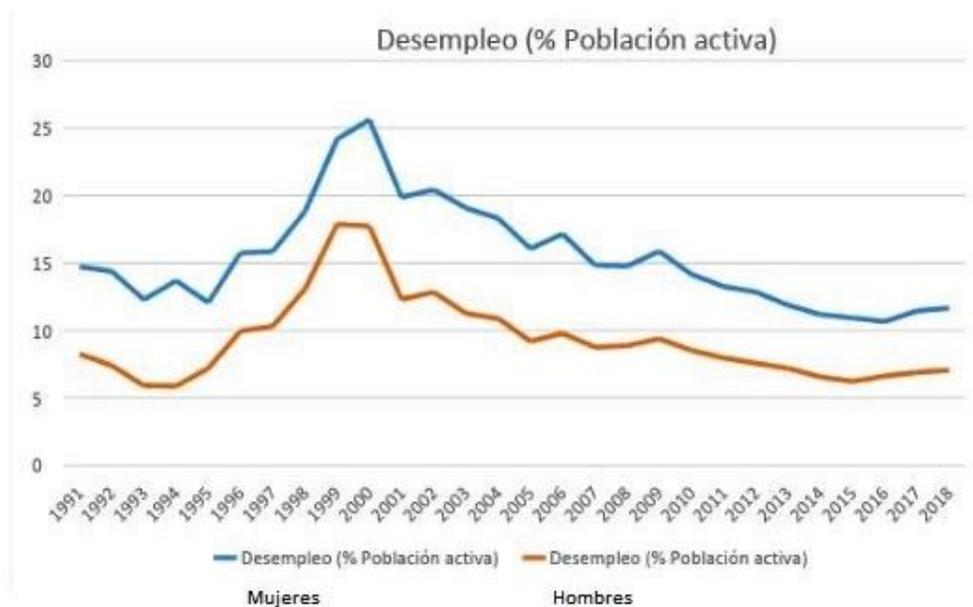
Durante el desarrollo de las investigaciones estadísticas, los participantes se vieron en la necesidad de indagar datos y luego transformar su representación para construir modelos estadísticos, en una búsqueda por encontrarles sentido (Pfannkuch y Wild, 2004). Por ejemplo, al abordar la pregunta estadística: ¿Existe inequidad de género en nuestro país?, ¿por qué sí o por qué no?, las participantes Teresa y Claudia decidieron consultar datos estadísticos reales que les permitieran comparar algunas variables entre la población de hombres y la población de mujeres en Colombia. Las participantes lo narraron de la siguiente manera:

Claudia (00:01:45): tomamos cuatro condiciones importantes para determinar si hay o no inequidad de género en el país. Una de ellas fue el desempleo, la otra fue [...] niños y niñas fuera de la escuela, el otro fue el empleo por servicios e industria y los ingresos.

Teresa (00:02:41): siempre hicimos la comparación entre hombres y mujeres. (Encuentro 8, abril 2 de 2019, líneas 9-16).

En una de las variables seleccionadas: el porcentaje de desempleo en Colombia comparado entre hombres y mujeres en el periodo de 1991-2018, uno de los modelos construidos por Claudia y Teresa fue un gráfico de líneas (véase la Figura 1).

**Figura 1.** Comparación del porcentaje de hombres y mujeres desempleados en Colombia en el periodo 1991-2018



*Nota:* La línea superior corresponde a mujeres.

**Fuente:** Gráfico elaborado por Teresa y Claudia. Encuentro 8, abril 2 de 2019

La elaboración del gráfico presentado en la Figura 1 permitió a las participantes ordenar los datos para observar su comportamiento a través del tiempo y comparar el porcentaje de desempleo entre los grupos elegidos: mujeres y hombres. Ello les permitió obtener mejores comprensiones frente al comportamiento global de la información, tal y como se puede percibir en el siguiente fragmento:

Claudia (00:02:45): Entonces el primero es este, [el] desempleo en los últimos 27 años presentado en porcentajes con relación a la población activa del país para cada año. Entonces este fue el rastreo que hicimos desde 1991 hasta el 2018. Esta información la sacamos [...] de la base de datos del banco mundial [...]. Entonces, a lo largo del tiempo se mantiene una proporción en que siempre hay más mujeres desempleadas que hombres [...]. El de hombres es el anaranjado [línea inferior en la Figura 1] y el de mujeres el azul [línea superior] (Encuentro 8, abril 2 de 2019, líneas 16-28).

La construcción del gráfico y su interpretación se convirtió en una herramienta de razonamiento para que las participantes comprendieran que los porcentajes de desempleo en las mujeres siempre se mantienen mayores a los de los hombres durante el período estudiado. El enfrentarse a las investigaciones estadísticas en el aula llevó a los futuros profesores a reconocer la necesidad de transformar los datos para darles sentido y comunicar su significado de manera comprensible en términos de la situación real (en este caso, la inequidad de género en Colombia).

En otra de las variables seleccionadas: promedio de ganancias mensuales entre hombres y mujeres en el periodo 2002-2017, uno de los modelos construidos por las participantes fue una tabla de doble entrada (véase la Tabla 1).

**Tabla 1.** *Comparación del promedio de ganancias mensuales entre hombres y mujeres en el periodo 2002-2017*

GANANCIAS MENSUALES		
	Hombres	Mujeres
2002	377576	317784
2003	439929	369430
2004	705816	531403
2005	767999	622050
2006	777056	610361
2007	899250	608984
2010	889346	815060
2011	918137	846908
2012	955161	865888
2013	1018381	929290
2014	1105432	954263
2015	1092897	982869
2016	1164094	1045548
2017	1222661	1118588
Promedio	880981	758459

**Fuente:** Tabla elaborada por Teresa y Claudia. Encuentro 8, abril 2 de 2019

Al estudiar la inequidad de género en Colombia, Teresa y Claudia se aproximaron de manera informal a una prueba de diferencia de medias para establecer inferencias frente al comportamiento de la información indagada:

Teresa (00:06:25): Entonces ya esta [variable] si la tomamos de la OIT, Organización Internacional del Trabajo, y tiene que ver con las ganancias mensuales en pesos colombianos [...]. Entonces están desde el 2002 hasta el 2017, hay acá como una brecha. Del 2007 saltan al 2010, entonces ahí hay como un huequito [véase la Tabla 1]. En cuanto a ganancias, estos [los hombres] en promedio ganan \$880.981 y las mujeres \$758.459 [por mes] [...]. Entonces ahí vemos como una diferencia [...], vemos como tal que los hombres obtienen como más ganancias que las mujeres (Encuentro 8, abril 2 de 2019, líneas 40-50).

La declaración de Teresa “vemos como tal que los hombres obtienen como más ganancias que las mujeres” involucra tres elementos: (a) sugiere una generalización, (b) está fundamentada en datos, e (c) incluye un lenguaje de incertidumbre. De acuerdo con Makar y Rubin (2009), estos son los elementos característicos de la inferencia informal. La inferencia estadística informal se comprende como “un proceso razonado pero informal de creación o prueba de generalizaciones a partir de datos, es decir, no necesariamente a través de procedimientos estadísticos estándar” (Makar y Rubin, 2009, p. 85, traducción de las autoras). Aquí fue notorio el potencial de la inferencia informal, como un elemento del razonamiento estadístico, para profundizar la comprensión de los futuros profesores sobre el propósito y la utilidad de los datos para dar sentido a algunos de los problemas presentes en sus comunidades, como la inequidad de género.

El gráfico exhibido en la Figura 1 y la Tabla 1 construidos por Claudia y Teresa, como parte de su proceso investigativo para estudiar la inequidad de género en Colombia, se convirtieron en los modelos estadísticos a partir de los cuales orientaron sus razonamientos e inferencias frente a los datos recopilados. Ello se relaciona con lo que Wild y Pfannkuch (1999) denominan razonamiento con modelos estadísticos. Algunos autores (Pfannkuch y Wild, 2004) consideran que los modelos estadísticos son formas estadísticas de representar y pensar sobre la realidad, y, por tanto, permiten interpretar y estudiar fenómenos sociales (Campos, 2016) presentes en el mundo. En este sentido, una herramienta simple como la representación gráfica de los datos o una forma específica de estructurar los datos como las tablas (Zapata-Cardona, 2018), pueden considerarse modelos estadísticos.

El razonamiento estadístico involucra hacer interpretaciones sobre los datos, las representaciones gráficas, la construcción de tablas, entre otros, que llevan a comprensiones e inferencias sobre la información estudiada (Campos et al., 2013). En tal sentido, las investigaciones estadísticas permitieron a los participantes razonar con sus propios modelos estadísticos y así establecer inferencias como las que compartió Teresa en el siguiente fragmento:

Teresa (00:15:36): Si tomamos digamos todas las tablas [y gráficos] podríamos ver que, sí hay una inequidad con respecto a la mujer, pues, incluso en el desempleo, en las ganancias mensuales de la mujer también se puede ver. [...] Entonces, [...] en la industria habría inequidad con respecto a la mujer [...] y también [...] en las ganancias y [...] [en lo] que tiene que ver con el desempleo. En conclusión, podríamos decir que sí hay como una inequidad (Encuentro 8, abril 2 de 2019, líneas 122-132).

Las participantes lograron inferir, haciendo uso de un lenguaje probabilístico (Makar y Rubin, 2009), que podría existir inequidad de género con respecto a la mujer en Colombia para las variables que se estudiaron en el contexto de la problemática. Esta inferencia tuvo lugar gracias al análisis estadístico fundamentado en los modelos estadísticos. Se usó la estadística para estudiar oportunidades dispares entre diferentes grupos sociales (Gutstein, 2006).

Los futuros profesores emprendieron múltiples acciones relacionadas con la construcción de los modelos (recolección y análisis de datos, uso de herramientas y razonamientos estadísticos para obtener conclusiones basadas en datos) y utilizaron los resultados proporcionados por los modelos para comprender las problemáticas en estudio. Esto significa que los modelos se convirtieron en una herramienta para profundizar el conocimiento estadístico de los futuros profesores, pero al mismo tiempo permitieron avanzar en el desarrollo de su conciencia crítica (Zapata-Cardona y Marrugo, 2019).

### **Carácter político de la estadística**

Asumir la estadística como una herramienta para la participación y transformación social, tiene que ver con reconocer su carácter político. En las sociedades actuales se hace necesario que los sujetos tengan la oportunidad de abordar problemas sociopolíticos complejos junto con el aprendizaje de conceptos y prácticas estadísticas en un esfuerzo por leer y escribir el mundo por medio de la estadística (Weiland, 2017) como sujetos críticos. Leer el mundo en el sentido de utilizar la estadística para comprender el contexto social, cultural y político en la sociedad, y escribir el mundo en el sentido de usar la estadística para transformar ese contexto (Weiland, 2019). Lo anterior tiene que ver con una de las preocupaciones de la Educación Matemática Crítica sobre la posibilidad de hacer cambios en la sociedad (Skovsmose, 2016). En este sentido, leer el mundo (comprenderlo) siempre debe estar vinculado a la escritura del mundo (hacer cambios) como procesos dialógicos, ya que, el objetivo no solo es una mejor comprensión de la sociedad sino también su transformación (Skovsmose, 1999).

El trabajo con las investigaciones estadísticas permitió que los profesores en formación reflexionaran críticamente frente al carácter no neutral (Campos, 2016; Giroux, 2006) de la estadística. Al ser la estadística una ciencia que permite a las personas acercarse al estudio de fenómenos de sus contextos sociopolíticos, ésta no se puede separar de los intereses de los sujetos cuando emprenden investigaciones estadísticas (Weiland, 2019). Tal idea surgió en el discurso de los participantes cuando se abordaron algunas de las problemáticas presentes en las investigaciones estadísticas:

Bruno (01:02:04): con la estadística podés controlar el alcance de lo que vos pretendés. ¿Hasta que alcance quieres que lea la persona o se informe? [...] Entonces es cómo esa información se controla, se direcciona o se limita (Encuentro 1, marzo 5 de 2019, líneas 544-553).

Claudia (00:13:52): para uno determinar que hay inequidad con respecto a alguno de los géneros tiene que determinar muy bien la variable. [...] Yo insisto en que tiene que ver con lo que escojamos (Encuentro 8, abril 2 de 2019, líneas 107-115).

Valeria (00:22:40): algo que me llama la atención de la noticia es que, pues no sé si se dan cuenta, pero cuando se habla del lado de los trabajadores, la Central Unitaria de Trabajadores (CUT) y la CGT (Confederación General del Trabajo), como que tienen un punto de vista, pero cuando es ACOPI (Asociación Colombiana de las Micro, Pequeñas y Medianas Empresas) que es [...] la asociación de esos pequeños pues tiene el otro punto de vista, y es que unos son trabajadores y los otros son dueños de las empresas [...]. Y [...] utilizando también cifras, puede tomar dos versiones (Encuentro 3, marzo 14 de 2019, líneas 154-159).

Las reflexiones de los participantes dan cuenta de que, la manera en que las personas se acercan e interpretan un conjunto de datos, depende de sus intereses. Es decir, los intereses de los sujetos desempeñan un papel tanto en la producción de argumentos basados en datos como en la interpretación de dichos argumentos (Weiland, 2019). En este sentido, la estadística posee un carácter

político (Weiland, 2019), ya que, se encuentra influenciada por las decisiones y elecciones que las personas realizan cuando la utilizan para construir argumentos basados en datos y tomar decisiones.

Que los profesores en formación hayan señalado el carácter político de la estadística en el estudio de problemas sociales es algo que desafía la visión neutral y objetiva del conocimiento estadístico (Campos, 2016). Ello hace hincapié en la importancia de que las personas hagan visibles y explícitos sus intereses en las tareas de recolección y análisis de datos, y que reflexionen en cómo dichos intereses podrían influir en sus argumentos (Weiland, 2019). Esto se relaciona con el llamado que hace Skovsmose (1999) en que tanto profesores como estudiantes deben mantener una “distancia crítica” para cuestionar aspectos como la aplicabilidad de la ciencia (en este caso la estadística), quién la usa, dónde se usa, y cuáles son los intereses implícitos en dicho uso.

El desarrollo de la conciencia crítica se evidenció en la medida en que los participantes empezaron a asumir una postura crítica frente al papel que puede jugar la estadística en la sociedad (Ernest, 2002; Lesser, 2007). Para que los sujetos puedan participar activamente en sus sociedades como agentes críticos es importante desarrollar sus habilidades y confianza no sólo para comprender, sino también para cuestionar las aplicaciones de la estadística en la sociedad y los supuestos ocultos sobre los que descansan (Ernest, 2002). En otras palabras, se trata de formar ciudadanos que puedan hacer juicios cuidadosos, participar en la crítica y tomar decisiones (Ernest, 2002) que aporten a la transformación de la sociedad.

Adicional a lo anterior, el abordar las investigaciones estadísticas posibilitó que los participantes reflexionaran sobre la importancia de la estadística como una herramienta para estudiar y comprender problemas sociopolíticos complejos y así ayudar a lograr un cambio social en el mundo (Lesser, 2007). Ello fue evidente en algunos de los fragmentos del discurso de los participantes plasmados en sus escritos narrativos:

Valeria: ¿Cuáles son las variables que nos permiten deducir patrones? que la violencia e inequidad de género está asesinando, que no existen condiciones de trabajo digno y bien remunerado para la clase obrera, que el modelo de producción capitalista es insostenible y genera solo ganancia para unos pocos y pérdidas para la humanidad y el planeta tierra. ¿Cómo generamos predicciones que nos permitan tomar decisiones y cambiar hacia los resultados que queremos si no es con información y datos verídicos y con análisis concretos y coherentes con estos datos? (Texto Narrativo Valeria, abril 25 de 2019, líneas 38-44).

Laura: [...] noticias como las mencionadas que fueron planteadas desde otros países latinoamericanos y europeos, lograron generar inquietud entre los asistentes, de manera que se reconoció que son problemáticas a las que los colombianos no somos ajenos. Por tal motivo se procede a derivar factores asociados a estos fenómenos, y es aquí como este tipo de investigaciones ayudan en la enseñanza de la estadística ya que, convoca al profesor en formación a entender el mundo por medio de la estadística.

Este mundo necesita tomar conciencia humana, cambio y verdad. Para esto se necesita de datos (Texto Narrativo Laura, abril 25 de 2019, líneas 23-30).

Además de plasmar tales argumentos en los escritos narrativos, en las discusiones generadas por las investigaciones estadísticas, como la relacionada con la pérdida de valor adquisitivo del salario mínimo en Colombia, también se hizo evidente la relevancia dada a la estadística para estudiar problemáticas reales y pensar en formas de transformarlas. Allí algunos de los profesores en formación recolectaron información del salario mínimo en Colombia en los últimos 13 años (2006-2018) y lo compararon con variables como la tarifa del transporte público en las ciudades de Medellín y Bogotá y la inflación anual en el país. Dicha comparación dio pie para que algunos participantes como Claudia cuestionaran el valor adquisitivo del salario mínimo en Colombia, generando la siguiente reflexión:

Claudia (01:32:45): [...] cuando uno se da cuenta, a nivel estadístico que ya lo vimos, que están cometiendo de algún modo como una opresión a nivel del bolsillo de los colombianos, hay que ponerse la mano en el corazón y salir y apoyar procesos políticos de huelga, de un montón de referendos, un montón de cosas que a nivel político generen un cambio (Encuentro 4, marzo 19 de 2019, líneas 907-911).

Las reflexiones de Valeria, Laura y Claudia dan cuenta del uso de datos para interpretar y producir información en relación con algunos temas críticos de su sociedad, como una oportunidad para apreciar la estadística como “una herramienta para ayudar a comprender (y quizás mejorar) algunos de los asuntos más profundos o apremiantes de nuestra sociedad” (Lesser, 2007, p. 1, traducción de las autoras). Esa postura crítica frente a la ciencia se hizo evidente en la comprensión que los participantes expresaron sobre temas de justicia social que los mostraban como ciudadanos comprometidos que reconocen la importancia y el poder de la estadística para evaluar, comprender y transformar las inequidades que persisten en la sociedad (Gutstein, 2006; Lesser, 2014).

El preparar a los profesores en formación para su participación en las sociedades democráticas requiere, además de una conciencia crítica, el desarrollo de una conciencia ética y política para guiar dicha participación (Weiland, 2019). La ética tiene que ver con un conjunto de valores morales o filosóficos que las personas utilizan para tomar decisiones en relación con los demás, sus comunidades y el mundo en general (Weiland, 2019), con miras a humanizar la sociedad de la cual hacen parte. La conciencia ética y política se evidenció en algunos enunciados de los participantes como los que se muestran a continuación:

Ana (00:42:53): yo creo que sí existe inequidad [de género] en Colombia, pues según lo que encontré. Porque digamos en todas las variables [...] las mujeres estaban digamos por debajo de los hombres, menos la educación. Pero aún con la educación mayor en las mujeres, el desempleo era más bajo [en los hombres]. Eso no tiene sentido, pues en la sociedad que se supone que nos dice que entre más

educación tienen más posibilidades, más oportunidades, pues, eso no debería ser así. [...] Quisiera empezar una campaña o algo, ¡mujeres hagan algo! (Encuentro 8, abril 2 de 2019, líneas 329-335).

Claudia (01:42:32): velar primero que todo porque somos personas, somos seres humanos, tenemos unos derechos [...]. Ser hombre o ser mujer no debe ser una desventaja para desarrollar nuestra vida en cualquier aspecto: académico, laboral, económico (Encuentro 8, abril 2 de 2019, líneas 864-868).

Valeria: Generalmente nos vi sorprendidos de cómo los números y la estadística específicamente pueden servir [par]a comprender estos fenómenos y a corroborar consecuencias y relaciones para encontrar las causas, no para quedarnos en un discurso sobre lo mal que están las cosas, como siempre, sino para proponer soluciones y ponerlas en marcha (Texto Narrativo Valeria, abril 25 de 2019, líneas 30-33).

En los fragmentos del discurso de Ana, Claudia y Valeria fue notorio, por un lado, como las participantes tuvieron la oportunidad de usar la estadística para analizar situaciones que parecen ser muy injustas en su sociedad, lo cual generó impotencia (en el caso de Ana). También fue evidente un sentimiento sobre poder hacer algo al respecto. Como lo propone Giroux (2006), el discurso ético manifiesta una preocupación por el sufrimiento humano de los oprimidos y puede permitir rechazar prácticas que perpetúan tal sufrimiento. En tal sentido, las sensaciones de impotencia y de querer hacer algo al respecto, al enterarse de diferentes situaciones de injusticia, son desafíos importantes para alentar a los profesores en formación “a verse a sí mismos como capaces de actuar en su entorno y hacer un cambio social positivo hacia un mundo más justo” (Gutstein, 2006, p. 91, traducción de las autoras).

Las ideas anteriores dan cuenta de que el desarrollo de la conciencia crítica está asociado con las oportunidades que tienen los profesores en formación para participar en la reflexión (Zapata-Cardona y Marrugo, 2019) frente a dilemas y cuestiones sociopolíticas de la sociedad, y conjugar la lectura y escritura del mundo por medio de la estadística para cuestionar y desafiar situaciones críticas presentes en sus comunidades. Aquí fue evidente lo que plantean Zapata-Cardona y Marrugo (2019) cuando argumentan que incluir trabajos relacionadas con temas críticos de la sociedad (problemas ambientales, desigualdades sociales, sesgo de género, indicadores sociales, entre otros) ofrece elementos para que los sujetos se formen como ciudadanos críticos y conscientes que tienen la responsabilidad de participar en la sociedad y contribuir a su transformación, a medida que usan contenidos y aplican procedimientos y herramientas estadísticas.

## CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio revelan que la formación de profesores a partir de las investigaciones estadísticas es una oportunidad para el desarrollo de la conciencia crítica de los participantes. La formación del razonamiento estadístico de los participantes es fundamental para el

desarrollo de la conciencia crítica. Los profesores en formación requieren un conocimiento profundo de conceptos y técnicas estadísticas para estudiar empíricamente las crisis sociales, y para que la evidencia que dan los datos ayude en la constitución de posturas propias que garanticen la participación informada en la sociedad.

Este estudio también reveló que para que la conciencia crítica tenga lugar es necesario que los profesores en formación asuman posturas políticas frente a la ciencia. La estadística tiene un rol no neutral en la sociedad y los profesores en formación deben superar el simple conocimiento profundo de la ciencia hasta llegar a posicionarse críticamente con respecto a quién la usa, cómo se usa y para qué se usa. Los profesores en formación reconocieron la estadística como una herramienta poderosa para hacer evidente las inequidades y también para conseguir la justicia social.

Este estudio fue desarrollado con un grupo de profesores en formación, pero una futura investigación podría orientarse hacia los profesores en ejercicio, ya que, ellos también podrían beneficiarse de estas posturas críticas. Los profesores en ejercicio merecen una formación continuada que les permita un conocimiento profundo de la estadística para poner en cuestión las problemáticas socio políticas y contribuir a su transformación.

Los resultados de este estudio se sustentan en la información aportada por un reducido grupo de participantes. Valdría la pena extender este diseño metodológico a un número mayor de participantes para contrastar si los hallazgos son consistentes en el tiempo y en diferentes contextos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics—Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/LASE Study: The 18th ICMI Study*. Springer.
- Campos, C. R. (2016). *Towards Critical Statistics Education. Theory and practice*. Lambert Academic Publishing.
- Campos, C. R., Wodewotzki, M. L. y Jacobini, O. R. (2013). *Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática* (2da. ed.). Autêntica Editora.
- Denzin, N. K., y Lincoln, Y. (2012). *El campo de la investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa (Vol. 1)*. Gedisa.
- Engel, J. (2019). Cultura Estadística y sociedad: ¿Qué es la Estadística cívica? En J.M. Contreras, M.M. Gea, M.M. López–Martín, y E. Molina (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada.
- Ernest, P. (2002). Empowerment in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal* (15), 1–16.
- Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*

- (pp. 173–194). Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.
- Fram, S. M. (2013). The Constant Comparative Analysis Method outside of Grounded Theory. *The Qualitative Report*, 18(1), 1–25.
- Garfield, J. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education*, (10)3, 1–12. <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910676>
- Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. Springer.
- Giroux, H. A. (2006). *La escuela y la lucha por la ciudadanía. Pedagogía crítica de la época moderna* (4º ed.). Siglo XXI editores.
- Guerrero, O. (2008). Educación Matemática Crítica: Influencias teóricas y aportes. *Evaluación e Investigación*, 3(1), 63–78.
- Gutstein, E. (2003). Teaching and Learning Mathematics for Social Justice in an Urban, Latino School. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 37–73.
- Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: toward a pedagogy for social justice*. Routledge.
- Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Learning Discourse: Discursive approaches to research in mathematics education*, 46(1), 87–113.
- Lesser, L. M. (2007). Critical Values and Transforming Data: Teaching Statistics with Social Justice. *Journal of Statistics Education*, 15(1), 1–21.
- Lesser, L. M. (2014). Teaching Statistics for Engagement Beyond Classroom Walls. En K. Makar, B. d. Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 9)*. International Statistical Institute.
- Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cedes*, 28(74), 57–73. <https://doi.org/10.1590/S0101-32622008000100005>
- Loya, H. (2008). Los modelos pedagógicos en la formación de profesores. *Revista Iberoamericana de Educación*, 3(46), 1–8.
- Makar, K., y Rubin, A. (2009). A Framework for Thinking about Informal Statistical Inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82–105.
- Martínez-Castro, C. A. (2020). *Ciudadanía crítica en la formación inicial de profesores de estadística* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional Universidad de Antioquia.
- Pfannkuch, M., y Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking. En D. BenZvi, y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 17–46). Kluwer Academic Publishers.
- Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258–266. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.04.001>
- Sánchez, S. G. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Cooperativa Editorial Magisterio.

- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. (P. Valero, Trad.). Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).
- Skovsmose, O. (2016). Critical Mathematics Education: Concerns, Notions, and Future. En P. Ernest, O. Skovsmose, J. P. Bendegem, M. Bicudo, R. Miarka, L. Kvasz, y R. Moeller (Eds.), *The Philosophy of Mathematics Education* (pp. 9–12). Springer.
- Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 33–47. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9764-5>
- Weiland, T. (2019). Critical Mathematics Education and Statistics Education: Possibilities for Transforming the School Mathematics Curriculum. En G. Burrill, y D. Ben-Zvi (Eds.), *Topics and Trends in Current Statistics Education Research. International Perspectives* (pp. 391–411). Springer.
- Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–248.
- Zapata-Cardona, L. (2018). Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. *Yupana*, (10), 30–41. <https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7695>
- Zapata-Cardona, L., y Marrugo, L. M. (2019). Critical Citizenship in Colombian Statistics Textbooks. En G. Burrill, y D. Ben-Zvi (Eds.), *Topics and Trends in Current Statistics Education Research. International Perspectives* (pp. 373–389). Springer.

## **STATISTICS TEACHER EDUCATION IN A CRITICAL PERSPECTIVE**

### **ABSTRACT**

This chapter describes an experience in a mathematics teacher education program, based on statistical investigations, and its contribution to the development of critical awareness in prospective teachers. The goal of the study was to analyze the contribution of statistical investigations to the development of critical awareness, in the statistics teachers education programs. A qualitative methodology with a critical-dialectical approach was followed. The participants were 10 prospective teachers who were part of a statistics method course in a mathematics education program at a Colombian university. The main sources of information were the discussions of the participants when developing four statistical investigations, autobiographical writings and narrative writings. The results reveal that the statistical investigations contributed to the development of critical awareness of the participants in two dimensions. Critical awareness was evidenced (1) by invigorating statistical reasoning that helped participants in the empirical study of social crises and (2) by recognizing the political nature of statistics and assuming it as a powerful tool for participation and social transformation.

Keywords: Statistics education, critical education, teacher education, statistical investigations.

## **FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE ESTATÍSTICA EM UMA PERSPECTIVA CRÍTICA**

### **RESUMO**

Este capítulo descreve uma experiência em um programa de formação de professores de matemática, com base em investigações estatísticas, e sua contribuição para o desenvolvimento da consciência crítica em futuros professores. O objetivo do estudo foi analisar a contribuição das investigações estatísticas para o desenvolvimento da consciência crítica, nos programas de formação de professores de estatística. Foi seguida uma metodologia qualitativa com abordagem crítico-dialética. Os participantes foram 10 futuros professores que faziam parte de um curso de métodos estatísticos para ensinar em um programa de educação matemática em uma universidade colombiana. As principais fontes de informação foram as discussões dos participantes ao desenvolver quatro investigações estatísticas, escritos autobiográficos e escritos narrativos. Os resultados revelam que as investigações estatísticas contribuíram para o desenvolvimento da consciência crítica dos participantes em duas dimensões. A consciência crítica foi evidenciada (1) pelo revigoramento do raciocínio estatístico que ajudou os participantes no estudo empírico das crises sociais e (2) pelo reconhecimento da natureza política da estatística e assumindo-a como uma poderosa ferramenta de participação e transformação social.

Palavras-chave: Educação estatística, educação crítica, formação de professores, investigações estatísticas.

CINDY ALEJANDRA MARTÍNEZ-CASTRO  
*Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia*  
[cindy.martinez@udea.edu.co](mailto:cindy.martinez@udea.edu.co)  
<https://orcid.org/0000-0001-6846-0693>

Es licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas y magister en educación matemática por la Universidad de Antioquia en Colombia. Se desempeña como profesora de matemáticas en la educación primaria, en el sistema escolar colombiano, y ha impartido cursos de didáctica de la estadística y práctica pedagógica para futuros profesores de matemáticas, como docente de cátedra en la Universidad de Antioquia. Sus intereses de investigación se centran en la educación estadística y la formación de profesores de matemáticas.

LUCÍA ZAPATA-CARDONA  
*Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia*  
[lucia.zapata1@udea.edu.co](mailto:lucia.zapata1@udea.edu.co)  
<https://orcid.org/0000-0003-4266-5273>

Es profesora titular de la Universidad de Antioquia en los campos de las matemáticas, la estadística, la educación matemática y la investigación educativa. Es doctora en educación matemática por la Universidad de Georgia en los Estados Unidos. En los últimos años sus áreas de interés se han centrado en la formación de profesores, la educación estadística y la inclusión escolar. Pertenece al comité editorial de varias revistas en el campo de la educación matemática y ha colaborado con la edición de números especiales.

# AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: TRAJETÓRIAS DIDÁTICAS IMPLEMENTADAS POR UM PROFESSOR

CRISTIANE DE ARIMATÉA ROCHA  
RUTE ELIZBETE DE SOUZA ROSA BORBA

## RESUMO

O amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório requer um processo de ensino e aprendizagem idôneo, vivenciado desde cedo, perpassando a escolarização. A presente pesquisa objetiva categorizar e descrever trajetórias didáticas implementadas em lições de Combinatória por um professor do Ensino Médio (15 - 17 anos). Fundamentou-se na investigação do Enfoque Ontossemiótico da Instrução e Conhecimento Matemáticos, especificamente nas ferramentas teóricas de configurações e trajetórias didáticas. Foram filmadas seis lições sob as quais classificou-se as dimensões epistêmica, docente e discente das trajetórias didáticas. Constatou-se, na trajetória epistêmica, os estados atuante e argumentativo, configurado na resolução de problemas combinatórios e na discussão de procedimentos, demandando justificativas para as soluções propostas pelos estudantes. Na trajetória docente, observou-se o professor priorizar a regulação, essencialmente a partir do acompanhamento dos estudantes, atentando para comentários individuais, redirecionando, sempre que possível, a discussão para todos. A trajetória discente indicou a presença de argumentação, exploração e formulação, o que configura a aceitação dos estudantes pela resolução de problemas combinatórios. As trajetórias didáticas implementadas pelo professor nessa etapa indicam que o desenvolvimento do raciocínio combinatório prescinde de práticas que priorizem uso e comparação de diferentes procedimentos, e, para além da resolução, que alunos apresentem argumentos que justifiquem os procedimentos utilizados.

Palavras chave: Combinatória. Docente de Ensino Médio. Estratégias de Ensino. Trajetórias Epistêmica, Docente e Discente.

## INTRODUÇÃO

Há mais de cinquenta anos pesquisadores produzem discussões sobre o efeito de processos de ensino e aprendizagem no desenvolvimento de habilidades combinatórias em alunos. Fischbein, Pamput e Minzat (1970), Fischbein (1975), Schliemann (1988), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Borba, Rocha e Azevedo (2015), Lima (2015), Lima (2016), Coenen, Hof e Verhoef (2018), Rocha (2011; 2019), Rocha e Borba (2021), entre outros, defendem o papel de processos de ensino e aprendizagem na construção e ampliação do raciocínio combinatório.

Rocha, C. y Borba, R. (2022). Aulas de combinatória no ensino médio: trajetórias didáticas implementadas por um professor. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 385-411). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

Fischbein, Pamput e Minzat (1970) divergiram da proposição de Piaget e Inhelder (1951) sobre o desenvolvimento do conhecimento de operações combinatórias apenas na adolescência. Para Fischbein et al. (1970), a instrução sobre Combinatória, construída utilizando a junção de técnicas (instrução programada e aprendizagem por descoberta), promoveu a redução nas diferenças de desempenho entre alunos de Bucareste, com 10, 12 e 14 anos, em atividades de Combinatória. Fischbein et al. (1970, p. 269) afirmaram que “uma instrução bem conduzida pode determinar aquisições estruturais” com relação à capacidade combinatória e Fischbein (1975) reforça a necessidade do ensino específico para que a capacidade ampla de resolver problemas combinatórios seja alcançada.

Na Espanha, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.14-15) sinalizam a existência da inevitabilidade de “[...] estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de uma instrução adequada, já que o mesmo nem sempre se alcança espontaneamente ao chegar na idade adulta”.

No Brasil, um estudo comparativo sobre desempenhos de profissionais e de estudantes, com e sem familiaridade de problemas combinatórios, realizado por Schliemann (1988), indica que a experiência no dia a dia com a Combinatória possui influência no desenvolvimento do raciocínio combinatório, mas a vivência no âmbito da escola parece ser mais indicada para o melhor desempenho dos estudantes. Segundo a autora, a interação entre as experiências vivenciadas e a instrução escolar pode possibilitar ainda maiores avanços nesse desenvolvimento.

A pesquisa de Roa (2000) reforça que a Combinatória não se desenvolve de maneira espontânea, e, ainda, considera que mesmo estudantes espanhóis que estudaram matemática avançada precisam de ensino específico em Combinatória, discutindo inclusive diferentes configurações combinatórias, sendo corriqueiras ou não corriqueiras.

Lima (2016) investigou o ensino de Combinatória proposto por dois professores brasileiros de Ensino Médio. A autora descreve que o processo observado iniciou a partir da definição de cada problema combinatório, apresentando as fórmulas, seguido da resolução de um exemplo pelo professor e, posteriormente, resoluções individuais no caderno pelos alunos e correção dos exercícios no quadro. Tal escolha didática no processo de ensino de Combinatória pode limitar a postura adotada pelos alunos no Ensino Médio, incentivando um comportamento de recepção de informações, pois, segundo a autora, apesar da “[...] valorização da fórmula, os professores poderiam permitir que os alunos experimentassem outras formas [...]. Sem essa orientação, não é dada ao aluno a possibilidade de utilização de outras técnicas” (Lima, 2016, p.107).

Complementando essa discussão, uma alternativa ao uso de fórmulas combinatórias na resolução de problemas combinatórios é a utilização do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), uma vez que se mostra adequada a uma variedade de problemas combinatórios, podendo ser utilizada desde a introdução de noções da multiplicação (geralmente aos 9 a 10 anos de idade) até a etapa final da escolarização básica (aos 17-18 anos). Lima (2015) discute a importância dessa estratégia de resolução, elucidando aspectos de sua aplicação na resolução de problemas combinatórios.

O PFC pode ser aplicado aos diferentes tipos de problemas combinatórios, sejam eles condicionais ou não condicionais, e, também, é base das fórmulas empregadas no ensino da Análise Combinatória para a construção dos diferentes tipos de problemas [...] estudados neste campo da Matemática. (Lima, 2015, p.17)

Consoante ao exposto, o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória deve buscar promover o uso de diferentes técnicas e estratégias de resolução. Se um professor escolhe iniciar o processo de ensino de Combinatória apresentando os tipos de problemas e suas fórmulas, pode ocorrer a compreensão errônea que as representações de fórmulas (combinação, arranjo, permutação) são as únicas maneiras de abordar os problemas combinatórios, ou ainda, a restrição do conceito à sua representação já que poucos problemas combinatórios podem ser resolvidos com uso apenas de fórmulas combinatórias. Na mesma direção, estudos como de Hadar e Hadass(1981), Fischbein e Gazit(1988), Pessoa e Borba (2010), Araujo e Rocha (2018) apontam como um dos erros apresentados pelos estudantes o uso inadequado de fórmulas, seja por causa da identificação incorreta do tipo de problema, seja devido ao uso incorreto de notações simbólicas, provocando equívocos de natureza operacional.

Ademais, pesquisas ressaltam o papel do professor e das suas orientações no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Coenen, Hof e Verhoef (2018, p.78) sugerem que os estudantes requerem acompanhamentos durante o processo e enfatizam que se a orientação for realizada adequadamente “[...] fortalecerá a confiança dos alunos em sua abordagem e em suas soluções”. Acrescenta-se que a orientação do professor que ensina Combinatória no Ensino Médio, deve ir além da apresentação de exemplos de problemas, da explicação da resolução, ou ainda, da indicação do caminho ou dos procedimentos que devem ser adotados no processo de resolução de problemas combinatórios. Roa, Navarro e Batanero (2002, p. 23) questionam as metodologias adotadas frequentemente no ensino de Combinatória principalmente aquelas “com ênfase excessiva nas definições das operações combinatórias e na identificação das mesmas como um único método de resolução de problemas”.

A pesquisa de Godino, Batanero e Roa (2005, p.24) investigou a resolução de problemas combinatórios por alunos do Ensino Médio. Os autores apontam a variação de objetos combinatórios utilizados na resolução, diversificando, inclusive em um mesmo problema, o que representa “[...] a pluralidade de conhecimento usada pelos alunos na solução de problemas combinatórios e a diversidade do significado pessoal (idiossincrático e sistêmico) dos alunos para a Combinatória elementar.

Rocha (2011), em entrevistas realizadas com professores de Ensino Fundamental e Médio sobre conhecimentos para ensinar Combinatória, constatou algumas dificuldades apontadas pelos participantes da pesquisa no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória. Segundo a autora, os professores de diferentes níveis de escolarização apontam a necessidade do trabalho desde cedo com a Combinatória e reflexões sobre a mediação na resolução de problemas combinatórios, indicando como dificuldade a não valorização de estratégia única de resolução como um dos pontos que precisa ser alterado. Na mesma pesquisa, os professores de Ensino Médio atentam para dificuldades de alunos com relação à diferenciação de problemas combinatórios, além de indicar a necessidade de implementar nas suas práticas docentes a discussão de contextos diferenciados, estratégias diversificadas, abordagem de características dos problemas combinatórios e a relação com outros conceitos. Rocha e Borba (2021) defendem a inserção de práticas direcionadas à reflexão de “diferentes domínios de conhecimento para ensinar Combinatória na formação inicial e continuada de professores” (Rocha e Borba, 2021, p 65).

Defende-se, portanto, a adoção de práticas idôneas no ensino e aprendizagem de Combinatória que adote características da metodologia de resolução de problemas, seja na escolha de problemas combinatórios (variando os tipos de problemas, a ordem de grandeza da solução, a complexidade de problemas combinatórios – simples, condicionais, composto), na exploração de contextos de enunciado (relacionando com outros conceitos, outras áreas de conhecimento), no acompanhamento dos estudantes, observando a discussão e valorizando as estratégias pessoais de resolução (comparando sempre que possível, problematizando sobre as diferentes características dos problemas, sobre a sistematização de estratégias enumerativas, de árvore de possibilidades), na comparação de diferentes procedimentos de resolução de problemas (dividindo o problema em subproblemas, refletindo sobre a solução apresentada) e na comunicação de estudantes sobre aspectos relativos às características desses problemas (escolha, ordenação, repetição) a fim de oportunizar ao estudante a criação de argumentos combinatórios, uma vez que a resolução de um problema não termina em sua solução.

Com base no exposto, verifica-se a amplitude das investigações que abordam o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória em diferentes países, e, aqui, reiteramos o papel do professor nessas propostas. O Geração – Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico da Universidade Federal de Pernambuco, no Brasil, coordenado pela professora Rute Borba, com vistas a promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação Básica, vem realizando pesquisas em diferentes níveis de escolarização e modalidades de ensino, seja com estudantes ou professores, e busca promover a divulgação desses estudos (Geração, 2022). Borba, Rocha e Azevedo (2015, p.1375) apresentam algumas das pesquisas realizadas no grupo e salientam que a “apropriação de conhecimentos [Combinatória e ensino de Combinatória] podem influenciar o desenvolvimento do raciocínio combinatório por parte de estudantes de todos os níveis e modalidades de ensino”.

Convergindo com as reflexões levantadas anteriormente, Rocha (2011, p.175) evidencia que “O professor vive o conflito de decidir: o que é melhor e como é melhor chegar ao aluno? Como atender as demandas dos alunos, a natureza dos problemas combinatórios, da escola, da aula, da vida? Ainda, segundo Rocha (2019), o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória:

[...] ultrapassa o caráter exclusivamente matemático, permeando diferentes pontos de vistas durante a sua implementação. A ação complexa de ensinar envolve aspectos diversos que perpassam, dentre outros, a escolha dos problemas combinatórios abordados com maior ou menor ênfase, a complexidade desses problemas, os procedimentos mais evidenciados, as conexões da Combinatória com a Matemática e com outras áreas; além de processos de aquisição de conhecimentos, dificuldades enfrentadas pelos estudantes, os recursos adequados para mediar o trabalho, a motivação dos alunos, atitudes negativas e positivas relativas à Matemática, a interação entre professor e alunos e a promoção de autonomia dos estudantes. (Rocha, 2019, p.34-35)

Perante todo o contexto e das inúmeras possibilidades de experiências reais com Combinatória, justifica-se investigações que descrevam como ocorre, na prática, o ensino de Combinatória e sobre o que os professores priorizam, ou ainda podem priorizar na construção dessa maneira de pensar. No entanto, o processo de ensino e aprendizagem é complexo e não ocorre de uma única maneira e, sim, pela construção de caminhos diversos. Nessa direção, Godino (2011, p.3) afirma que “não dispomos de receitas de como ensinar, mas isto não significa que não tenhamos certos conhecimentos que nos permitem tomar algumas decisões locais preferidas”.

A pesquisa discutida nesse capítulo se fundamenta no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemáticos (EOS) de Godino (2002, 2012), especificamente na ferramenta de análise de configurações e trajetórias didáticas, como objetivo de categorizar e descrever as trajetórias didáticas implementadas em aulas de Combinatória por um docente no Ensino Médio.

Nessa perspectiva, Godino, Rivas, Castro e Konic (2012, p.4) ressaltam a relevância das decisões e escolhas do professor de Matemática que vai além da “seleção e adaptação de situações-problemas que promovam a contextualização dos conteúdos” [...], como também nos avanços provocados “na organização de configurações e trajetórias didáticas idôneas”, levando em consideração diferentes dimensões.

A fim de consubstanciar a discussão, a estrutura desse trabalho pauta-se em quatro seções. Na primeira apresenta-se sucintamente o marco teórico da pesquisa, exemplificando, quando possível, com indicações em Combinatória. Posteriormente apresentamos o método, a fim de indicar o procedimento de coleta de dados, seguida da sessão de apresentação e análise dos resultados. Em conclusão, as considerações acerca da pesquisa e suas implicações são apresentadas.

### MARCO TEÓRICO

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemáticos (EOS), elaborado por Godino e colaboradores, a partir da década de 1990, subsidia a avaliação dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Para esse fim, Godino (2002e2012) apresenta ferramentas teóricas e metodológicas que auxiliam na descrição, explicação e avaliação das interações e práticas em sala de aula. De acordo com Godino (2012), o EOS estabelece cinco níveis de análise do processo de ensino e aprendizagem que perpassa variadas noções teóricas que são utilizadas para: 1) averiguar o sistema de práticas matemáticas relacionadas a um objeto matemático; 2) elaborar as configurações de objetos e processos matemáticos, emergentes e participantes das práticas matemáticas; 3) analisar as configurações didáticas e as trajetórias didáticas apresentadas; 4) identificar a dimensão normativa verificando normas e metanormas e, por fim, 5) valorar a idoneidade didática.

Como se pode observar, a abrangência das ferramentas teóricas que fundamentam as análises no EOS é ampla, portanto, o presente trabalho centra-se nas discussões das configurações didáticas e trajetórias didáticas. Assis, Frade e Godino (2013) definem que uma *configuração didática* é possível de ser observada ao longo de um intervalo de instrução determinado a partir do início e fim da resolução de um problema. De acordo com Godino (2012, p.55), tal configuração é a ferramenta fundamental para analisar o processo de instrução e se ampara “como sistema articulado de papéis docentes e discentes, a propósito de uma configuração de objetos e processos matemáticos ligados a uma situação-problema”. Tais configurações didáticas, de acordo com Godino, Contreras e Font (2006, p. 67), também são compreendidas como “a sequência interativa de estados das trajetórias que tem lugar a partir de uma situação-problema (ou tarefa)”.

Destarte, para esses autores, as configurações didáticas de referência são categorizadas em magistral, a-didática, dialógica e pessoal. A primeira, magistral, fundamenta-se na exposição do conteúdo pelo professor e, depois, na exercitação dos problemas pelos alunos; na configuração a-didática o aluno toma para si o processo de resolução de problema, sem necessariamente ser orientado pelo professor; na dialógica o professor trabalha com a formulação e validação e alunos se responsabilizam pela exploração da resolução dos problemas; com relação à configuração pessoal os alunos resolvem exercícios, predominando o estudo pessoal, o que geralmente ocorre fora da sala de aula.

As ferramentas teóricas de configuração didática e trajetória didática, conforme Godino et al. (2006, p.66), se constituem como um procedimento sistemático para “identificar regularidades na sequenciação de estados em cada trajetória ou nas interações entre duas ou mais trajetórias”. Por meio das trajetórias didáticas podemos perceber a forma com que o professor e seus alunos se comportam e relacionam-se com diferentes componentes da Combinatória, além de indicar os estados mais frequentes em cada trajetória.

Por conseguinte, Godino et al. (2006, p.47) ressaltam que em um processo de ensino e aprendizagem são apresentados uma sequência de possíveis estados, produzindo “uma trajetória amostral do processo que descreve a sequência particular de funções ou componentes que aparecem no lugar ao largo do tempo”. Para descrever tais estados, os autores distinguem dimensões que estruturam a trajetória didática e são indicadas a partir da observação na sala de aula. Tais dimensões são definidas no Quadro 1.

**Quadro1**– *Tipos de trajetórias didáticas*

<b>Trajectoria</b>	<b>Definição</b>
Epistêmica	Distribuição temporal dos significados institucionais implementados ao longo de um processo de ensino e aprendizagem.
Docente	Sequência de atividades realizadas pelo professor no estudo.
Discente	Ações desempenhadas pelos alunos no processo.
Cognitiva	Qualificação dos conhecimentos dos alunos por meio da noção de significado pessoal.
Afetiva	Atuação no estado emocional apresentado pelo aluno durante o processo de ensino e aprendizagem.
Mediacional	Análise dos usos potenciais e implementados dos recursos e suas consequências cognitivas.

**Fonte:** Adaptado de Godino et al. (2006)

Ademais, o papel de tais ferramentas é reforçado por Godino et al. (2006, p.6), uma vez que consideram inclusive “os elementos eventuais que produzem mudanças em cada uma das trajetórias anteriormente vivenciadas, pela necessidade de adaptar o ensino planejado para as características e necessidades dos alunos”. Decerto, observa-se nesse aporte uma ferramenta para se aproximar das diferentes possibilidades para a descrição das aulas de Combinatória.

No que concerne à discussão desse trabalho são abordados, especificamente, as trajetórias epistêmicas, docentes e discentes delineadas pelo professor e seus alunos em aulas de Combinatória no Ensino Médio. Por conseguinte, discute-se tais trajetórias e seus estados com exemplos elaborados a partir do objeto matemático aqui apresentado, a Combinatória.

A trajetória epistêmica é traçada a partir dos componentes do significado institucional implementado, compreendido por Godino et al. (2006) por situações, ações, linguagens, conceitos, proposições e argumentos.

Com base nessa categorização, podemos identificar os estados da trajetória epistêmica ao longo do processo de ensino. Portanto, permite, de acordo com Godino et al. (2006, p.51), “caracterizar o significado institucional efetivamente implementado e sua complexidade onto-semiótica”. O Quadro 2 sistematiza e apresenta os estados relativos a essa trajetória.

**Quadro 2** – *Possíveis trajetórias epistêmicas*

<b>Estados</b>	<b>Definição</b>	<b>Exemplos na Combinatória</b>
Situacional (E1)	Anuncia um exemplo de problema	Quando são enunciados tipos de problemas combinatórios, contabilizados também qualquer alteração, mudança ou proposta de problemas combinatórios;
Atuante (E2)	Desenvolve um modo de resolver o problema	Quando promove estudo da maneira de resolver problemas combinatórios, focalizando diferentes procedimentos e técnicas de resolução traçados pelo professor ou alunos;
Linguístico (E3)	Introduz notações e representações	Quando são apresentadas notações, representações gráficas, fórmulas, termos e outras características de linguagem relacionadas à Combinatória;
Conceitual (E4)	Fórmula ou interpreta definições dos objetos	Quando direciona para interpretações de definições dos tipos de problema combinatórios e/ou de objetos combinatórios implementados;
Proposicional (E5)	Enuncia ou interpreta propriedades	Quando se retrata as propriedades/ invariantes relativas à Combinatória, apontando regras relativas às situações problemas;
Argumentativo (E6)	Justifica as ações ou propriedades adotadas	Quando se apresentam justificativas das ações adotadas ou das propriedades enunciadas.

**Fonte:** Adaptado de Godino et al. (2006)

Durante a aula de Combinatória, o professor escolhe o problema combinatório que será abordado, que por sua vez, pode ser simples, condicional ou composto (situacional); pode selecionar e apresentar a resposta de um problema combinatório aos alunos, ou atribuir a responsabilidade da resolução para os alunos (procedimental); apresentar, plausivelmente, uma única representação, como fórmulas combinatórias ou variadas (linguagem); optar por iniciar a aula enunciando as propriedades de problemas combinatórios (conceitual), ou apenas decidir enunciar e exemplificar o Princípio Fundamental da Contagem (proposicional), é válido, inclusive, preferir explicitar uma justificativa ou dialogar para que estudantes consigam explicitar os argumentos (argumentativa). Em suma, delineando sua trajetória epistêmica.

As funções que o professor desempenha nas aulas são registradas em sua trajetória docente. Com vistas para categorizar essa função, utilizou-se a ferramenta de trajetórias docentes proposta por Godino et al. (2006, p. 56) a fim de acompanhar “a sequência de atividades exercidas pelo professor durante o processo de estudo de um conteúdo ou tema matemático”. No Quadro 3 as funções docentes foram definidas e exemplificadas.

**Quadro 3** – *Possíveis trajetórias docentes*

<b>Funções Docentes</b>	<b>Definição</b>	<b>Exemplos na Combinatória</b>
Planejamento (DO1)	Apresenta o design do processo ou seleção dos conteúdos pretendidos	Quando seleciona as atividades combinatórias propostas nas aulas.
Motivação (DO2)	Desenvolve um clima de afetividade, respeito, estimula o trabalho individual ou cooperativo com fins didáticos.	Quando promove o envolvimento dos alunos no processo de resolução de problemas combinatórios, instigando a participação nas resoluções, criando um ambiente propício para diálogo e troca de ideias, seja individual ou coletivo.
Atribuição de Tarefas (DO3)	Direciona e conduz o processo, distribuindo o tempo, adaptando tarefas, orientando e estimulando as funções discentes	Quando organiza a distribuição do tempo ao longo do processo de resolução de problemas combinatórios delegando o momento de trabalho dos estudantes individual, a socialização das experiências no grupo, ou, ainda, promove a alterações de enunciado a partir das necessidades observadas.
Regulação (DO4)	Fixa regras, recorda e interpreta conhecimentos prévios essenciais para o andamento do estudo. Reorganiza o planejamento oportunamente.	Quando realiza ações para fixação de regras (propriedades de problemas combinatórios como ordenação, repetição); explora contexto do enunciado; retoma experiências vivenciadas em sala, mobilizando conhecimentos prévios.

<b>Funções Docentes</b>	<b>Definição</b>	<b>Exemplos na Combinatória</b>
Avaliação (DO5)	Observa e valora o estado de aprendizagem atingido em diferentes momentos (inicial, final, durante) e acompanha dificuldades individuais percebidas	Quando acompanha o processo de aprendizagem dos estudantes a partir de respostas, justificativas apresentadas, corrigindo ou propondo situações para dirimir as dificuldades individuais detectadas, apresentadas em momentos críticos, inicial, final ou durante o processo.
Investigação (DO6)	Reflete e analisa o desenvolvimento do processo a fim de propor mudanças futuras, articula os distintos momentos do processo de estudo	Quando reflete sobre o processo de ensino e aprendizagem, as modificações ou justificativas das ações tomadas ao longo das aulas.

**Fonte:** Adaptado de Godino et al. (2006)

Consoante às reflexões exibidas, Rocha (2019, p.35) reitera que as decisões locais apresentadas ao longo da trajetória epistêmica “podem ser preferidas pelos professores ao longo da implementação de aulas de Combinatória, no entanto é importante que as escolhas efetuadas pelo professor e as decisões tomadas estejam adequadas aos objetivos que se deseja alcançar”.

Em concordância com Nogueira (2015, p.212) “As questões ligadas à aprendizagem dos estudantes estão fortemente relacionadas com a qualidade das experiências formativas que lhes são proporcionadas pelos seus professores”.

As trajetórias docentes implementadas se fundamentam no conhecimento didático-matemático do professor (Pino-Fan y Godino, 2015), em termos da dimensão matemática, dimensão didática e dimensão meta didático-matemática. De acordo com Font, Planas e Godino (2010, p.6), pode-se compreender “o discurso do professor como um componente de sua prática profissional”. Para os autores o discurso do professor pode gerar práticas operativas (resolução de problemas) e discursivas (reflexões sobre as resoluções) nos alunos.

Por conseguinte, com o propósito de conhecer como funções docentes se intercalaram às funções discentes, foi aplicada a ferramenta de trajetória discente. Godino et. al. (2006, p.61) afirmam que a trajetória discente é definida como “o sistema de funções/ações que desempenha um aluno a propósito de uma configuração epistêmica”. De fato, o papel do aluno nas trajetórias discentes deve ser acompanhado e a responsabilidade pela construção de sua própria aprendizagem partilhada.

Em linha com o discutido, Batanero et al. (1996, p. 98) afirmam que "a comunicação oral e escrita em sala de aula, realizada pelo professor e pelos alunos, é considerada um aspecto determinante

central do que os alunos aprendem sobre matemática”. Vale considerar o que apontam Assis et al. (2013, p.754) que para ensinar Matemática

[...] não basta dispor de situações ricas ou criar um espaço para que os alunos expressem o que pensam, nem é suficiente avaliar suas ideias como certas ou erradas. É preciso que o professor questione e problematize as ideias dos alunos, gerenciando as distintas configurações e padrões de interação para estabilizar a negociação de significados e otimizar a aprendizagem.

No Quadro 4 exibe-se alguns de possíveis estados das funções discentes assumidas ao longo de um processo de ensino e aprendizagem.

**Quadro 4**– *Possíveis trajetórias discentes*

<b>Funções Discentes</b>	<b>Definição</b>	<b>Exemplos na Combinatória</b>
Aceitação do compromisso (A1)	Adotam uma postura positiva no estudo e de cooperação com os colegas	Quando apresenta uma atitude positiva com relação aos problemas combinatórios propostos e ações cooperativas com os colegas.
Exploração (A2)	Buscam conjecturas ou modos de resolver os problemas propostos	Quando o aluno apresenta sugestões para explorar o problema combinatório, como procedimentos enumerativos, ou discute conjecturas e exibe propostas de diferentes procedimentos de resolução.
Memorização (A3)	Recordam, interpretam e seguem regras (conceitos e proposições) e do significado dos elementos linguísticos em cada situação	Quando os alunos fazem uso de conceitos e propriedades dos tipos de problemas combinatórios, ou ainda, linguagens (expressões, notações, entre outras) já indicadas pelos professores em aulas anteriores.
Formulação (A4)	Formulam soluções para as tarefas propostas, sejam para o professor, para a classe ou para o grupo	Quando os alunos apresentam soluções dos problemas combinatórios propostos, para o professor, toda a sala ou para um grupo. Nessa função pode ainda ser acrescentada a formulação de problemas combinatórios, seja a partir de alterações no enunciado ou modificações do contexto.
Argumentação (A5)	Justificam conjecturas aos colegas ou ao professor	Quando os alunos apresentam justificativas para as conjecturas propostas na resolução de um problema combinatório. Por exemplo, a percepção que a ordem altera o número de possibilidades.
Procura por informação (A6)	Solicitam informações ao professor ou aos colegas	Quando os estudantes solicitam informações ao professor ou aos colegas para dirimir as dúvidas durante a resolução do problema combinatório, ou com relação ao enunciado, ao contexto, entre outros.
Exercitação (A7)	Fazem tarefas rotineiras para dominar técnicas	Quando os alunos resolvem problemas combinatórios rotineiros presentes na sessão do livro didático sobre arranjo, ou aplicam regras de simplificação de fatorial em exemplos de fixação.

Funções Discentes	Definição	Exemplos na Combinatória
Recepção de informação (A8)	Recebem informações com relação a maneiras de fazer, nomear, descrever ou validar	Quando os alunos apenas recebem informações, seja de uma fórmula aplicada a determinado tipo do problema, seja a respeito de nomenclatura comumente utilizada.
Avaliação (A9)	Realizam avaliações propostas pelo professor ou auto-avaliações	Quando os alunos fazem autoavaliação durante a resolução de problema.

**Fonte:** Adaptado de Godino et al. (2006)

Em face do exposto, defende-se a relevância de pesquisas que descrevam e reflitam sobre os caminhos traçados pelos professores, acompanhando as trajetórias didáticas implementadas, a fim de indicar práticas para processos de ensino e aprendizagem idôneos, em especial, de Combinatória.

## MÉTODO

Detalha-se, nessa seção, o percurso metodológico norteado pelas ferramentas teóricas do EOS, especificamente as configurações didáticas e as trajetórias didáticas supracitadas. Ao aprofundar a investigação sobre o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, a presente pesquisa delimitou-se a observar a ação de um professor, sua turma e as aulas destinadas ao processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

A escolha do professor se justifica, pois, o mesmo apresentou, ao longo de uma entrevista anteriormente realizada, domínios de conhecimento para ensinar Combinatória, principalmente com relação ao conhecimento especializado do conteúdo (Rocha, 2011). A coleta de dados ocorreu no ano de 2015, e o professor detinha 15 anos de experiência no Ensino Médio. Além da graduação em Matemática, encontrava-se cursando o Doutorado em Educação Matemática. O período de coleta foi combinado com o professor, delimitando um mês de observação nas aulas do 2º ano do Ensino Médio em uma escola pública da região metropolitana do Recife em Pernambuco. A turma era formada por estudantes com idades entre 16 e 18 anos e constituída por 24 alunos. O número de alunos por sala representa uma boa condição para as aulas, uma vez que nesse nível escolar, encontramos salas com cerca de 30 a 50 estudantes.

A coleta das informações foi classificada, com base em Flick (2009), como observação não participante. As aulas foram videogravadas e transcritas, o que segundo Powel e Quintaneiro da Silva (2015), proporciona a visualização das informações tantas vezes quanto necessárias, evitando interpretações prematuras e potencializando a interpretação dos dados.

A partir da transcrição foram produzidos cerca de 2200 registros nos seis encontros, que foram agrupados em 978 unidades de análise, determinadas pelo início e fim da ação observada. As unidades de análise (ua) foram, por sua vez, classificadas em 43 configurações didáticas, explicitando, desse modo, as falas e registros gestuais e do quadro branco, de maneira ordenada com relação à sua apresentação cronológica nos vídeos.

As práticas matemáticas concretizadas nas aulas centraram-se na resolução de problemas combinatórios, envolvendo os alunos na busca pela solução. Era a primeira vez ao longo dessa etapa de escolarização que a Combinatória estava sendo discutida com os alunos. Vale salientar a ênfase do professor em configurações didáticas do tipo dialógicas, ou seja, na qual o diálogo entre professor e alunos está mais presente, principalmente visando a produção de conhecimentos sobre procedimentos de resolução de problemas combinatórios e a explicitação de justificativas para validá-los. A função do professor era de mediar, apresentando os problemas, trazendo para a sala discussões de pequenos grupos e de validar a solução a partir da discussão apresentada. Configurações magistrais foram verificadas no final da aula, geralmente quando os alunos apresentavam dúvidas e não conseguiam por meio da discussão saná-las e usualmente ocorriam ao final da aula. Nas transcrições o professor foi identificado por P e os estudantes de A1 a A24, para garantir o anonimato dos participantes.

No Quadro 5 apresentamos brevemente a descrição das aulas de Combinatória observadas.

**Quadro 5** – Práticas desenvolvidas nas aulas de combinatória

Descrição Breve das práticas desenvolvidas	Tempo
Aula 1. Introdução intuitiva à noção do Princípio Fundamental da Contagem por meio do contexto de códigos conhecidos e utilizados pelos alunos. O professor sugeriu a leitura do livro sobre a história de emplacamento de carros e iniciou o processo de discussão dos diferentes códigos conhecidos pelos estudantes, tais como, CEP, celular, número de identificação pessoal, entre outros. O procedimento permitiu o uso de termos como dígitos, Algarismos, posição de dígitos, proximidades e integração com o conteúdo de geografia, tal como, como poderia ser um número de identificação pessoal na China (país mais populoso), como também propriedades combinatórias.	68 min
Aula 2. Exploração da resolução de diferentes problemas combinatórios realizada pelos alunos e na discussão com toda classe e o professor. De início, o professor propôs um problema no quadro e pediu a solução para os estudantes. No contrato entre professor e alunos existe a norma de quem tem que resolver o problema são os estudantes, o professor não responde os problemas. O professor acompanhou a turma e escreveu no quadro diferentes soluções para o problema proposto. A partir da discussão em sala, os alunos justificaram suas ideias e a partir da discussão o problema foi resolvido. Não foi apresentado o Princípio Fundamental da Contagem, mas os alunos utilizaram intuitivamente. As questões foram retiradas do livro didático e elaboradas a partir de características de alunos em sala de aula.	87 min
Aula 3. Exploração de resolução de problemas combinatórios para apresentar as noções de fatorial e permutação. O professor geralmente anotava as sugestões de respostas no quadro e solicitava aos estudantes que justificassem suas propostas, a fim de que escolhessem a que mais se adequava. Ao fim da aula o Princípio Fundamental da Contagem foi formalizado.	70 min
Aula 4. Exploração de resolução de problemas combinatórios para apresentar as noções de permutação, arranjo e combinação. Ao fim da aula as noções de fatorial e permutação foram formalizadas e foi feita a comparação entre problemas de arranjo e combinação.	64min
Aula 5. Diferenciação de problemas de arranjo e combinação por meio da resolução de problemas. Ao fim da aula foi apresentada a formulação dos conceitos e problemas de arranjo e combinação.	72min
Aula 6. Resolução de problemas combinatórios em pequenos grupos e discussão das diferentes respostas com todos, iniciando um processo de revisão do que foi apresentado. Avaliação de resolução de problemas apresentados por grupos.	58min

**Fonte:** Elaboração própria

Com base nas categorias propostas por Godino et al. (2006) para trajetória epistêmica, docente e discente, foram classificados os diferentes estados observados no decorrer das aulas implementadas. Com essas categorias observadas, pode-se ter a noção das prioridades que o professor possui no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio. Em suma, para esse recorte apresentam-se os movimentos implementados, no geral, nessas trajetórias e, para isso, utilizou-se a representação disposta em Nogueira (2015). Em seguida, a fim de apresentar alguns movimentos do

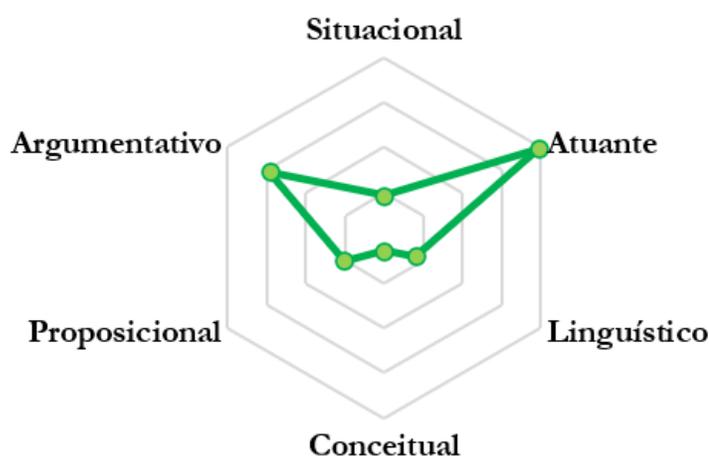
professor nas aulas de Combinatória, focaliza-se a discussão em uma das configurações didáticas observadas ao longo da transcrição.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com vistas a discutir e apresentar a frequência dos estados apresentados nas trajetórias implementadas nas aulas, foram elaborados diagramas radiais, construídos a partir da contagem dos estados produzidos ao longo do processo implementado.

Na Figura 1, indica-se a trajetória epistêmica implementada, sistematizada em um hexágono que apresenta os estados frequentemente encontrados nas aulas observadas.

**Figura 1.** *Trajetória epistêmica implementada nas aulas de Combinatória*



**Fonte:** Elaboração própria

Nota-se que nas aulas o estado mais evidenciado foi o atuante (E2), o que está relacionado à escolha em priorizar no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória a metodologia de resolução de problemas. Tendo em vista essa metodologia, verifica-se o acompanhamento do processo de busca por solução promovida nas lições a partir da participação dos alunos na resolução de problemas, determinando, assim, mais unidades de análise sejam apresentadas nesse estado.

No estado argumentativo (E6) delineado, solicitava-se aos estudantes a justificativa das escolhas ou dos procedimentos utilizados e, ainda, que escolhessem o procedimento correto dentre os que eram apresentados pelos próprios estudantes. Essa característica produziu justificativas pontuais do processo adotado, ora apresentados pelos alunos, ora implementado pelo professor. A presença do estado argumentativo nas aulas de Combinatória pode permitir discussões entre o contexto do problema, as diferentes propriedades/invariantes, relações entre Combinatória e diferentes conteúdos matemáticos, como também com outras áreas do conhecimento.

O estado proposicional (E5), menos implementado que os anteriores, priorizou a discussão de diferentes propriedades combinatórias presentes na diferenciação dos tipos de problema, evidenciando entre outras questões, a repetição de elementos, ou condições para presença do zero em situações para quantificar números de quatro algarismos, ou em senhas de quatro dígitos.

O estado situacional (E1) implementado, teve maior presença no sexto encontro cujo planejamento indicava que os alunos resolvessem os problemas combinatórios em grupos e depois apresentassem à sala para saber se haveria dúvidas ou resoluções diferenciadas, sendo os argumentos pouco apresentados.

O estado lingüístico (E3) foi constituído pela introdução de uma representação intuitiva do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) pelo professor, na qual os traços representam a quantidade de etapas de escolha para os quais devem ser indicados o número de opções disponíveis. Alguns termos da Combinatória foram introduzidos a partir da leitura da seção que inicia o capítulo de Combinatória do livro didático, outros a partir da discussão em sala, como a apresentação do PFC e das fórmulas combinatórias ocorridas apenas nos dois encontros finais.

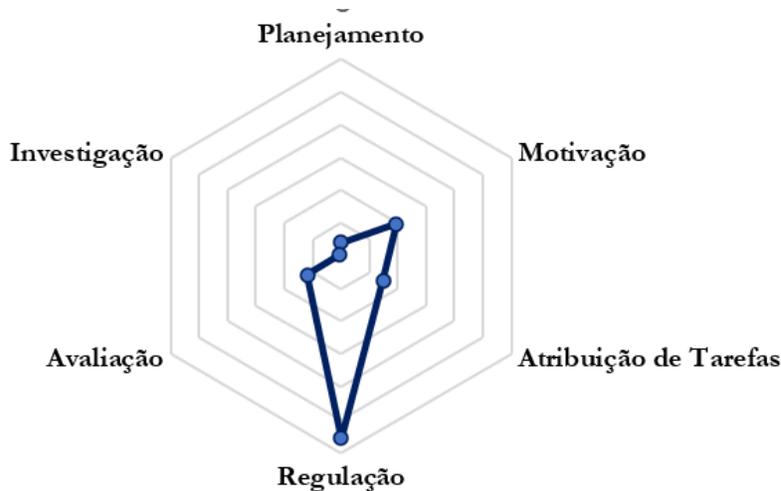
Em contrapartida, a escolha de fazer com que os alunos construam o conhecimento por meio da resolução de problemas, faz com que alguns estados (por exemplo, o conceitual) fiquem dependentes desse processo, sendo menos evidenciados. O estado conceitual (E4) foi apresentado quando os conceitos foram definidos, discutidos e introduzidos pelo professor, mas também se considera que noções conceituais podem ser trabalhadas sempre que há discussão sobre a linguagem, o procedimento, o argumento, as propriedades e as situações combinatórias.

A despeito de o atuante (E2) ser essencial para realização da atividade matemática, em especial para a Combinatória (a natureza relacionada à resolução de problemas), a variação entre os estados na trajetória epistêmica implementada auxilia no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes. Ademais, o professor tem que articular a variação dos tipos de situação problema, dos tipos de problemas combinatórios, a promoção de diferentes procedimentos, além de proposta de tarefas que permitam diferentes ações dos discentes (exploração, argumentação, formulação, entre outras).

Em seguida, na Figura 2, indicam-se os estados da trajetória docente implementada, também sistematizados em um hexágono que apresenta os estados priorizados pelo docente nas aulas de Combinatória observadas. Nota-se que o estado mais valorizado foi a regulação (DO4), optando-se pelas atitudes de acompanhar o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, percebendo pequenas alterações em expressões faciais dos estudantes, atentando a comentários entre alunos,

trazendo, sempre que possível, essas conversas para serem discutidas com toda a sala, focalizando nas diferentes percepções dos alunos sobre a resolução de problemas combinatórios.

**Figura 2.** *Trajetória docente implementada nas aulas de Combinatória*



**Fonte:** Elaboração própria

Apesar da importância do domínio conceitual, o professor observado considerou o aspecto interacional, indicado pela participação dos alunos na aula. Constatou-se ainda que o professor não respondia aos problemas. Essa regra foi construída ao longo do ano, deixando para os alunos a responsabilidade pela resolução dos problemas. Essa atitude permitiu que os alunos fizessem conjecturas sobre as respostas, buscando diferentes maneiras de achar a solução dos problemas e apresentassem argumentos com características combinatórias.

O estado de motivação (DO2) ocorreu mais frequentemente na segunda e quinta aula, que apresentaram o número maior de problemas combinatórios propostos. Nesse sentido, o professor buscava, sempre que necessário, motivar os alunos para que continuassem a realização das tarefas.

Na atribuição de tarefas (DO3), o professor administrava o tempo para que a solução do problema fosse encontrada pelos alunos. Assim, era comum observar ele fazer perguntas que direcionassem a busca pela solução. No sexto encontro o professor produziu uma ficha de atividades com problemas combinatórios para serem respondidos em grupos. Com isso, o professor teve que acompanhar a discussão em diferentes grupos, no sentido de possibilitar o confronto das soluções encontradas nos grupos. Nessa aula, os alunos estavam bastante motivados em sua realização, o que gerou um aumento na gestão dos momentos de socialização de respostas e no gerenciamento do tempo, assim como, permitiu um acompanhamento mais próximo, para que o professor pudesse perceber procedimentos de cada grupo de alunos.

Com relação à avaliação (DO5), ocorreu por meio do acompanhamento e orientação do professor ao longo das aulas, além da discussão entre pares, geralmente promovida pela discussão no grupo classe sobre a adequação de um procedimento de resolução em comparação a outros.

Quanto aos casos de planejamento (DO1) e investigação (DO6), foram realizados de maneira pontual. Devido à sua natureza, aparecem geralmente, respectivamente, no início e no final do processo de ensino e aprendizagem. Ressalta-se que o planejamento pode ser observado, mas nem sempre é mencionado pelo professor.

O índice de falas de estudantes em cada aula ratificou o bom nível de participação dos estudantes em aula. Para descrever os tipos de comportamentos explicitados pelos alunos, foram utilizadas características da trajetória discente definidas por Godino et al. (2006). Nogueira (2015, p.212) afirma que os comportamentos da trajetória discente indicam a “mobilização de competências cognitivas mais complexas”, posto que, neles os alunos conseguem explicitar as ideias que direcionam suas atitudes, além de auxiliar na apresentação de fatores como autonomia e responsabilidade pela resolução de problemas e a própria aprendizagem. Esses comportamentos foram sistematizados na Figura 3.

**Figura3.** *Trajétória discente implementada nas aulas de Combinatória*



**Fonte:** Elaboração própria

Em seu estudo, Nogueira (2015, p.212) observou apenas os estados de recepção da informação, exercitação e memorização, o que indica a necessidade do professor “fornecer indicações que permitissem aos alunos realizarem o trabalho definido para este processo de estudo”.

Na Figura 3 pode ser constatado, que diferentemente das práticas implementadas pelos professores descritos por Lima (2016), no caso estudado aqui, o professor possibilitou

comportamentos como a exploração (A2), a argumentação (A5), a formulação (A4) e a procura por informação (A6).

A resolução de problemas combinatórios foi aceita por grande parte dos estudantes que durante as aulas apresentaram a vontade de resolver os problemas apresentados pelo professor. Em alguns momentos o professor formulou problemas combinatórios envolvendo contextos da sala de aula e dos próprios estudantes para promover maior participação.

Destarte, observou-se a relação entre a trajetória docente de regulação, acompanhando o processo, realizando perguntas para que os alunos respondessem e apresentassem o que estavam pensando, alterando o comportamento, e ampliando a participação dos alunos. Assim, promoveu o surgimento de tais comportamentos dos estudantes, haja vista que os estudantes arriscaram respostas e construíram argumentos com base em diferentes experiências, promovendo não só o comportamento de exercitação (A7), uma vez que as fórmulas combinatórias exigem dos alunos conhecimentos sobre simplificação de fatoriais, mas, também, de exploração (A2) e formulação (A5) dos problemas propostos.

Em seqüência, exibe-se um extrato da configuração didática CD14 no Quadro 6. Trata-se de um episódio de discussão de um problema de arranjo ocorrido na segunda aula. O problema foi retirado do livro e transcrito no quadro.

**Quadro6** – *Extrato da configuração didática e trajetórias epistêmicas, docentes e discentes implementadas*

- 
- [364] Problema 1: Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório só estão vazias 7 cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras? ((o professor lê em voz alta os alunos tentam responder)) [Trajetória Epistêmica- Situacional] [Trajetória Docente- Atribuição de tarefas]
- [365] A1: 21. Dá  $7 \times 7 \times 7$  [Trajetória Discente – Aceitação de tarefa, Formulação] / A2: Dá isso não! [Trajetória Discente – Exploração]
- [366] P: Eu concordo com A2 que  $7 \times 7 \times 7$  não dá 21. O que vocês acham da ideia dela? ((Alunos conversam entre si)) P: A1 você disse 21 e  $7 \times 7 \times 7$  e um é diferente do outro... Qual você escolhe? [Trajetória Docente- Regulação]
- [367] A1: Eu escolho  $7 \times 7 \times 7$  [Trajetória Discente – Exploração] A1: Porque são três cadeiras! [Trajetória Discente – Argumentação][...] A1: Porque professor veja só. Na outra aula você fez aquela conta lá, que dava cinco vezes cinco, vinte e cinco! Aí aqui seria três vezes sete. [Trajetória Discente – Argumentação]; A10: Eu acho que seria três à sétima. Porque eu tenho sete cadeiras e cada cadeira eu tenho três pessoas que pode sentar. [Trajetória Discente – Argumentação]
- [368] P: Três à sétima? Vejam só, Olhem. Na questão que vocês comentaram do código, a gente tentou escrever algum código então vamos nos colocar... Nessas questões de análise combinatória algumas vezes a gente tem que se colocar na ação da pessoa, no caso aqui em três pessoas para se sentar. Então pergunto a vocês... Temos as opções que vocês disseram: ((Escreve no quadro)) –  $7 \times 7 \times 7$ ; outra que era 21; e a última foi  $3^7$ . [Trajetória Docente – Regulação] P: A primeira pessoa ao sentar ela tem quantas opções de cadeira? [Trajetória epistêmica – Atuante] [Trajetória Docente- Regulação]
- [369] A1: Sete / Alunos: Sete [Trajetória Discente- Exercitação]  
P: A segunda pessoa? [Trajetória Docente- Regulação]
- [370] A1: Sete/ A8: Seis/ A1: Sete/ A8: Acho Sete/ A2: Seis [Trajetória Discente- Exercitação]
-

---

P: Vamos lá defendam suas ideias? [Trajetória Docente- Atribuição de tarefas]

A4: Se já está sentado é seis. A2: Se um já está sentado então são seis! [Trajetória Discente- Argumentativo]

[371] A1: Se for assim então ao todo dá 210.

[372] P: Por quê?

[373] A1: Porque se você multiplicar 7 vezes 6, dá 42 ai vezes 5 dá...

[374] [...] P: No quadro estão possíveis respostas que seus colegas deram... Aí foi quando eu comecei a discussão de que a primeira pessoa ao sentar tem sete cadeiras livres, a segunda pessoa só terá seis cadeiras... e aí A2 o que você diz? ... Balançou? A1 então, você tem alguma sugestão? [Trajetória Docente- Atribuição de tarefas]

[375] P: A2 e A8 vocês estão falando aí? ((Professor nota a conversa paralela entre dois alunos e traz os pensamentos para discutir em toda sala)) [Trajetória Docente- Regulação]

[376] A2: Eu acho que é 3 vezes 7 vezes 3 vezes 6 vezes 3 vezes cinco [Trajetória discente- formulação]

[377] P: Por que esses 3 vezes..vezes..Porquê esse três? [Trajetória Docente- Regulação]

[378] A2: Porque são três pessoas

[379] P: Porque são três pessoas... Está um três ali então ele tem que multiplicar de alguma forma não é?... [Trajetória Epistêmica- conceitual] Alguém tem outra ideia? [Trajetória docente - Regulação]

A8: Eu tenho./P: Qual é a sua ideia?

[380] A8: Podia ser também... três vezes sete vezes dois vezes seis vezes um vezes cinco, porque vai saindo de cada um um. [Trajetória discente- Formulação e Argumentação]

[381] P: Poxa!!!! ((Anota no quadro  $3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1 \times 5$ )) Entendi! Porque vai diminuindo aqui não é ((aponta para o três, dois, um)) e aqui também não é ((aponta para o sete, seis, cinco)) [Trajetória Docente- Regulação]

P: Eu já disse enfarte nessa idade é fulminante. Tenham calma; [Trajetória Docente -Motivação] Bem vê só pessoal... Vou pegar essa sugestão de A8 ((aponta para  $3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1 \times 5$ ))... Na primeira escolha concordo contigo que são sete cadeiras, mas eu tenho quantas pessoas ali na primeira escolha? [Trajetória Docente- Regulação] [Trajetória Epistêmica- Atuante] / A2: Uma [Trajetória discente- Exercitação]

[382] P: Então eu tenho uma pessoa só escolhendo... Então esse teu três aqui não seria três, seria um! O que acontece é que na segunda escolha, também seria um. Porque é uma outra pessoa que está escolhendo. Então para gente não ficar com esse pensamento... ((registra no quadro alterando os números por um)) [Trajetória Epistêmica- Argumentativa]

[383] P: Então A2, na verdade, o que você está pensando aqui agora, pensando realmente que tem uma pessoa... é o que A1 estava discutindo antes. Porque retoma o  $7 \times 6 \times 5$ . [Trajetória epistêmica – proposicional] A primeira pessoa tem sete opções de cadeira, a segunda pessoa tem seis e a terceira pessoa tem cinco ((apresenta uma notação bastante comum para problemas combinatórios, semelhante ao Princípio Fundamental da Contagem)) [Trajetória Epistêmica- proposicional]

[384] P: A1 Parabéns! ((faz um sinal de positivo)) [Trajetória docente – Avaliação] Alunos batem palma [Trajetória discente – Avaliação]

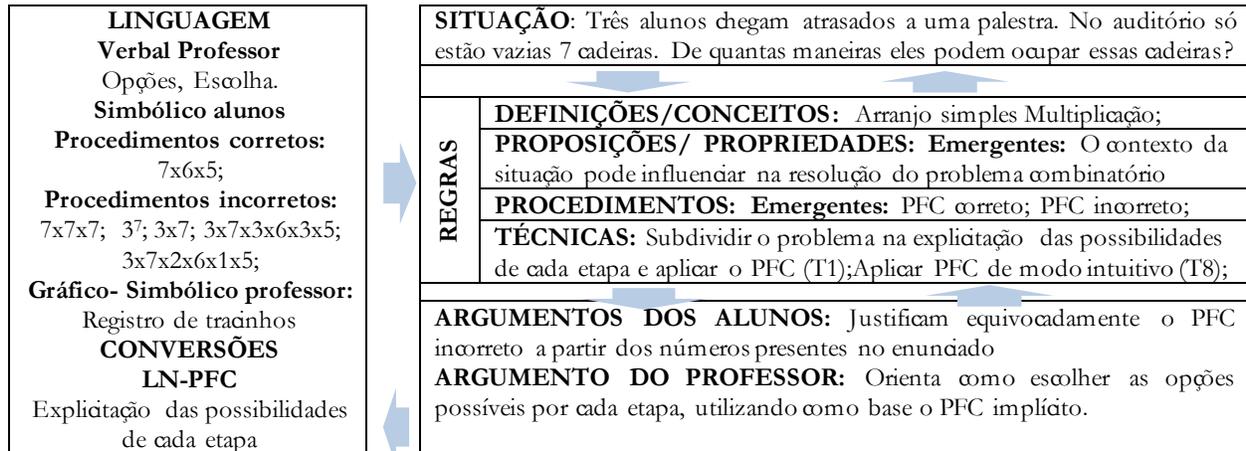
---

**Fonte:** Elaboração própria

Nesse episódio não se havia apresentado a definição ou fórmula de arranjo e os alunos foram convidados a apresentar formulações e argumentos. Por se tratar de uma configuração didática dialógica, o professor deixou a responsabilidade da exploração do problema para os alunos, mas acompanha registrando as diferentes soluções propostas.

Consoante ao exibido no quadro, indica-se na Figura 4 um esquema da configuração epistêmica relacionada à Configuração Didática 14, indicando elementos lingüísticos, situação problema, definições/conceitos, proposições, procedimentos e argumentos apresentados.

**Figura 4.** Esquema da configuração epistêmica relacionada à Configuração Didática 14 (CD14)



**Fonte:** Elaboração própria

Em uma única configuração didática, observam-se diferentes elementos presentes na trajetória epistêmica implementada. A partir da transcrição observa-se a variação de estados da trajetória epistêmica (situacional, atuante, conceitual, proposicional e argumentativa). Sobre o estado de *investigação*, constata-se a partir do observado, que o professor prefere iniciar o trabalho com conceitos combinatórios de forma intuitiva com base na resolução de problemas, explorando os diferentes sentidos e significados atribuídos pelos estudantes ao longo da resolução.

A partir da transcrição do extrato, vimos que o professor assume funções essenciais no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória. Entre os estados da trajetória docente de regulação e atribuição de tarefa, o docente apresenta questionamentos que confrontam os estudantes, além de registrar diferentes ideias sugeridas pela turma para a resolução do problema de arranjo.

Coenen et al.(2018) defendem o papel do acompanhamento do docente a fim de promover segurança. Verificou-se, nessa direção, que o docente por meio desse acompanhamento, traz para o grande grupo discussões que ocorrem entre duplas, promovendo maior aproximação com as trajetórias discentes de argumentação, exploração e formulação e contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos seus alunos.

Observa-se, ainda, que tais escolhas descrevem elementos cognitivos do desenvolvimento do raciocínio combinatório, especificamente ligados ao uso do PFC, apresentados por meio das justificativas atribuídas pelos estudantes para esses procedimentos equivocados de níveis pontuais do raciocínio combinatório: (a) Utilizar equivocadamente os números presentes na situação e propor operações. Nesse caso o aluno parece compreender o problema como produto de medidas (3x7); (b) Utilizar a ideia de arranjo com repetição para resolver o problema. Como o professor iniciou a

trajetória com um problema de arranjo com repetição, observa-se em outras situações alunos proporem a resolução com a ideia de multiplicação de números iguais, ou mesmo na representação de potenciação ( $7 \times 7 \times 7 = 7^3$ ); (c) Utilizar os números presentes na situação e a ideia de arranjo com repetição, apresentando uma junção das ideias anteriores ( $3^7$ ); (d) Utilizar o contexto e o número de pessoas na situação para as explicitações corretas do número de possibilidades das etapas de escolha. Como o professor utiliza-se do artifício de subdividir o problema na quantificação e explicitação de elementos de cada etapa, o aluno toma como base o contexto da situação e propõe o procedimento ( $3 \times 7 \times 3 \times 6 \times 3 \times 5$ ); (e) Utilizar a percepção que cada pessoa escolhe uma vez para as explicitações corretas do número de possibilidades das etapas de escolha, fazendo uso do número de possibilidades em cada etapa de escolha e da posição ( $3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1 \times 5$ ); (f) Aplicar corretamente o PFC ( $7 \times 6 \times 5$ ).

Constata-se a importância de situações respondidas anteriormente e que a noção compreendida no contexto da situação faz parte das proposições de resposta dos estudantes. Outrossim, verifica-se a importância do ensino na aquisição de aprendizagens de Combinatória, conforme indicado por Fischbein et al (1970), Batanero et al (1996), Roa (2000), Borba (2010), e mesmo os erros apresentados ao longo do processo de ensino podem ser ressignificados, tal como o professor fez, orientando o caminhar pela incerteza na busca compartilhada pelos estudantes para encontrar a solução de um problema combinatório. Por se tratar de um problema combinatório com o número alto de possibilidades, procedimentos enumerativos não podem ser utilizados. Como justificativa, em alguns momentos o professor enfatiza uma concepção que a Combinatória no Ensino Médio deve permear situações que utilizem o PFC, tal como apresentado por Rocha (2011), Lima (2016) e Lima (2015).

Ressalta-se, ainda, a trajetória mediacional implementada relativa aos usos do livro e quadro branco. O professor, visando possibilitar a discussão sobre tipos de problemas combinatórios, usa os problemas do livro e transcreve para o quadro, fazendo com que os estudantes decidam o tipo de problema em questão. Esse fato minimiza a presença de problemas combinatórios em seções identificadas, comuns em capítulos de Combinatória dos livros do Ensino Médio, o que não favorece a identificação do tipo de problema combinatório.

## CONSIDERAÇÕES

Como considerações deste estudo, o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio pode proporcionar estudar os tipos de problemas combinatórios, compreendê-los e diferenciá-los, permitindo ter uma visão geral das diferentes técnicas e modelos, mas quase sempre,

quando um problema combinatório é apresentado, é interessante deixar para o aluno a tentativa pessoal de uma solução.

As trajetórias epistêmicas, docentes e discentes implementadas nas aulas de Combinatória, nesse estudo, estabelecem uma justificativa para priorizar, pelo menos inicialmente, a busca pela solução de problemas combinatórios de maneira individual e coletiva, o que proporciona momentos de negociação de significados, procedimentos, contextos, entre os alunos, ou entre eles e o professor. Considera-se que as decisões do professor e os delineamentos por ele realizados conseguiram fazer com que os alunos participassem ativamente da aula. A conversa entre as duplas promove a discussão entre diferentes perspectivas e surgem justificativas em defesa das respostas apresentadas.

A orientação e acompanhamento do professor foram essenciais para por em jogo a discussão sobre o procedimento de resolução de problemas combinatórios, evidenciando o processo de construção do raciocínio combinatório, discutindo sobre os diferentes caminhos propostos pelos estudantes, valorizando erros e acertos, a fim de produzir argumentos válidos e adequados à solução.

Se o objetivo da aula é aprender ou construir um raciocínio combinatório amplo, o ensino focado na apresentação de tipos de problemas e técnicas de contagem não é suficiente. É preciso, a exemplo das trajetórias didáticas traçadas pelo professor desse estudo, priorizar diferentes procedimentos e argumentações, acompanhando os processos realizados pelos alunos, incentivando a participação e a responsabilidade dos alunos na resolução dos problemas combinatórios.

## REFERENCIAS

- Araujo, K. L. S. & Rocha, C. A. R. (2018). Como alunos de Ensino Médio Compreendem os Invariantes Prescritivos de Ordem e Repetição em Problemas de Arranjo e Combinação? *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, 19(2), 142-150.
- Assis, A., Frade, C., & Godino, J. (2013). Influência dos padrões de interação didática no desenvolvimento da aprendizagem Matemática: análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre sequências. *Bolema*, 27(47), 733-758.
- Batanero, C., Godino, J. & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento combinatorio*. Síntesis.
- Borba, R., Rocha, C. & Azevedo, J. (2015). Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. *Bolema*. 29(53), 1348-1368. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a27>
- Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na Educação Básica. Encontro Nacional de Educação Matemática, 10. *Anais [...]*, 1-10.
- Coenen, T.; Hof, F. & Verhoef, N. (2018). Combinatorial Reasoning to Solve Problems. In Hart, E.W.; Sandefur, J. (Eds.) *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: curriculum and research*. Springer: USA. p. 69-80.
- Fischbein, E. (eds.) (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

- Fischbein, E., Pampu, I. & Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In: Fischbein, E. (eds.) (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E. & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 193-198.
- Flick, U. (2009). *Introdução à Pesquisa Qualitativa*. Artmed.
- Font, V., Planas, N. & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico em educación matemática. *Infancia y aprendizaje*. Espanha, 33(2), 89-105.
- Geração. (2022). *Blog do Grupo de estudos em raciocínios combinatórios e probabilísticos do Centro de Educação da UFPE*. <http://geracaoufpe.blogspot.com/p/historico.html>
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In: Estepa, A. et al. (Eds.) Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 16, 2012. Jaén. *Actas*, 49 - 68.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 3-36.
- Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*. 12.435-443.
- Lima, A. (2015). *Princípio Fundamental da Contagem*: Conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco]
- Lima, I. (2016). *Aulas de Combinatória no Ensino Médio*: como estão ocorrendo. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco]
- Nogueira, I. (2015). Análise ontosemiótica de procesos instruccionais de matemática, melhoria de práticas e desenvolvimento profissional docente. *Revista de Estudios e Investigación em Psicología y Educación*. Extra(6), 209 -212.
- Pessoa, C. & Borba, R. (2010). O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*. 1, 1-22.
- Pino-Fan, L. & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Powell, A. & Quintaneiro da Silva, W. (2015). O vídeo na pesquisa qualitativa da Educação Matemática: investigando pensamentos matemáticos de alunos. In: POWELL, A. (org) *Métodos de pesquisa em Educação Matemática* usando escrita, vídeo e internet. Campinas, SP: Mercado de Letras.
- Roa, R. (2000). *Razonamiento Combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. [Tese doctoral, Universidad de Granada].

- Roa, R.; Navarro, V.; Batanero, C. (2002). Antecedentes y estado actual de la investigación en resolución de problemas en el campo de la combinatoria elemental. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 14, 1-23.
- Rocha, C. (2011). *Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco]
- Rocha, C. (2019). *Estudo de Combinatória no Ensino Médio à luz do Enfoque Ontossemiótico: o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas?* [Tese doutoral, Universidade Federal de Pernambuco].
- Rocha, C. & Borba, R. (2021). Conhecimentos de Combinatória para ensinar nas diferentes etapas da Educação Básica: com a palavra, professores! In: Borba, R. et al. (org). *Investigações em ensino e em aprendizagem: uma década de pesquisas do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração)*. Editora da UFPE, 41-68. <https://editora.ufpe.br/books/catalog/book/740>
- Schliemann, A. (1988). A compreensão da Análise Combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In. Nunes, T; Carraher, D.; Schliemann, A. *Na vida de dez na escola*. Cortez.

## **COMBINATORICS LESSONS IN HIGH SCHOOL: DIDACTIC TRAJECTORIES TRACED BY A TEACHER**

### **ABSTRACT**

The broad development of combinatorial reasoning requires a suitable teaching and learning process, experienced from an early age through schooling. The present research aims to categorize and describe didactic trajectories implemented in Combinatorics lessons by a High School teacher. It is based on the investigation of the Ontosemiotic Approach to Mathematics Instruction and Knowledge by Godino and collaborators, specifically on the theoretical tools of configurations and didactic trajectories. Six lessons were filmed under which the epistemic, teaching and student dimensions of the didactic trajectories were classified. It was observed, in the epistemic trajectory, the active and argumentative states, configured in the resolution of combinatory problems and in the discussion of procedures, demanding justifications for the solutions proposed by the students. In the teaching trajectory, it was observed that the teacher prioritizes the regulation, essentially from the students' monitoring, paying attention to individual comments, redirecting, whenever possible, the discussion to everyone. The students' trajectory indicated the presence of argumentation, exploration and formulation, which configures the students' acceptance for solving combinatorial problems. The didactic trajectories implemented in High School by the teacher indicate that the development of combinatory reasoning requires practices that prioritize the use and comparison of different procedures, and beyond the resolution, that students present arguments that justify the procedures used.

Keywords: Combinatorics. Secondary school teacher. Learning processes; Teaching Strategies. Epistemic, Teacher and Student Trajectories

## **LECCIONES DE COMBINATORIA EN LA ESCUELA SECUNDARIA: TRAYECTORIAS DIDÁCTICAS IMPLEMENTADAS POR UN PROFESOR**

### **RESUMEN**

El amplio desarrollo del razonamiento combinatorio requiere un proceso de enseñanza y aprendizaje adecuado, experimentado desde una edad temprana a través de la escolarización. La presente investigación pretende categorizar y describir las trayectorias didácticas implementadas en las clases de Combinatoria por un profesor de Secundaria. Se basa en la investigación del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y el Conocimiento de las Matemáticas de Godino y colaboradores, concretamente en las herramientas teóricas de las configuraciones y las trayectorias didácticas. Se filmaron seis lecciones en las que se clasificaron las dimensiones epistémica, docente y estudiantil de las trayectorias didácticas. Se observó, en la trayectoria epistémica, los estados activos y argumentativos, configurados en la resolución de problemas combinatorios y en la discusión de procedimientos, exigiendo justificaciones para las soluciones propuestas por los alumnos. En la trayectoria docente, se observó que el profesor prioriza la regulación, esencialmente a partir del seguimiento de los alumnos, prestando atención a los comentarios individuales, redirigiendo, siempre que sea posible, la discusión a todos. La trayectoria de los alumnos indicó la presencia de la argumentación, la exploración y la formulación, que configura la aceptación de los alumnos para la resolución de problemas combinatorios. Las trayectorias didácticas implementadas en Bachillerato por el profesor indican que el desarrollo del razonamiento combinatorio requiere de prácticas que

prioricen el uso y la comparación de diferentes procedimientos, y más allá de la resolución, que los alumnos presenten argumentos que justifiquen los procedimientos utilizados.

Palabras clave: Combinatoria. Profesor de secundaria. Estrategias de enseñanza. Trayectorias epistémicas, docentes y discente.

*CRISTIANE DE ARIMATÉA ROCHA*  
*Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, Brasil*

[cristiane.arocha@ufpe.br](mailto:cristiane.arocha@ufpe.br)  
<https://orcid.org/0000-0002-4598-2074>

Professora do Curso de Matemática-Licenciatura no Núcleo de Formação Docente da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Campus de Caruaru. Possui Licenciatura em Matemática, Mestrado e Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Foi professora de Matemática na Educação Básica e atuou como Técnica de Ensino de Matemática na Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. Participa Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico do Centro de Educação da UFPE (Geração), investigando sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória e na formação de professores de Matemática. Desde 2012 participa do Grupo de Trabalho 12 de Educação Estatística da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

*RUTE ELIZABETE DE SOUZA ROSA BORBA*  
*Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil*

[resrborba@gmail.com](mailto:resrborba@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-5098-4461>

Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (1985), Mestrado em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco (1993), PhD pela Oxford Brookes University (2002) e Pós-doutorado pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (2016). Professora aposentada da Universidade Federal de Pernambuco. Pesquisa e orienta estudos em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: desenvolvimento conceitual, análise de livros didáticos e formação de professores que ensinam Matemática. Vice-Presidente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), de 2010 a 2013; Coordenadora da Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec), de 2012 a 2014; Coordenadora do GT01 (Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental) da SBEM de 2012 a 2018; e líder do Grupo de Pesquisa (CNPq): Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico do Centro de Educação da UFPE (Geração), desde 2009.



# LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN EL PROFESORADO EN MATEMÁTICA: ALGUNOS APORTES PARA LA FORMACIÓN

CLAUDIA NOEMÍ FERRARI  
ANA ROSA CORICA

## RESUMEN

Esta investigación indaga la formación estadística de estudiantes de profesorado en matemática. Con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico presentamos los resultados de una investigación exploratoria, descriptiva e interpretativa. El estudio se desarrolló con profesores que se ocupan de la enseñanza de la estadística a estudiantes de profesorado en matemática, que realizan sus estudios en instituciones terciarias no universitarias en Argentina. Estas instituciones son las que respaldan gran parte de la oferta de formación docente en Argentina. La investigación requirió el análisis del diseño curricular y el media empleado por profesores destinado a estudiantes de profesorado. Los principales resultados indican un reduccionismo en las praxeologías en torno a la estadística, que se proponen estudiar en la formación de profesores en matemática. Estas praxeologías se centran en aspectos estadísticos descriptivos y resultan ser puntuales y rígidas. Se destaca la ausencia de tareas relativas a los géneros recolectar e interpretar, los que se asumen fundamentales en el estudio estadístico. A partir de los resultados obtenidos proponemos un problema para el estudio de la estadística con sentido, caracterizado en que su estudio demanda recurrir a diferentes nociones de estadística de manera integrada.

Palabras clave: Formación profesional; Profesores; Matemática; Estadística; Didáctica.

## INTRODUCCIÓN

La exposición que a diario tienen los ciudadanos a la información que se presenta en diferentes medios de comunicación, como ser artículos periodísticos, la interpretación de información en diferentes portales de internet, la participación en encuestas o elecciones, así como la interpretación de diagnóstico médico, demanda una cultura estadística que les permita participar en la sociedad de la información (Batanero et al., 2013). Esto requiere formar ciudadanos que valoren de manera crítica la información para poder analizar, comprender, interpretar y evaluar las propias decisiones y reflexionar sobre los fenómenos sociales (Tauber, 2021). Este pensamiento crítico otorga la libertad de decidir con fundamentos basados en evidencia empírica creíble y no en creencias o ideas preconcebidas (Rosling, 2007, como se citó en Tauber, 2021; Engel, 2019).

Desde hace más de 20 años, la enseñanza de la estadística tuvo un gran desarrollo, incorporándose en todos los niveles educativos, respondiendo a la necesidad creciente de formar ciudadanos estadísticamente cultos, que se enfrenten con éxito a la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre (Arteaga et al. 2011; del Pino y Estrella, 2012). Esto propició el desarrollo de diversas investigaciones en el área de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, las que ponen de manifiesto las dificultades de su estudio en los diferentes niveles educativos. Para Naya et al. (2012) la enseñanza de la estadística en el nivel secundario es reducida a una enseñanza formal con escasos ejemplos de situaciones reales. De hecho, en la formación de profesores, la estadística también se encuentra condicionada a una enseñanza sesgada a una estadística matemática (Burrill, 2006). Esto condiciona la formación de los profesores en matemática y la gestión del estudio de la estadística que podrían realizar en las aulas de la escuela secundaria. La búsqueda en mejorar la enseñanza de la estadística demanda revisar la formación de los profesores (Stohl, 2005). De modo tal que, si en la formación docente no se realizan tareas estadísticas que involucren la interpretación en el contexto de los datos, es probable que los profesores reiteren los mismos procedimientos con sus estudiantes.

En esta investigación, con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, se indagó la formación en estadística de estudiantes para profesor en matemática, que realizan sus estudios en instituciones terciarias, no universitarias, en Argentina. En este trabajo reportamos resultados del análisis de la organización estadística propuesta a enseñar en la formación de estudiantes para profesor en matemática, constituyendo un aspecto relevante para el estudio de fenómenos relacionados con las condiciones de existencia y el tránsito de las organizaciones estadísticas entre las instituciones. Con base en los resultados obtenidos, en esta investigación proponemos un problema caracterizado en que su estudio demanda recurrir a diferentes nociones de estadística de manera integrada.

## MARCO TEÓRICO

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2019) se asume como postulado base que toda actividad humana regularmente realizada, así como los conocimientos que se transmiten y se producen como producto de esta actividad se describen con un modelo denominado praxeología. Esta noción vincula el aspecto conceptual y procedimental de la actividad humana al incluir, como entidades inseparables, la praxis y el logos. De esta manera, en la perspectiva antropológica, toda práctica o saber hacer (toda praxis) aparece siempre acompañada de un discurso o saber (un logos), es decir una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el por qué de lo que se hace (Bosch y Gascón, 2009). Una praxeología u organización matemática (OM) se comprende a partir de sus elementos constitutivos: *tipo de tarea, técnica, tecnología* y

*teoría*. La noción *tipo de tarea* supone un objeto relativamente preciso; por ejemplo, *Representar datos en gráficos* es un tipo de tarea. En particular, para este componente Chevallard (1999) distingue la noción de *género de tarea*, que refiere a un contenido que se encuentra poco especificado; se caracteriza por solicitar un determinativo y existe bajo diferentes tipos de tareas. Esta noción hace referencia a una acción sin especificar el objeto al que se aplica, por ejemplo, calcular, representar o demostrar son géneros de tareas. La manera de realizar un tipo de tarea se denomina *técnica*; esta no necesariamente es única y depende de la institución en que se realiza el estudio. El discurso racional que permite justificar y explicar a la técnica empleada al realizar la tarea se denomina *tecnología*. Esta tiene además como función aportar elementos para desarrollar la técnica, con la finalidad de ampliar su alcance, superar sus limitaciones y hacer posible la producción de nuevas técnicas. El último nivel de justificación de la actividad matemática lo constituye la *teoría* y resulta ser la tecnología de esta tecnología (Chevallard, 1999).

En el marco de la TAD, a través de diversos estudios que procuran identificar las relaciones de las instituciones (escuelas, universidades, etc.) y sujetos (docentes, estudiantes, etc.) con el conocimiento, han permitido afirmar que vivimos en un paradigma de enseñanza en el que el objetivo de las instituciones es enseñar praxeologías definidas y delimitadas. Sin embargo, ni los docentes ni la sociedad cuestionan por qué estas nociones se encuentran en el currículo escolar o por qué deben enseñarse. En este paradigma, el rol del estudiante se restringe a responder preguntas formuladas por el profesor o de medias como ser libros de texto, con escasas posibilidades para desarrollar y responder las propias preguntas. Estas son algunas de las características del paradigma que prevalece en las instituciones educativas actuales, denominado *paradigma de la visita de obras* (Chevallard, 2013). En este paradigma los planes de estudio se formulan en términos de listas de temas o nociones y, el lugar de los profesores, es organizar el aprendizaje de los estudiantes. En la actualidad, desde la TAD se manifiesta la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, donde los saberes no constituyan monumentos que el profesor enseña a los estudiantes, sino herramientas útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Esto es característico de un paradigma emergente y opuesto al tradicional, denominado *paradigma del cuestionamiento del mundo*. En este, la enseñanza presupone el estudio de preguntas que son acordadas por los integrantes de la comunidad de estudio, demandando repartir responsabilidades y asignar tareas individuales, para luego retornar el proceso grupal de elaboración de respuestas. Las praxeologías encontradas o reencontradas para elaborar las respuestas, serán estudiadas con cierto nivel de profundidad, para establecer su pertinencia. También surgirán nuevas preguntas, que la comunidad de estudio decidirá cuándo y cómo

va a responder, por lo que la responsabilidad del estudio no incurre en el individuo, sino en la comunidad productora, que sostiene y valida las respuestas que genera colectivamente. Esto implica cambios en los tiempos didácticos, la forma en que se organiza el estudio y el lugar que ocupan los actores del sistema didáctico. La distinción fundamental entre cada paradigma es el lugar que ocupa saber: en el primero, las praxeologías son visitadas por su importancia intrínseca; en el paradigma del cuestionamiento del mundo, el saber se estudia por su posibilidad de aportar respuesta a preguntas o generar nuevas preguntas.

## LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN ARGENTINA

La formación docente en la Argentina tuvo su inicio, desarrollo y consolidación fuera del nivel universitario, a partir de la creación de las Escuelas Normales Nacionales (Cámpoli, 2004). El perfeccionamiento y la diversificación se realizó en los institutos de profesorado de nivel terciario, denominados Instituto Superior de Formación Docente. Estos sustentan en la actualidad, gran parte de la oferta de formación docente en todo el país.

Un informe del Consejo Nacional de Desarrollo, Educación, Recursos Humanos y Desarrollo Económico Social, en el año 1969 señala que de las instituciones terciarias egresaban el 70% de los profesores especializados para el nivel secundario, el 30% restante lo hacía de la universidad. Entre los años 1976 y 1983, lapso durante el que se había establecido el ingreso restrictivo a la universidad, el número de estudiantes para la formación docente, en el nivel terciario, aumentó considerablemente. A partir de 1984, con el retorno del libre ingreso a las universidades, el crecimiento siguió siendo sostenido, pero a un ritmo menor (Cámpoli, 2004). En la actualidad hay 1541 institutos de profesorado que se encuentran distribuidos en el territorio argentino. Estas instituciones dependen de la Dirección General de Cultura y Educación de la provincia argentina en la cual desarrollan sus acciones. La mayor concentración de instituto de profesorado se ubica en la provincia de Buenos Aires que alberga a 403 instituciones.

## METODOLOGÍA

La investigación que se reporta en este capítulo es de naturaleza cualitativa, siendo el diseño propuesto un estudio de caso (Skate, 1999). En este trabajo describimos la *organización propuesta a enseñar* en torno a la estadística que se propone en la formación de estudiantes para profesor en matemática que realizan sus estudios en institutos de profesorado de la provincia de Buenos Aires (Argentina). Para describir la *organización propuesta a enseñar* se empleó la técnica de revisión de documentos (Hernández et al., 2014). Estos documentos tienen dos orígenes: el Diseño Curricular para la

Formación Docente de la Provincia de Buenos Aires (DCPBA) y el media sugerido para el estudio por cuatro profesores que se ocupan de formar a estudiantes para profesor en matemática en estadística en institutos de profesorado. El resultado del análisis de esta descripción fue útil en el diseño de un problema para el estudio con sentido de la estadística, que se presenta al final del capítulo.

### **Características de las Instituciones y Profesores que Participaron de la Investigación**

La provincia de Buenos Aires cuenta con 85 institutos de profesorado que dictan la carrera Profesorado en Matemática (67 son de gestión estatal y 18 de gestión privada). Estas instituciones se encuentran distribuidas en 25 unidades espaciales delimitadas de acuerdo con un programa de acción, denominadas Regiones Educativas. En 11 regiones educativas de la provincia se ofrece la carrera Profesorado en Matemática. Para la selección de la muestra se basó en el criterio del investigador, generándose una muestra por conveniencia (Kelmansky, 2009) atendiendo a las posibilidades físicas de relevar datos empíricos. Los institutos de profesorado que conformaron los puntos muestrales son los emplazados en la región educativa 4, donde hay tres institutos de profesorado de gestión estatal y tres de gestión privada.

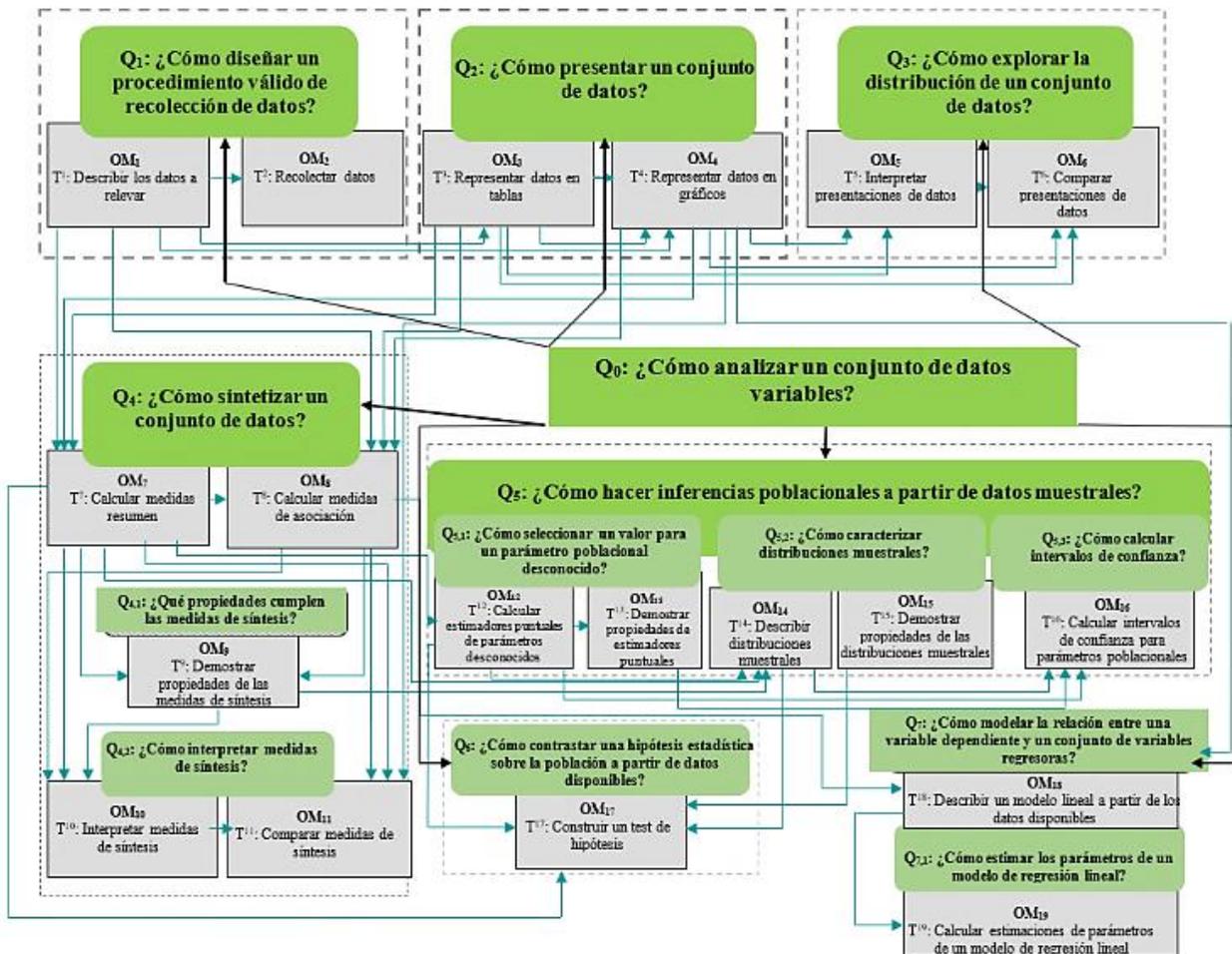
La descripción de lo *organización propuesta a enseñar* que se reporta en este trabajo se hizo a partir de los media sugeridos para el estudio por cuatro profesores. Esto es debido a que, de los seis institutos de profesorado de la región educativa, en uno de ellos el profesor manifestó no enseñar estadística, mencionando la escasa carga horaria de la materia, y en otro una de las investigadoras era la profesora. Los cuatro profesores que participaron de la investigación poseen el título de Profesor en Matemática y son egresados de algunos de los institutos de profesorado de la región educativa 4. Los profesores fueron designados como Profesor A, Profesor B, Profesor C y Profesor D. Los dos primeros ejercen sus funciones docentes en institutos de profesorado de gestión estatal, mientras que los restantes lo hacen en instituciones de gestión privada.

### **MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA**

La formulación del problema de investigación sobre la enseñanza de la estadística en el marco de la TAD incluye una interpretación del ámbito de la actividad matemática que está en juego. Abordar esta dimensión implica la construcción de un *Modelo Praxeológico de Referencia* que haga explícito el punto de vista del investigador (Chevallard, 2012). Este modelo constituye una herramienta para analizar las condiciones y restricciones que pueden favorecer o dificultar el estudio de la estadística en la formación de profesores en matemática. Consta de una red de praxeologías matemáticas cuya dinámica comporta ampliaciones y completaciones progresivas. Para esta investigación, el modelo se compone de un conjunto de Organizaciones Matemáticas (OM) que atienden tanto al análisis exploratorio de datos

como al análisis inferencial. El *Modelo Praxeológico de Referencia* se origina a partir de la pregunta generatriz:  $Q_0$ : *¿Cómo analizar un conjunto de datos variables?* A partir de esta se derivaron otras preguntas que dan lugar a la formulación de tipos de tareas representantes de 19 OM (Figura 1). Los tipos de tareas que conforman las distintas OM, se corresponden con los géneros de tareas que siguen:  $G_1$  *Recolectar*: refiere a tareas que requieren reunir datos de variables estadísticas, registrados sobre una muestra o población;  $G_2$  *Describir*: indica tareas que demandan detallar las características de la información, a través de sus partes relevantes;  $G_3$  *Calcular*: alude a tareas que requieren aplicar algoritmos preestablecidos para obtener un resultado;  $G_4$  *Representar*: conglomerar tareas que implican informar con tablas o gráficos el comportamiento de los datos;  $G_5$  *Comparar*: indica tareas que se refieren a establecer relaciones de semejanza o diferencia entre dos conjuntos de datos, contrastando sus representaciones por gráficos, tablas o sus medidas resumen;  $G_6$  *Interpretar*: agrupa las tareas que refieren a analizar datos a partir de tablas, gráficos y/o medidas resumen, pudiendo extraer conclusiones;  $G_7$  *Demostrar*: indica tareas que requieren probar afirmaciones utilizando una secuencia finita de deducciones lógicas;  $G_8$  *Construir*: se refiere a tareas que implican conducir los pasos de un proceso que permite tomar decisiones con los datos disponibles.

Figura 1. Modelo praxeológico de referencia



Fuente: elaboración propia

En este modelo se asume que el proceso estadístico se inicia con la formulación de preguntas, y el insumo básico que permite darles respuesta es un conjunto de datos. La recolección y el resumen de los datos, junto a la formulación de conclusiones permitirán responder las preguntas. El objetivo del análisis estadístico es producir conclusiones válidas, por lo que la recolección de datos debe realizarse a partir de un plan bien definido. La formulación precipitada de conclusiones puede verse invalidada si los datos no son explorados exhaustivamente. Un primer análisis exploratorio contempla la presentación tabular y la visualización de los datos a través de gráficos pertinentes, atendiendo a la naturaleza de la variable (gráfico de puntos, gráfico de tallo y hojas, histogramas o gráfico de barras, sectores). La descripción exploratoria de la distribución de una variable numérica demanda incluir el análisis de la forma, la centralización y la extensión de su gráfica. El cálculo de medidas de centralización tiene que estar basado en la elección de la medida más adecuada; no puede excluirse una discusión

entre la representatividad del centro de los datos a través de la media o la mediana. El cómputo de los cinco números resumen (mínimo, máximo, primer cuartil, tercer cuartil y mediana) permite la construcción del gráfico de caja y bigotes, a partir del cual se explora la distribución de los datos. Las medidas de dispersión (rango, varianza, desvío estándar, desvío medio) resultan útiles para comparar distribuciones con medias similares. Es necesario relacionar la presencia de valores atípicos con la variabilidad de la información, para distinguir su comportamiento general (distribución normal, por ejemplo). El análisis exploratorio tiene como fin indagar la información que los datos contienen a fin de detectar patrones que puedan ser de interés y formular conclusiones provisorias, que sólo serán de aplicación a los datos disponibles. Este análisis no requiere de herramientas matemáticas sofisticadas y es un prerrequisito para la estadística inferencial. Esta última brinda estrategias para establecer conclusiones válidas a partir de los datos, en relación a la población de la cual fueron extraídos.

La distinción entre población y muestra, estadísticos y parámetros es esencial. La inferencia considera la variabilidad muestral a través de los diferentes valores que los estadísticos toman en las distintas muestras. En este proceso se requiere la probabilidad; las distribuciones muestrales son las distribuciones de probabilidad de los estadísticos que permiten describir la variación que se espera encontrar, en muestras repetidas de una misma población. Distribuciones muestrales de la media, la varianza y la proporción tienen que ser estudiadas a partir de simulaciones de datos con diferentes tamaños muestrales y establecer la forma, el centro y la dispersión de los gráficos obtenidos. En este contexto, el Teorema Central del Límite surge de forma natural.

La inferencia estadística comprende dos procesos: la estimación de parámetros (puntual o por intervalos de confianza) y la construcción de test de hipótesis. En el proceso de estimación puntual se requiere de estimadores que satisfacen ciertas propiedades deseables (insesgabilidad, suficiencia, eficiencia, consistencia). Los intervalos de confianza se construyen a partir de estadísticos muestrales y con cierto nivel de confianza, que se interpreta como la proporción de veces que el intervalo muestral contendrá al verdadero parámetro, si se repite su construcción muchas veces. Los intervalos de confianza para la media poblacional justifican el estudio de la distribución  $t$  de Student, en tanto que aquellos intervalos para varianzas y cocientes de varianzas justifican el estudio de las distribuciones Chi cuadrado y F de Fisher. Un test de hipótesis consiste en decidir si se aceptan o no como ciertos determinados supuestos que se hacen sobre el parámetro de una población, a partir de los resultados observados en la muestra, midiendo el riesgo de error correspondiente a cada una de las posibles decisiones. Nuevamente la probabilidad cuantifica a través del  $p$ -valor, cuánta evidencia presentan los

datos para tomar una de las posibles decisiones. En este estudio, la relación entre intervalos de confianza y test de hipótesis sobre un parámetro poblacional, no debe excluirse.

## **DESCRIPCIÓN DE LA ORGANIZACIÓN PROPUESTA A ENSEÑAR PARA LA FORMACIÓN EN ESTADÍSTICA DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR EN MATEMÁTICA**

### **La Organización Propuesta a Enseñar del DCPBA para la Formación de Profesores en Matemática**

El Diseño Curricular es un texto de carácter público y es el producto de la actividad de selección y organización de los saberes que se estudian en una institución educativa (Gvirtz y Plamidessi, 1998). En el DCPBA para el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2017) se expone la estructura curricular de la carrera. Se establece una duración de 4 años para la carrera de Profesor en Matemática y en particular, para el tercer año de la carrera, se propone la materia Probabilidad y Estadística. Esta tiene una carga horaria de 96 horas anuales, distribuidas en 32 semanas. Atendiendo a la estructura del DCPBA, se analizaron los saberes que se proponen estudiar en torno a la estadística. En la Tabla 1 se indican las nociones de estadística que se proponen estudiar y se incluye una columna denominada Organización Matemática del *Modelo Praxeológico de Referencia*, en la que se identifica, para cada noción del DCPBA, la OM a la que se corresponde según el *Modelo Praxeológico de Referencia* propuesto en la sección anterior.

**Tabla 1.** *Nociones de estadística propuestas en el DCPBA*

<b>Ejes de contenidos</b>	<b>Descriptores</b>	<b>Organización Matemática del Modelo Praxeológico de Referencia</b>
<b>Estadística descriptiva</b>	Las etapas del método estadístico. Población. Muestra de observaciones. Variables discretas y continuas. Parámetros centrales. Media armónica. Media geométrica Parámetros de dispersión. Escalas de medición: nominales, ordinales, numéricas. Tablas de frecuencias: absolutas, relativas, acumuladas. Representaciones gráficas. Diagramas de barras. Diagramas de sectores circulares. Gráficos de tallo y hoja. Histogramas. Polígono de frecuencias. Cuartiles, deciles y percentiles. Momentos. Series de frecuencias y datos agrupados. Coeficiente de sesgo y de kurtosis.	OM <sub>1</sub> , OM <sub>2</sub> , OM <sub>3</sub> , OM <sub>4</sub> , OM <sub>5</sub> , OM <sub>6</sub> , OM <sub>7</sub> , OM <sub>9</sub> , OM <sub>10</sub> , y OM <sub>11</sub>

Ejes de contenidos	Descriptor	Organización Matemática del Modelo Praxeológico de Referencia
<b>Estadística inferencial</b> <b>Estimación de parámetros</b>	Muestra de observaciones. Estadísticos. Estimación puntual de parámetros de una variable aleatoria. Muestra aleatoria. Estadísticos. Estimadores de parámetros. Estimadores insesgados. Distribuciones de estadísticos habituales para la media, la varianza y el coeficiente de correlación.	OM <sub>12</sub> , OM <sub>13</sub> , OM <sub>14</sub> y OM <sub>15</sub>
<b>Intervalos de confianza</b>	Estimación puntual de parámetros de una variable aleatoria, métodos. Estimación por intervalos de confianza: para la media con varianza conocida, para la media con varianza desconocida, para la varianza. Estimación del parámetro p de una variable aleatoria binomial. Uso de software.	OM <sub>16</sub>
<b>Pruebas de hipótesis</b>	Prueba de hipótesis paramétricas. Errores tipo I y tipo II. Hipótesis nula e hipótesis alternativa. Nivel de significación de una prueba. Potencia. Prueba de Gauss para la media de una variable aleatoria normal con varianza conocida. Análisis de nivel de significación, potencia. Prueba de una cola y dos colas. Propiedades. Prueba de Student para la media de una variable aleatoria normal con varianza desconocida. Prueba $\chi^2$ para la varianza de una variable aleatoria normal. Prueba de comparación de medias de dos poblaciones. Uso de software.	OM <sub>17</sub>

**Fuente:** elaboración propia

De la Tabla 1 se destaca la cantidad de nociones que se proponen estudiar con una escasa disponibilidad temporal, constituyendo una primera restricción para el estudio de la estadística en la formación de estudiantes para profesor en matemática. El estudio de estas nociones requiere recorrer gran parte del *Modelo Praxeológico de Referencia* diseñado.

El diseño curricular establece las nociones estadísticas para estudiar en la formación docente. El mismo no es normativo y habilita a los profesores a seleccionar aquellas temáticas que consideren relevantes para su estudio, atendiendo a la carga horaria de la materia, los requerimientos matemáticos de materias correlativas o las características del grupo de estudiantes. También los profesores pueden sugerir algún medio para el estudio (libros de textos, material editado por los profesores, etc.). En el siguiente apartado se describe la *organización propuesta a enseñar* que se deriva del análisis de los medios que sugieren los profesores para el estudio de la estadística.

## La Organización Propuesta a Enseñar en los Media Sugeridos por los Profesores

Los media que proponen los profesores para el estudio son el producto de las decisiones matemáticas y didácticas tomadas por estos y manifiestan, no sólo las ideas de los autores, sino las distintas ideas que se transmiten en el proceso de enseñanza a los estudiantes (Maz-Machado et al., 2015). Los media que se involucraron en esta investigación tienen diferentes estructuras. En general, contienen en el siguiente orden, enunciados que corresponden al entorno tecnológico-teórico, ejemplares de tareas con indicaciones de las técnicas necesarias para su hacer y la propuesta de tareas para su estudio. Estas últimas fueron descritas a través de las categorías que conforman la Tabla 2.

**Tabla 2.** *Tabla para el análisis de tareas*

Género de tarea	Tipo de tarea	Ejemplar de tarea	Número de tarea	Entorno tecnológico-teórico inmediato
-----------------	---------------	-------------------	-----------------	---------------------------------------

**Fuente:** elaboración propia

En la primera columna se recoge el género de tarea ( $G_i$ ) al que refiere la tarea que se analiza. La segunda columna identifica al tipo de tareas ( $T$ ) que refiere la tarea. En la tercera columna se indica un ejemplar de tarea que corresponde al tipo de tarea. En la cuarta columna (Número de tarea) se listan todas las tareas propuestas en el media que corresponde al tipo de tarea identificado. En la quinta columna se indica el entorno tecnológico-teórico inmediato necesario para el hacer del tipo de tarea.

Al finalizar la descripción de cada uno de los media, se contrastó el entorno tecnológico-teórico propuesto con las nociones estadísticas que establece el DCPBA. Así también, se indicó la distribución de frecuencias de los géneros de tarea identificados, lo que permitió establecer relaciones con lo propuesto en el DCPBA.

En la Tabla 3 se sintetizan las características de los cuatro media analizados. En la primera columna se indica la unidad temática que se propone en el DCPBA; en la segunda columna, los contenidos que establece el DCPBA para ser estudiados (Descriptores) y, en la tercera columna, se destacan aquellas nociones estadísticas que se identificaron en el entorno tecnológico-teórico de alguno de los cuatro media analizados. En esta última columna se indica con X el media en que se encuentra la noción destacada. En relación a los Ejes de contenidos indicados en la Tabla 1, solo se realiza la descripción para el Eje de contenidos: Estadística descriptiva porque de los restantes, no se identificaron en los media de los profesores.

**Tabla 3.** *Relación entre las nociones estadísticas en el DCPBA y las nociones en los media de cada profesor*

Ejes de contenidos	Descriptores	Media del Profesor			
		A	B	C	D
Estadística descriptiva	- Las etapas del método estadístico. Población. Muestra de observaciones.	X	X	X	X
	- Variables discretas y continuas.	X	X	X	X
	- Parámetros centrales. Media armónica. Media geométrica. Parámetros de dispersión.	X	X	X	X
	- Escalas de medición: nominales, ordinales, numéricas.	---	---	---	---
	- Tablas de frecuencias: absolutas, relativas, acumuladas.	X	X	X	X
	- Representaciones gráficas. Diagramas de barras. Diagramas de sectores circulares. Gráficos de tallo y hoja. Histogramas. Polígono de frecuencias.	X	X	X	X
	- Cuartiles, deciles y percentiles. Momentos.	X	---	---	X
	- Series de frecuencias y datos agrupados.	X	X	X	X
	- Coeficiente de sesgo y de kurtosis.	---	X	---	---

**Fuente:** elaboración propia

De la Tabla 3 se destaca que los cuatro media contemplan el estudio de nociones estadísticas asociadas a las presentaciones gráficas y tabulares de datos univariados como a las medidas resumen, tal como se establece en el DCPBA. La noción de muestra se identifica en todos los media, pero el estudio de los modos de muestreo y de las distribuciones muestrales se encuentra ausente. Este hecho se relaciona con la ausencia del aspecto inferencial de la estadística que no se contempla en el DCPBA y en ninguno de los media analizados.

En lo que sigue se indican los resultados obtenidos del análisis de la Tabla 2 para cada uno de los media sugeridos por los profesores. En el media del Profesor A se identificaron 101 tareas, en el media del Profesor B se identificaron 115 tareas, en el media del Profesor C se identificaron 59 tareas y en el media del profesor D se identificaron 32 tareas. En la Tabla 4 se indica, para cada media de los profesores, el número de las tareas, junto al porcentaje correspondiente, que refieren a cada uno de los géneros de tareas definidos en el *Modelo Práxeológico de Referencia*.

**Tabla 4.** Géneros de tareas a los que refieren las tareas identificadas en los media de los profesores

	Profesor A	Profesor B	Profesor C	Profesor D
<b><i>G<sub>1</sub> Recolectar</i></b>	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
<b><i>G<sub>2</sub> Describir</i></b>	8 (8%)	1 (1%)	4 (7%)	1 (3%)
<b><i>G<sub>3</sub> Calcular</i></b>	22 (22%)	53 (46%)	13 (22%)	5 (16%)
<b><i>G<sub>4</sub> Representar</i></b>	34 (34%)	46 (40%)	33 (56%)	17 (53%)
<b><i>G<sub>5</sub> Comparar</i></b>	0 (0%)	5 (4%)	3 (5%)	3 (9%)
<b><i>G<sub>6</sub> Interpretar</i></b>	37 (36%)	10 (9%)	6 (10%)	6 (19%)
<b><i>G<sub>7</sub> Demostrar</i></b>	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
<b><i>G<sub>8</sub> Construir</i></b>	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
<b>Total de tareas</b>	101 (100%)	115 (100%)	59 (100%)	32 (100%)

**Fuente:** elaboración propia

En relación al media que propone el Profesor A, se observa una importante concentración de tareas relativas a los géneros de tareas *G<sub>6</sub>: Interpretar* (36%), *G<sub>4</sub>: Representar* (34%) y, en menor porcentaje *G<sub>3</sub>: Calcular* (22%). Un escaso porcentaje de tareas se asocia al género de tarea *G<sub>2</sub>: Describir* (8%). En el caso del media del Profesor B se destaca la concentración de tareas que refieren a los géneros *G<sub>3</sub>: Calcular* (46%) y *G<sub>4</sub>: Representar* (40%); en menor porcentaje se estudian tareas relacionadas a los géneros de tareas *G<sub>6</sub>: Interpretar* (9%), *G<sub>5</sub>: Comparar* (4%) y *G<sub>2</sub>: Describir* (1%). En el media del Profesor C se observa una alta concentración de tareas que refieren al género de tareas *G<sub>4</sub>: Representar* (56%); en menor porcentaje se propone tareas del género *G<sub>3</sub>: Calcular* (22%) y un escaso porcentaje de tareas refiere a los géneros de tareas *G<sub>6</sub>: Interpretar* (10%); *G<sub>2</sub>: Describir* (7%) y *G<sub>5</sub>: Comparar* (5%). Finalmente, en el media del Profesor D se observa la alta concentración de tareas que refieren al género de tareas *G<sub>4</sub>: Representar* (53%); en menor porcentaje le siguen tareas vinculadas al género *G<sub>3</sub>: Calcular* (16%) y *G<sub>6</sub>: Interpretar* (19%); un escaso porcentaje de tareas refiere a los géneros de tareas *G<sub>2</sub>: Describir* (3%) y *G<sub>5</sub>: Comparar* (9%).

En todos los media se presenta un reducido número de tareas asociadas a los géneros de tareas *G<sub>2</sub> Describir* y *G<sub>5</sub> Comparar*. La ausencia de descripciones y comparaciones da cuenta del reduccionismo que impide trascender a la simple aplicación de técnicas (Chaves, 2016). Se destaca que en todos los media analizados no se identificaron tareas vinculadas a los géneros de tarea *G<sub>1</sub> Recolectar*, *G<sub>7</sub> Demostrar* y *G<sub>8</sub> Construir*. En particular, el género de tarea *G<sub>1</sub> Recolectar* reúne tareas esenciales del trabajo estadístico; los datos son centrales en el análisis estadístico y su recolección permite decidir la o las

técnicas que este análisis requiere (Ben-Zvi et al., 2018). Por otro lado, el género de tarea  $G_7$  *Demostrar* reúne tareas que justifican técnicas necesarias para estudiar estadística. Las tareas vinculadas al género  $G_7$  *Demostrar* se relacionan con propiedades de las medidas de síntesis, de estimadores puntuales y distribuciones muestrales (Ferrari, 2019). En correspondencia con las nociones de estadística que se proponen estudiar en el media de los profesores, para este género sólo tendría lugar el estudio de tareas vinculadas a demostrar propiedades de las medidas de síntesis. Si bien, es reducido el lugar que ocupa en esta praxeología el género  $G_7$  *Demostrar*, su presencia es de vital importancia. En los media, las medidas de síntesis son presentadas como un saber establecido, autojustificado e incuestionable. Se destaca también que la ausencia de tareas asociadas al género de tareas  $G_8$  *Construir*, se justifica en la ausencia del estudio de nociones de inferencia estadística como son los test de hipótesis sobre parámetros desconocidos.

Los resultados de los análisis descriptos indican que en el estudio de tareas relativas a estadística, los estudiantes para profesor en matemática fueron expuestos a una organización en la que se han subestimado algunos géneros de tareas y sobrevalorado otros. Es así como en los media utilizados por los profesores, los géneros de tareas  $G_1$  *Recolectar* y  $G_6$  *Interpretar* se encuentran representados por un escaso o nulo número de tareas, en tanto que se priorizan tareas de los géneros  $G_3$  *Calcular* y  $G_4$  *Representar*.

Un débil equipamiento praxeológico, fruto de OM rígidas y desarticuladas que no evidencian la utilidad de la estadística, no es precisamente una de las condiciones que requiere un profesor para diseñar sus prácticas profesionales. Se demanda del estudio de tareas estadísticas auténticas, con datos reales, vinculados a alguna situación real, sin una solución estipulada de antemano, que promuevan la reflexión y el debate entre los estudiantes, donde sea necesario trabajar tanto con información matemática como no matemática, interpretando y validando los resultados en el contexto en que se sitúa el problema (Gallart et al., 2014). En este sentido, en la siguiente sección se presenta un ejemplar de problema estadístico con la intención de poner en evidencia lo expuesto.

### PROPUESTA DE UN PROBLEMA PARA LA RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

En esta sección proponemos un ejemplo de problema abierto para el estudio de la estadística, en el que se pueden identificar las fases de una investigación: hay un problema, concreto y contextualizado; es necesario relevar datos y decidir cuáles recoger y cómo obtenerlos; se requiere su análisis y la comunicación de las conclusiones obtenidas sobre el problema planteado. El estudio implica un trabajo a largo plazo y rompe con la concepción atomizada de la matemática, dando lugar

a recorrer diversas praxeologías estadísticas según las necesidades del estudio. La realización de esta propuesta podría contemplar realizar tareas que se identifican con los géneros:  $G_1$  Recolectar,  $G_2$  Describir,  $G_3$  Calcular,  $G_4$  Representar,  $G_5$  Comparar,  $G_6$  Interpretar y  $G_7$  Demostrar.

El problema es propuesto para ser desarrollado con estudiantes de tercer año de profesorado en matemática, que se encuentren realizando el curso de estadística requerido en la formación. Se propone que el curso se divida en pequeños grupos (2 o 3 integrantes) y cada uno tome decisiones acerca de qué preguntas realizar a partir del problema. El profesor evitará explicar siendo que los estudiantes tendrán que formular sus preguntas y buscar en diferentes fuentes (libros, páginas web, etc.) información para poder elaborar sus respuestas y, finalmente, compartir con todos los integrantes del curso. El profesor que gestione el estudio debe incidir oportuna y eficazmente para hacer evolucionar el estudio, introduciendo preguntas o información: sus ayudas se deben orientar a que los estudiantes de profesorado logren problematizar la situación y que el estudio no pierda sentido. A continuación, presentamos el problema y posibles preguntas que se podrían derivar de su estudio. Estas se formulan de manera ejemplar, no siendo las únicas que podrían emerger y en el orden presentado.

*A los efectos de diseñar nuevos planes para sus clientes, el Departamento de Marketing de una empresa de telefonía celular desea conocer cuál es el empleo que realizan los usuarios de su Smartphone.*

Para esta empresa de telefonía surge un problema que se formula a partir de la pregunta:  $Q_0$ : *¿Cuál es el empleo que realizan los usuarios de su Smartphone?* La necesidad de responder la pregunta conduce a la recolección y al análisis de datos. Esto origina nuevas preguntas:  $Q_1$ : *¿Qué datos se deben relevar?*  $Q_2$ : *¿Cómo obtener los datos?* Si se incorporan nuevas preguntas tales como  $Q_3$ : *¿Existen diferencias en el uso de Smartphone entre hombres y mujeres? ¿Y entre jóvenes y mayores?*  $Q_4$ : *¿Existe relación entre el tiempo destinado a conversaciones telefónicas o con el uso de WhatsApp?* surge la necesidad de replantearse los datos necesarios para testear hipótesis y analizar la asociación entre variables. En este caso se requiere recurrir a nociones como: estimadores, intervalos de confianza, test de hipótesis, correlación y regresión; estos dos últimos saberes trascendiendo lo propuesto para el estudio en el DCPBA.

El hacer de la tarea requiere definir nociones tales como variables y su clasificación; población, muestra y técnicas de muestreo. Por ejemplo, una posibilidad para relevar datos es que los estudiantes diseñen e implementen un cuestionario. Esto nos sumerge en la problemática de  $Q_5$ : *¿Qué tipo de encuesta confeccionar?*  $Q_6$ : *¿Qué preguntas formular en la encuesta?*  $Q_7$ : *¿Qué se pretende registrar sobre el uso de Smartphone?* Para esta última pregunta, por ejemplo se podría pensar en registrar tiempo de llamadas realizadas por los usuarios; número de llamadas realizadas; número de llamadas recibidas; duración de estas llamadas;

uso de Internet; etc., así también es necesario considerar un periodo para realizar el registro, como puede ser durante la última semana, mes, etc. También emerge la problemática de  $Q_8$ : *¿Cómo implementar la encuesta?*  $Q_9$ : *¿Cómo analizar los datos que se generen?*  $Q_{10}$ : *¿Cómo informar el análisis de los resultados de la encuesta?* De este modo, el estudio de los datos a partir de nociones de estadística descriptiva cobra vital importancia.

Una vez recogidos los datos, el cúmulo de información debe organizarse; el uso de una planilla de cálculo, o algún software para el análisis de datos estadísticos, puede resultar de utilidad. La organización de los datos es fundamental para comprender el modo en que se distribuyen. Aquí tareas que involucren presentaciones tabulares y gráficas demandan recurrir a nociones como: tabla de frecuencias, frecuencia absoluta, relativa y acumulada, intervalos y marca de clase, gráficos de sectores, barras, histogramas, entre otras. Las técnicas no son únicas y la decisión en la elección debe estar a cargo de los estudiantes. Por ejemplo, decidir el tipo de tabla de frecuencias o bien, la presentación gráfica que mejor represente a los datos requiere anticiparse a la interpretación que de ella se podrá hacer. El uso de soporte informático da la posibilidad de dispensar tiempo a la interpretación de gráficos y tablas, por sobre la mera técnica constructiva.

Si bien tablas y gráficos son útiles para describir el comportamiento de los datos, algunas medidas descriptivas ayudan a caracterizar la posición, dispersión y localización de la información. De esta manera, el estudio se amplía con las nociones que demanda el hacer de estas tareas: nociones como media, mediana y moda; varianza y desvío estándar y cuartiles y sus propiedades, permiten describir la información de variables cuantitativas. Es fundamental centrar las tareas no sólo en el cálculo de las medidas, sino en la interpretación de los valores encontrados. Esa interpretación posibilita tomar la decisión correcta al momento de caracterizar la forma, el centro y la dispersión de la distribución de los datos. La comunicación de los resultados encontrados favorece la interpretación de valores descriptivos, por lo que confeccionar un informe en relación al análisis efectuado, se toma una tarea fundamental y permite dar respuesta al interrogante inicialmente formulado.

## CONCLUSIONES

El análisis realizado al DCPBA y a los media sugeridos para el estudio de la estadística en la formación de estudiantes de profesorado, en contraste con el *Modelo Praxeológico de Referencia* permite inferir que se propone un estudio acotado de la estadística, centrado en un análisis univariado y la ausencia de tareas fundamentales en el trabajo estadístico. La inexistencia de tareas relativas al género  $G_1$ , *Recolectar* se contrapone a la esencia misma de la estadística que, según Moore (1991), es la ciencia de los datos contextualizados. En los media recomendados por los profesores hay datos, pero

generalmente son ficticios. Estas propuestas exceptúan abordar preguntas como ser: ¿De qué modo se pueden obtener los datos?, ¿Qué tipo de problemas podrán surgir en la recolección de esos datos?, ¿Qué se quiere probar?, ¿Qué datos se necesitan para esa prueba?, ¿Qué unidades muestrales hay que medir, observar o preguntar? Estos son ejemplos de cuestiones que se derivan de la pregunta que se desea responder, y conllevan a reconstruir el entorno tecnológico-teórico que incluye nociones como población, muestra, tipos de muestreo, clasificación de variables, escala de medición, entre otras.

Problemas como el ejemplar propuesto se tornan indispensables para el estudio de la estadística en la formación docente. Esto posibilita que los futuros profesores estudien estadística con sentido y adquieran un equipamiento praxeológico que les permita afrontar la enseñanza de la estadística en el nivel secundario. La estadística es una ciencia en continuo cambio y expansión, y es necesario estar abiertos a propuestas que trasciendan la estadística descriptiva univariada, tales como el estudio de los métodos de estimación de parámetros y la construcción de test de hipótesis poblacionales, la regresión simple y multivariada, entre otros. Se requiere mayor investigación y reflexión para poder avanzar en la construcción de la educación estadística y concretar los cambios que la formación de profesores en matemática demanda.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, 76, 55-67. <https://drive.google.com/file/d/16IRsepyMbCLS6R83j95COFq6Z-7IINY0/view>
- Batanero, C., Diaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18. <https://drive.google.com/file/d/1wBh0ttAwK02g3AS66terPWi48hxlEKqL/view>
- Ben-Zvi, D., Makar, K. y Garfield, J. (2018). *International handbook of research in statistics education*. Springer.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.
- Burrill, G. (2006). *Thinking and reasoning with data and chance*, 68NCTM Yearbook. NCTM.
- Cámpoli, O. (2004). *La formación docente en la República Argentina*. UNESCO, IESALC.
- Chaves, E. (2016). La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Matemática*, 15, 21-31. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23880>
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19/2, 221-266.
- Chevallard, Y. (2012). Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. *Journal du séminaire TAD/IDD*.

<http://www.aixmrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fdf/2011-2012/journal-tad-idd-2011-2012-7.pdf>

- Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT*, 2 (2), 161-182. <https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26>
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education*, 12, 71-114. [https://www.jasme.jp/hjme/download/05\\_Yves%20Chevallard.pdf](https://www.jasme.jp/hjme/download/05_Yves%20Chevallard.pdf)
- Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64. <http://pensamientoeducativo.uc.cl/index.php/pel/article/view/25747/20671>
- Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (2017). *Profesorado de Educación Secundaria en Matemática*. <https://abc.gob.ar/secretarias/sites/default/files/2021-05/Disc%C3%B1o%20Curricular%20Profesorado%20de%20Matem%C3%A1tica.pdf>
- Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp.1-17). Universidad de Granada.
- Ferrari, C. (2019). *Enseñanza de la estadística en la formación de profesores: un estudio exploratorio desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* [tesis doctoral no publicada, Universidad del Centro de la Provincia de Buenos Aires].
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.
- Gvirtz, S y Palamidessi, M. (1998). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*. Editorial Aique.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw - Hill.
- Kelmansky, D. M. (2009). *Estadística para todos: estrategias de pensamiento y herramientas para la solución de problemas*. INET.
- Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015) Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 49-76. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1812>
- Moore, D. (1991). Teaching statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (pp. 14-25). Mathematical Association of America.
- Naya, S., Ríos, M. y Zapata, L. (2012). La Estadística en la Enseñanza Preuniversitaria. *La Gaceta de la RSME*, 15(2), 355–368. <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1084>
- Skate, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools. Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). Springer.
- Tauber, L. (2021). Facetas de la Estadística Cívica Implícitas en una Experiencia de Enseñanza centrada en el Estudio de Indicadores Sociales. *Paradigma*, 42(1), 89-117. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/1019>

## **THE TEACHING OF STATISTICS IN MATHEMATICS TEACHERS: SOME CONTRIBUTIONS FOR TRAINING**

### **ABSTRACT**

This research investigates the statistical training of student teachers in mathematics. Based on the Anthropological Theory of Didactics, we present the results of an exploratory, descriptive and interpretive research. The study was developed with teachers who teach statistics to mathematics teacher trainees, who carry out their studies in non-university tertiary institutions in Argentina. These institutions are the ones that support a large part of the teacher training offer in Argentina. The research required the analysis of the curricular design and the media used by teachers for student teachers. The main results indicate a reductionism in the praxeologies around statistics, which are proposed to be studied in the training of mathematics teachers. These praxeologies focus on descriptive statistical aspects and turn out to be punctual and rigid. The absence of tasks related to the genres of collecting and interpreting, which are assumed fundamental in the statistical study, stands out. Based on the results obtained, we propose a problem for the study of statistics with meaning, characterized in that its study demands the use of different statistical notions in an integrated manner.

Keywords: Professional Training; Teachers; Math; Statistics; Didactics.

## **O ENSINO DE ESTATÍSTICA EM PROFESSORES DE MATEMÁTICA: ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES PARA A FORMAÇÃO**

### **RESUMO**

Esta pesquisa investiga a formação estatística de professores-alunos em matemática. Com base na Teoria Antropológica da Didática, apresentamos os resultados de uma investigação exploratória, descritiva e interpretativa. O estudo foi desenvolvido com professores que lecionam estatística para licenciandos em matemática, que realizam seus estudos em instituições terciárias não universitárias na Argentina. Essas instituições são as que sustentam grande parte da oferta de formação de professores na Argentina. A pesquisa exigiu a análise do desenho curricular e das mídias utilizadas pelos professores para os alunos-professores. Os principais resultados indicam um reducionismo nas praxeologias em torno da estatística, que se propõem a serem estudadas na formação de professores de matemática. Essas praxeologias se concentram em aspectos estatísticos descritivos e acabam sendo pontuais e rígidas. Destaca-se a ausência de tarefas relacionadas aos gêneros de coleta e interpretação, que se assumem fundamentais no estudo estatístico. Com base nos resultados obtidos, propomos um problema para o estudo da estatística com significado, caracterizado por seu estudo demandar o uso de diferentes noções estatísticas de forma integrada.

Palavras-chave: Formação Profissional; Professores; Matemática; Estatísticas; Didática.

CLAUDIA NOEMÍ FERRARI

*Universidad Nacional de la Plata, La Plata, Argentina.*

[claudia.ferrari@econo.unlp.edu.ar](mailto:claudia.ferrari@econo.unlp.edu.ar)

<https://orcid.org/0000-0001-5063-8457>

Claudia Noemí Ferrari es Doctora en Enseñanza de las Ciencias (mención Matemática) por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires en Argentina. Magíster en Estadística Aplicada por la Universidad Nacional de Córdoba en Argentina. Licenciada en Matemática por la Universidad Nacional de La Plata en Argentina. Profesora en Matemática por el Instituto Superior de Formación Docente “Dr. Bernardo Houssay” en Argentina. Profesora a cargo del curso Probabilidad y Estadística en institutos de profesorado de la Provincia de Buenos Aires en Argentina (Periodo: 1993 a 1999 y 2001 a 2016). Profesora Titular de la Facultad de Ciencias Económicas en la Universidad Nacional de la Plata, Argentina.

ANA ROSA CORICA

*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina.*

[acorica@exa.unicen.edu.ar](mailto:acorica@exa.unicen.edu.ar)

<https://orcid.org/0000-0002-3583-6081>

Ana Rosa Corica es Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad Nacional de Córdoba en Argentina. Licenciada en Educación Matemática y Profesora en Matemática y Física por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires en Argentina. Investigadora Adjunta del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Investigadora del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas en la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

# DIFICULTADES DE LOS PROFESORES AL RESOLVER UNA SITUACIÓN PROBLEMA DE ESTADÍSTICA

ELIZABETH ADVINCULA  
AUGUSTA OSORIO  
MILUSKA OSORIO

## RESUMEN

La formación continua de profesores de educación básica es un tema de interés, por lo que se realizan diversas actividades como talleres, clases demostrativas, paneles, etc., que buscan mitigar las deficiencias que presentan los profesores, en cuanto a su dominio disciplinar y didáctico en la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad. En este artículo se presentan las dificultades que experimentan profesores de educación secundaria, cuando resuelven una situación problema en Estadística. Las propuestas de los profesores se dan dentro de una secuencia de talleres donde se propone el ciclo PPDAC como una estrategia para el desarrollo de la solución de un problema estadístico. Se encuentra que los profesores de secundaria evidencian dominio de los contenidos, pero no los articulan, ni los relacionan con las etapas del ciclo PPDAC.

Palabras clave: Formación de docentes de secundaria; Enseñanza de la Estadística; Ciclo PPDAC; Situación problema para Estadística.

## INTRODUCCIÓN

Para Cuevas e Ibáñez (2008), la Estadística es una herramienta afín con otras disciplinas, puesto que sus métodos y aplicaciones se usan en la mayoría de las ciencias naturales y sociales, incluso está mucho más relacionada con estas disciplinas que con las matemáticas. Se usa como método de investigación científica en áreas tan diferentes como la lingüística, geografía, física, ingeniería, psicología y economía, dado que es requerida en el desarrollo de casi cualquier tarea que implica el análisis e interpretación de datos.

Es necesario que toda persona utilice los conocimientos estadísticos básicos para llegar a ser un ciudadano educado (Batanero, 2002), o para ser un consumidor de datos en la sociedad de la información (Gal, 2002). Los conocimientos básicos a los que se hace alusión podrían ser: leer información desde una tabla de frecuencias o un gráfico de barras; comprender que significa una media aritmética, por ejemplo, tener una idea clara de lo que significa el precio promedio del pan; entender

que la representación de datos cualitativos se da mediante una moda o la de datos cuantitativos, mediante una media aritmética.

La pregunta sería dónde adquirir esos conocimientos básicos, la respuesta implica la necesidad de la enseñanza de la Estadística en la escuela y desde los primeros grados. A esta conclusión se llegó en diversos países y eso propició un proceso de inclusión de temas estadísticos en el currículo de Matemáticas de las escuelas. El seguimiento de esta incorporación es parte del trabajo de Batanero (2002), y Batanero, Contreras y Arteaga (2011). En el caso de Perú, la primera inclusión de temas estadísticos en el currículo se evidencia en el Diseño Curricular Nacional (Ministerio de Educación del Perú, 2009), el cual incluye contenidos a partir del primer grado del nivel primario (alumnos de 7 años).

Jiménez y Jiménez (2005) en relación a la educación pública de Costa Rica, señalan que a pesar de que los programas de estudio del Ministerio de Educación Pública incluyen nociones ligadas a los temas de Probabilidad y Estadística, estos no se cubren en secundaria. Entre otras razones, debido a que el tiempo lectivo a veces resulta insuficiente, los temas no eran evaluados en las pruebas nacionales y muchos docentes no son conscientes de la importancia que tiene para un estudiante poseer un buen manejo de la estadística y de las nociones de incertidumbre, como parte de su cultura. Algo similar sucedió en Perú, la inclusión de contenidos estadísticos en el Diseño Curricular Nacional (Ministerio de Educación del Perú, 2009) no implicó su enseñanza. En el caso peruano, la no enseñanza en el nivel primario fue la más evidente debido a la falta de preparación de los profesores de ese nivel, los programas de las carreras de educación primaria a nivel universitario no incluyeron cursos de estadística ni de didáctica de la estadística hasta el 2015; y en el caso de los institutos pedagógicos, aún no se incluyen.

Asimismo, Grima (2010) menciona que a pesar de la destacada presencia de la Estadística en los currículos de diferentes carreras y en muchas actividades profesionales, suele tener poco protagonismo en la enseñanza secundaria pues rara vez existe una asignatura específica de estadística, y más bien se presenta incluida en la asignatura de Matemáticas, muchas veces al final, de forma que si no da tiempo a ver todo lo planificado, es la Estadística la parte que se queda sin impartir. En el caso peruano, al revisar las actividades propuestas en los cuadernos de trabajo de Matemáticas para secundaria del Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) de esos años, se observó que las actividades vinculadas a la estadística o la probabilidad eran reducidas en cantidad y fueron propuestas al final del año escolar.

En el año 2013, con el apoyo de la Dirección de Gestión de la Investigación (DGI) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), se indagó sobre los conocimientos estadísticos que

los alumnos de educación básica de instituciones privadas alcanzaron al finalizar el IV ciclo (alumno de 10 años) y el V ciclo (alumnos de 14 años) de educación básica. Para ese momento se agregó a los estándares nacionales del Perú, los mapas de progreso de las diferentes áreas de enseñanza del nivel básico preparadas por el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (IPEBA). Este estudio no incluyó instituciones públicas por recomendación del IPEBA, entidad que apoyó el estudio, y cuyos representantes indicaron que no tenían evidencias, en ese momento, de la enseñanza de la estadística en las instituciones de enseñanza pública. En Osorio y Advincula (2015) se comparten los resultados obtenidos de este estudio con respecto a los conocimientos alcanzados por los alumnos al finalizar el 4to grado de primaria (10 años) y al finalizar el 2do año de secundaria (14 años). Se tiene como conclusión del estudio, que los alumnos de primaria alcanzaban los niveles propuestos en los mapas de progreso en los temas vinculados a Estadística, mientras que los alumnos de secundaria solo alcanzaron los niveles propuestos para el final del nivel primario. En temas vinculados a probabilidades, ninguno de los dos grupos alcanzó los niveles esperados. En Ruiz (2015) se señala que, para las escuelas peruanas de primaria, privadas y públicas, en tercer grado de primaria el 13% del tiempo destinado a las matemáticas es dedicado a la Estadística y en sexto grado el 17%; a pesar que se esperaba no menos de un 25% al existir cuatro competencias en el área de matemáticas que deberían desarrollarse de manera equitativa.

Además, desde la experiencia de las evaluaciones en un curso de Estadística y Probabilidad dirigido a profesores de educación primaria, dentro del Diplomado de Enseñanza de las Matemáticas de Primaria que se dicta en la PUCP desde el año 2007, se identificaron serias deficiencias en los profesores participantes. Entre las dificultades identificadas se tiene: la dificultad para identificar variables estadísticas desde un individuo dado, las dificultades para clasificar una variable estadística dada, la dificultad para caracterizar una población, la dificultad en definir una muestra adecuada al problema a resolver, el poco dominio en la construcción de las frecuencias en una tabla, etc. Para el caso de los profesores de educación secundaria, la observación se realizó a través de talleres de trabajo, en los cuales se identificó que el problema no es la falta de conocimientos sobre Estadística y Probabilidad, sino la falta de dominio de conocimientos didácticos necesarios para llevar estos conocimientos a sus alumnos.

Estas reflexiones dan cuenta que el problema no está en el poco tiempo dado a los temas de Estadística durante el año escolar o en el hecho de que los temas se ubican al final del año escolar o en el poco dominio de los profesores en la enseñanza de estos temas, sino que en muchos casos también está involucrado el poco interés o la poca valoración de los profesores por estos temas. Esta

idea se basa en algunas investigaciones realizadas, como Batanero (2009) donde se tiene un análisis de diferentes investigaciones sobre la formación de profesores para el área de Estadística o en Estrada, Bazán y Aparicio (2010), donde se aplican instrumentos para relacionar la actitud hacia la Estadística y el dominio de los conceptos básicos.

Por todo lo expuesto y como un paso previo a trabajar en la mejora del aprendizaje de los alumnos, se inició un trabajo para la mejora del dominio de los conocimientos básicos en estadística descriptiva y probabilidad de los profesores de educación básica. La hipótesis planteada es que el desarrollo del pensamiento estadístico en el profesor implica una mejora en el proceso de enseñanza de la estadística y la probabilidad. Por ello, se propuso el diseño de un proceso de fortalecimiento en el conocimiento teórico y didáctico de la estadística descriptiva y la probabilidad, para profesores de educación básica en ejercicio. El proceso propuesto requiere de un trabajo continuo con un grupo de profesores de primaria o secundaria, para fortalecer sus conocimientos y lograr no solo un cambio en su práctica docente, sino que tengan la posibilidad de llegar a convertirse en capacitadores para otros profesores de su entorno.

Para el desarrollo de este proyecto, desde el año 2014 se recibió el apoyo del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la DGI PUCP al ganar dos nuevos concursos organizados por esta dirección. El proyecto ganador del año 2015 consistió en la creación de una secuencia de talleres de formación docente para profesores de primaria y sus resultados se reportan en Osorio y Advincula (2016).

Como parte del desarrollo del proyecto de formación continua de profesores, durante el año 2016, se trabajó con profesores de primaria en el diseño y aplicación de sesiones de clase para estadística y probabilidad. Pero a los profesores les resultaba muy difícil crear las sesiones dada su poca experiencia en el dictado de estos temas y su falta de dominio de los contenidos a enseñar. Se coordinó con los profesores de la ciudad de Arequipa participantes del proyecto para iniciar un ciclo de clases modelo con pequeños grupos de alumnos. Estas clases modelo, implementadas fuera del horario escolar normal, servirían para demostrar la aplicación de las estrategias que se venía revisando para la enseñanza de la estadística y la probabilidad. Se contó con la presencia de profesores durante las clases e inmediatamente a su aplicación se tendría un taller de trabajo para analizar la experiencia, tomando algunos aspectos de la Lesson Study (Soto y Pérez, 2011). Se trabajó la discusión, evaluación y reflexión de la clase modelo por parte de los profesores participantes en el taller, pero no se llegó a realizar la aplicación de la sesión revisada.

A finales del 2016 se tiene en el Perú un nuevo Currículo Nacional donde el marco teórico y metodológico que orienta la enseñanza y el aprendizaje en el área de Matemática es, el enfoque centrado en la Resolución de Problemas. Dicho enfoque se construye tomando como referencia tres marcos teóricos: La Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), la Educación Matemática Realista de Bressan, Zolkover y Gallego (2004) y el enfoque de Resolución de Problemas de Schoenfeld (1985) que sustenta el desarrollo de las cuatro competencias en el área de Matemática, entre ellas, la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre que comprende los desempeños para la enseñanza de estadística y probabilidad. Esto implicó una reformulación de las estrategias utilizadas en el proceso de formación continua de nuestro proyecto.

Luego de la reformulación de estrategias y con la comprobación de las ventajas que brinda la experiencia de las clases modelo, se decidió continuar con un ciclo de clases modelo por cada grado del nivel primario. Esta labor se realizó durante tres años, del 2017 al 2019. Gracias a esta labor, se consolidó a un grupo de profesores del nivel primario como profesores capacitadores, que les permite en la actualidad desarrollar talleres de capacitación en estadística descriptiva a sus pares a nivel nacional.

Desde el año 2019 se inicia un trabajo similar con profesores del nivel secundario, teniendo en cuenta los desempeños solicitados para este nivel de estudio, por ejemplo, se debe considerar a las variables cuantitativas continuas, las medidas descriptivas de posición y las medidas de dispersión. Se forma un equipo de trabajo que se capacita de forma regular y a pesar de la pandemia, este grupo continúa el proceso de fortalecimiento mediante un trabajo virtual. Para este trabajo virtual se añadieron herramientas que permiten el trabajo práctico durante los talleres, como son: Jamboard, Miro o Kahoot.

Para el año 2022, el equipo de profesores del nivel secundario inicia el diseño y aplicación de las clases modelo presenciales con alumnos de secundaria, para lo cual están confeccionando las sesiones de clase que se trabajarán en la segunda parte del año. El presente artículo muestra el trabajo inicial de formación realizado con este equipo de profesores de secundaria y los hallazgos realizados con respecto a sus conocimientos sobre el desarrollo de situaciones problema en Estadística descriptiva.

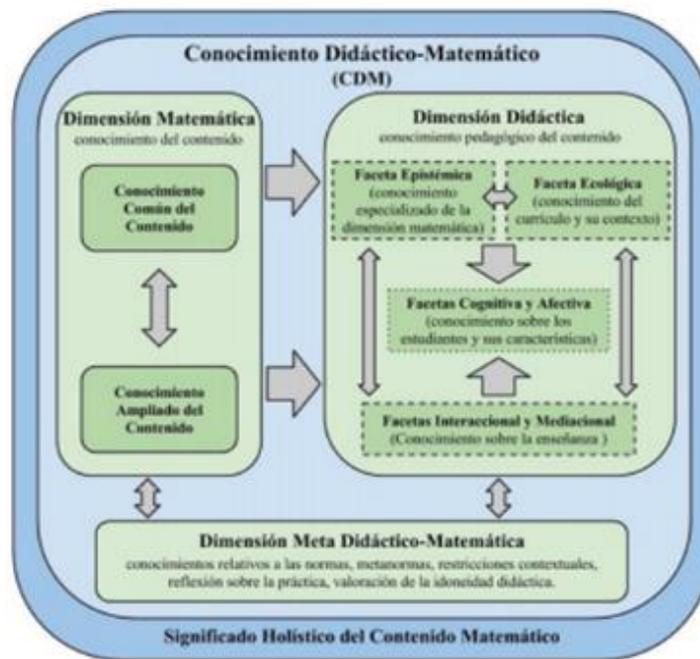
## **MARCO TEÓRICO**

El enfoque teórico de nuestra investigación se basa en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de Pino-Fan y Godino (2015), quienes proponen un sistema de categorías para analizar los conocimientos del profesor de matemáticas, esto a fin de sistematizar los distintos aspectos

implicados tanto en el proceso de enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas. El sistema de categorías propuesto está relacionado con los tipos de herramientas de análisis utilizadas en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de Godino, Batanero y Font (2007), en el cual cada herramienta pone en juego conocimientos didáctico-matemáticos.

El modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático permite interpretar y caracterizar los conocimientos de los profesores a partir de la dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión Meta didáctico-matemática, como se muestra en la Figura 1.

**Figura 1.** Dimensiones y componentes del CDM



**Fuente:** Pino-Fan y Godino (2015, p.98).

La dimensión matemática hace referencia al conocimiento del contenido, el cual a su vez se subdivide en el conocimiento común del contenido (lo que debe conocer el profesor de educación básica) y en el conocimiento ampliado del contenido (hasta dónde debe conocer el profesor de educación básica). La dimensión didáctica, trata del conocimiento pedagógico del contenido y la dimensión meta didáctico-matemática hace referencia a los conocimientos relativos a las normas, metanormas, restricciones contextuales, reflexión sobre la práctica y valoración de la idoneidad didáctica. Esta última dimensión es importante porque considera la reflexión sobre la práctica; por ejemplo, la observación de clases modelo realizadas por los profesores durante el proceso de

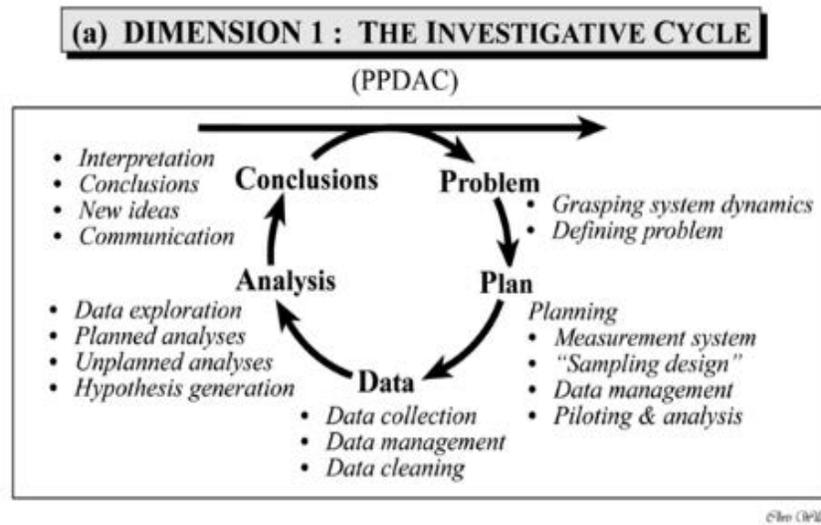
formación continua, ha propiciado analizar aspectos vinculados a su conocimiento, así como reflexionar sobre la manera cómo enseña y qué medios utiliza en la enseñanza de la estadística.

En relación con la enseñanza de la Estadística, nos basamos en el enfoque del pensamiento estadístico en la investigación empírica propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), quienes, a través del análisis del trabajo desarrollado por estadísticos y estudiantes de estadística, definen cuatro dimensiones para caracterizar el pensamiento estadístico:

- Dimensión 1: El Ciclo Investigativo. Conformado por las etapas que se siguen en una investigación estadística. Proponiendo como propuesta el modelo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis, Conclusiones) de MacKay y Oldford (1994, como se citó en Wild y Pfannkuch, 1999).
- Dimensión 2: Tipos de Pensamiento. Compuesto por los pensamientos comunes a todo el campo de resolución de problemas y los que son específicos del pensamiento estadístico. Entre estos últimos se tiene: la necesidad de los datos, la transnumeración, la variación, modelación y conocimiento del contexto.
- Dimensión 3: Ciclo Interrogativo. Compuesto por los procesos que aparecen durante el desarrollo de una investigación estadística. Conformado por los procesos que generan los planteamientos de resolución del problema, o los requerimientos de información; los procesos de búsqueda de información, los procesos de interpretación, por ejemplo, buscando las conexiones entre la información obtenida y los conocimientos previos del problema; los procesos de crítica basados en los puntos de referencia y los procesos de juicio para saber qué creer, qué continuar estudiando y qué descartar.
- Dimensión 4: Disposiciones. Compuesto por las disposiciones personales observadas en una persona mientras desarrolla una investigación estadística. Estas disposiciones son: escéptico, imaginativo, curioso y despierto, abierto, lógico, comprometido y perseverante.

Nuestro trabajo se centra en la dimensión I, ciclo investigativo o ciclo PPDAC, pues nos interesa indagar sobre el proceso que siguen las personas, profesores o alumnos, que resuelven problemas donde interviene la gestión de datos. Esta dimensión consta de cinco etapas: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones, como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Ciclo PPDAC



Fuente: Wild y Pfannkuch (1999, p. 226).

Desde nuestra experiencia, el ciclo PPDAC se usa como estrategia didáctica en la enseñanza de la estadística en cualquier nivel de estudios. Aunque para los niveles de educación básica (primaria y secundaria) es necesaria una simplificación de las actividades a realizar en cada una de las etapas, con el fin de que los profesores puedan ver claramente la correspondencia con los desempeños solicitados en el Currículo. La propuesta del uso del ciclo PPDAC busca que los profesores vayan más allá de solo el análisis de datos, pues se propone trabajar todas las etapas del ciclo con el mismo nivel de importancia. En el proyecto se usa este ciclo para generar un proceso de gestión de datos que permita a los docentes identificar la secuencia de actividades o tareas a trabajar en cada etapa del ciclo; así como los conceptos y procesos estadísticos que intervienen en las mismas. Además, se busca potenciar la capacidad del profesor para crear situaciones problema adecuadas para la enseñanza de la estadística descriptiva en cualquier grado de la educación básica (Osorio y Advincula, 2017).

La situación problema que se propone trabajar para la aplicación del ciclo PPDAC, es aquella situación en la que un alumno, individualmente o en grupo, deberá articular un conjunto contextualizado de información a fin de resolver una tarea determinada en la que la solución no es evidente a priori (Advincula, Osorio y Saire, 2021). La situación problema para la enseñanza de estadística se compone básicamente de:

- Un problema que se resuelve con los datos a recopilar, problema estadístico.
- Un contexto y las restricciones de trabajo.
- Un propósito para enfrentar el problema propuesto en el contexto dado.

- Un posible producto a realizar a partir de la solución del problema.
- Y en muchos de los casos, una problemática que enmarque el propósito.

Los elementos que conforman una situación problema se definen como:

- El problema estadístico, es lo que se quiere resolver y para lo que se requiere recopilar datos. El problema es el que promueve el proceso de gestión de datos
- El propósito, es el objetivo que se pretende alcanzar en el entorno del problema y que ha generado la existencia de problemas estadísticos.
- El contexto, circunstancias de la realidad que enmarcan el problema. Normalmente es un lugar, un grupo humano, una institución, conjunto de individuos que realizan una actividad puntual, etc.
- Las restricciones de trabajo, el contexto muestra elementos propios que permiten parametrizar la porción de realidad que se está trabajando.
- La tarea a realizar, es un producto del proceso de gestión y está vinculado al propósito propuesto. Se prepara en base a los resultados encontrados o la información relevante extraída de los datos.
- La problemática, es un problema de la realidad que enmarca el propósito y que por sus dimensiones es difícil de resolver mediante un solo proceso de gestión de datos. Por ejemplo: el reciclaje de la basura en Lima Metropolitana, la deforestación en la Selva, la escasez de agua, la desnutrición de los niños, etc.

Para establecer los objetos y procesos estadísticos que se trabajarán en cada etapa del ciclo PPDAC se considera necesario pensar en preguntas que generen su identificación.

- ¿Cuál es el problema estadístico a resolver en la situación problema propuesta?
- ¿Qué variables estadísticas necesitamos trabajar para resolver el problema estadístico identificado?
- ¿Quiénes nos deben proporcionar los datos sobre dichas variables?
- ¿Con qué instrumento vamos a recoger los datos?
- ¿Cómo vamos a aplicar los instrumentos y validar los datos recogidos?
- ¿Qué objetos estadísticos vamos a utilizar con estos datos para obtener información?
- ¿Qué información nos proporcionan los datos?
- ¿Cuál es la solución al problema estadístico propuesto?
- ¿Qué otras conclusiones podemos obtener de los datos?

- ¿Cómo comunicamos los resultados encontrados en los datos?

Los conceptos que se denominan básicos para la recopilación de datos en estadística descriptiva son tres: variable estadística, población o muestra.

El primer concepto, variable estadística, nos indica qué datos se necesitan para encontrar una solución al problema estadístico planteado, lo que implica definir la(s) variable(s) estadística(s) a trabajar. Este concepto se relaciona con la etapa Problema, donde es necesario determinar con qué datos podemos solucionar el problema identificado. Entonces se dice que la variable estadística es la respuesta a la pregunta: ¿qué datos necesitamos trabajar para resolver el problema estadístico identificado?

El segundo y el tercer concepto básico están relacionados con el tema de establecer el grupo de individuos (personas, animales o cosas) de los que se debe obtener los datos. Se habla de una población cuando sea posible llegar a todos los individuos y en caso contrario, se habla de una muestra. Esto significa que estos conceptos dan respuesta a la pregunta de la etapa Plan, ¿quiénes nos deben proporcionar los datos?

Luego, viene el trabajo para obtener los datos que nos interesan. Para ello se elabora un cuestionario con preguntas que permitan recoger los datos. De esta manera se responde a la pregunta ¿con qué instrumento vamos a recoger los datos?, la cual también forma parte de la etapa Plan.

Hay que tener un procedimiento para recopilar los datos, es decir, un proceso para aplicar los instrumentos diseñados. Por ejemplo, qué pasos seguirán los alumnos que aún no sepan escribir para recopilar los datos que requieren. Esta es la respuesta a la pregunta ¿cómo vamos a aplicar los instrumentos? que se relaciona con la etapa Datos. En esta etapa también se encuentra el trabajo de validar los datos recopilados, con el fin de eliminar o subsanar los datos atípicos o en blanco.

Una vez obtenidos los datos, surge la necesidad de delinear las estrategias para analizarlos, esto requiere organizarlos en tablas o en gráficos, o hallar alguna medida descriptiva y, finalmente, establecer preguntas para obtener información relevante a la solución del problema. Aquí contestamos las preguntas relacionadas con la etapa Análisis, ¿qué objetos estadísticos vamos a utilizar con estos datos para obtener información? y ¿qué información nos proporcionan los datos? Hay que tener presente que muchos de los tipos de pensamientos propuestos por Wild y Pfannkuch (1999) se manifiestan en esta etapa del proceso de investigación empírica.

Finalmente, se debe dar solución al problema con la información obtenida en la etapa anterior. Aquí se contesta la pregunta relacionada a la etapa Conclusión ¿cuál es la solución al problema estadístico propuesto? Lo que incluye la comunicación de los resultados mediante algún objeto

estadístico. Además, la etapa Conclusión conlleva a otras tareas, por ejemplo, extraer información adicional de los datos. La etapa Conclusión no solo responde al problema estadístico sino tiene que dar respuesta al propósito de la situación problema.

## **MATERIAL Y MÉTODOS**

La experiencia a describir en este artículo comprende los tres primeros meses de trabajo en el proceso de formación docente de un grupo de profesores del nivel secundario. Se escoge este período porque implica un primer contacto con la estrategia del ciclo PPDAC y culmina con su aplicación en la resolución de una situación problema en gestión de datos. Se busca describir los elementos estadísticos utilizados por los profesores para la resolución de la situación problema propuesta, considerando el contexto donde ésta se encuentra.

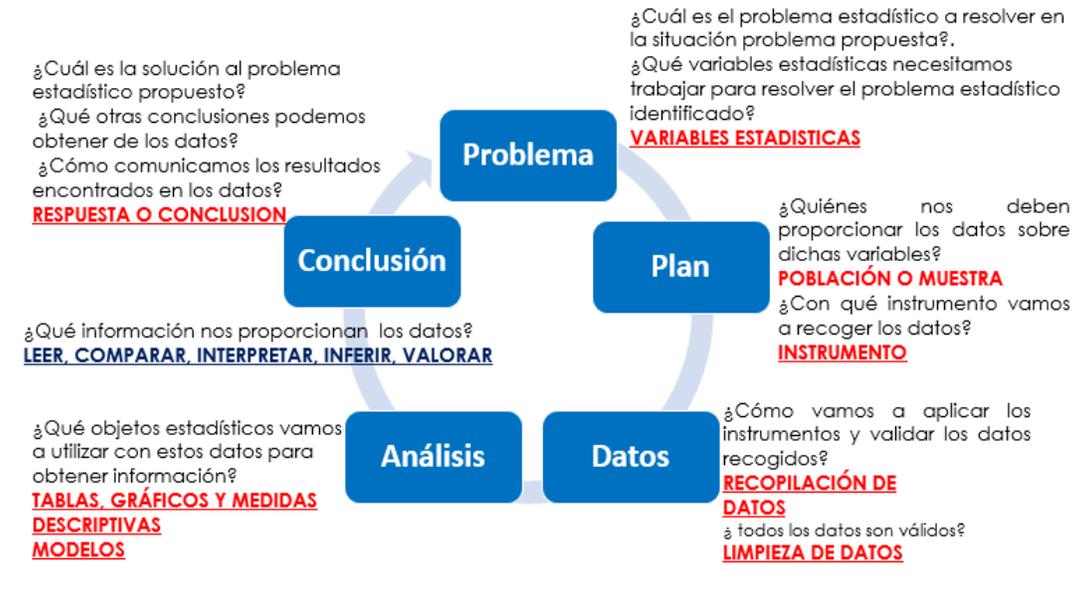
La experiencia que se describe se realizó durante el año 2019 y formó parte del trabajo de formación continua propuesto para profesores de educación secundaria. Se inició con un grupo formado por 15 profesores de la Unidad de Gestión Educativa Local (UGEL) 7 de Lima Metropolitana, que participaron por invitación de los especialistas del nivel secundario de dicha entidad. Estos profesores forman parte de un grupo particular de profesionales conformado por la UGEL 7, dándoles la categoría de profesores fortaleza. Han alcanzado dicha categoría por diversas cualidades como son: una destacada labor docente durante las supervisiones dentro del aula, la participación constante en eventos de capacitación propuestos por su UGEL y el MINEDU, el demostrar facilidades para las réplicas de las capacitaciones dentro de sus instituciones educativas, por presentación de propuestas de innovación en enseñanza ganadoras en diferentes concursos, etc. Los profesores pertenecen a distintas instituciones educativas y cuentan con un promedio de 20 años de experiencia profesional.

El material usado en la experiencia incluyó diversos temas que permitieron a los profesores conocer el ciclo PPDAC y entender su aplicación en la enseñanza de la estadística. Los temas se distribuyeron en varios momentos a lo largo del período indicado.

El primer momento comprendió tres actividades. En la actividad inicial se revisaron los documentos curriculares vinculados a la enseñanza de la Estadística en la educación básica, identificando las capacidades a desarrollar declaradas en los estándares nacionales de los últimos años.

La segunda actividad fue la presentación de las dimensiones del pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), enfatizando la primera dimensión, el ciclo PPDAC. Se establecieron de forma intuitiva las preguntas a realizar para que emerjan los objetos y los procesos estadísticos presentes en cada etapa del ciclo PPDAC, las cuales se muestran en la Figura 3.

**Figura 3.** *Objetos y procesos estadísticos dentro de las etapas del ciclo PPDAC*



**Fuente:** Elaboración propia

Luego, se presentaron las características que podría tener una situación problema para trabajar el desarrollo del pensamiento estadístico en el aula con base en el ciclo PPDAC y las consideraciones a tener en cuenta para el desarrollo de la situación. A continuación, se presentan algunas de estas consideraciones:

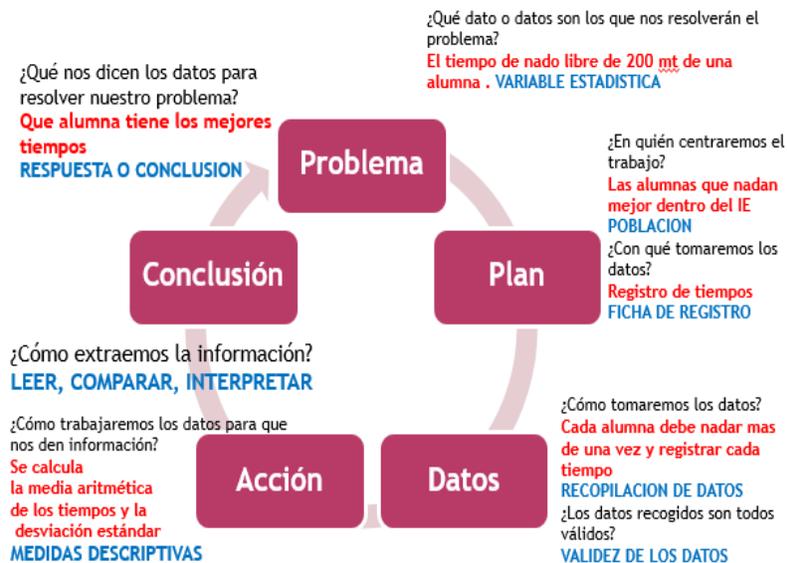
- La situación problema propuesta debe ser próxima al alumno y por tanto, el alumno debe conocer el contexto donde el problema estadístico se desarrolla.
- Los alumnos deberían decidir la población a trabajar, las preguntas a realizar en el instrumento y el método para recopilar los datos.
- Los alumnos deben determinar cómo trabajar los datos, evitando que el profesor les indique siempre que objeto estadístico utilizar.

Este primer momento concluyó con el análisis de una actividad tomada del Cuaderno de trabajo de Matemáticas de 1er año de secundaria (alumnos de 13 años), usando las etapas del ciclo PPDAC. La actividad solicita organizar datos sobre la cantidad de hermanos de los alumnos de un aula en una tabla de frecuencias, leer una frecuencia específica desde la tabla y calcular una frecuencia relativa acumulada. Se establecieron las limitaciones que presenta la actividad en término de la falta de propósito, la incompatibilidad entre la variable en estudio y los datos recopilados, y la presencia de solo preguntas de baja demanda cognitiva para el nivel de los estudiantes.

Durante el segundo momento, se trabajó el desarrollo de una situación problema siguiendo el esquema de preguntas propuesto en el marco teórico. La situación problema propuesta “El caso de las nadadoras”, cuyo enunciado es *La entrenadora de natación del colegio “San Mateo” debe seleccionar a sus dos mejores deportistas, quienes representarán a la institución educativa en los Juegos Deportivos Escolares de este año, en la categoría damas. ¿Cómo puede decidir cuáles alumnas serán las representantes del colegio en 200 m de nado libre?*

La resolución de este caso nos permitió ejemplificar cada concepto o proceso estadístico a desarrollar en el ciclo PPDAC, como se muestra en la Figura 4.

**Figura 4.** Resolución de la situación problema “El caso de las nadadoras”

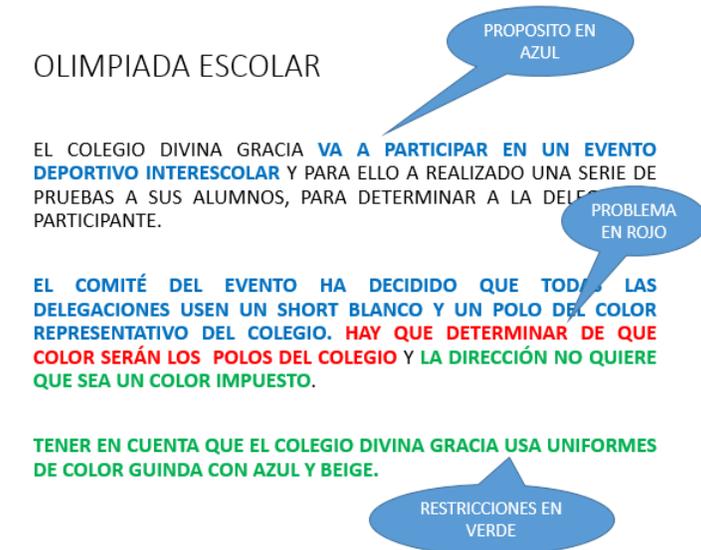


**Fuente:** Elaboración propia

Luego, la siguiente actividad fue el repaso de las características de cada una de las etapas del ciclo PPDAC y se dejó una nueva situación problema “La Olimpiada Escolar”, la que debían desarrollar los profesores para el próximo encuentro.

Al inicio del tercer momento se analizó la situación problema que se dejó de tarea, identificando los elementos que conforman el enunciado de la situación problema: el propósito, el problema estadístico, el contexto y las restricciones a considerar, las cuales se muestran en la Figura 5.

**Figura 5.** *Elementos en una situación problema*



**Fuente:** Elaboración propia

En la siguiente actividad se revisó la propuesta de solución de algunos profesores y se conversó al respecto. Finalmente, se hizo una revisión de los conceptos y procesos estadísticos relacionados con las tres primeras etapas del ciclo PPDAC: variables estadísticas, clasificación de variables estadísticas, población, muestra, instrumento y recopilación de datos, usando una nueva situación problema “El desayuno escolar”.

Para el cuarto momento, se trabajaron las dos últimas etapas del ciclo PPDAC de la situación problema “El desayuno escolar”.

Para el quinto momento, se propuso a los profesores una nueva situación problema “Riesgo de obesidad” y se pidió que analicen dicha situación usando las etapas del ciclo PPDAC.

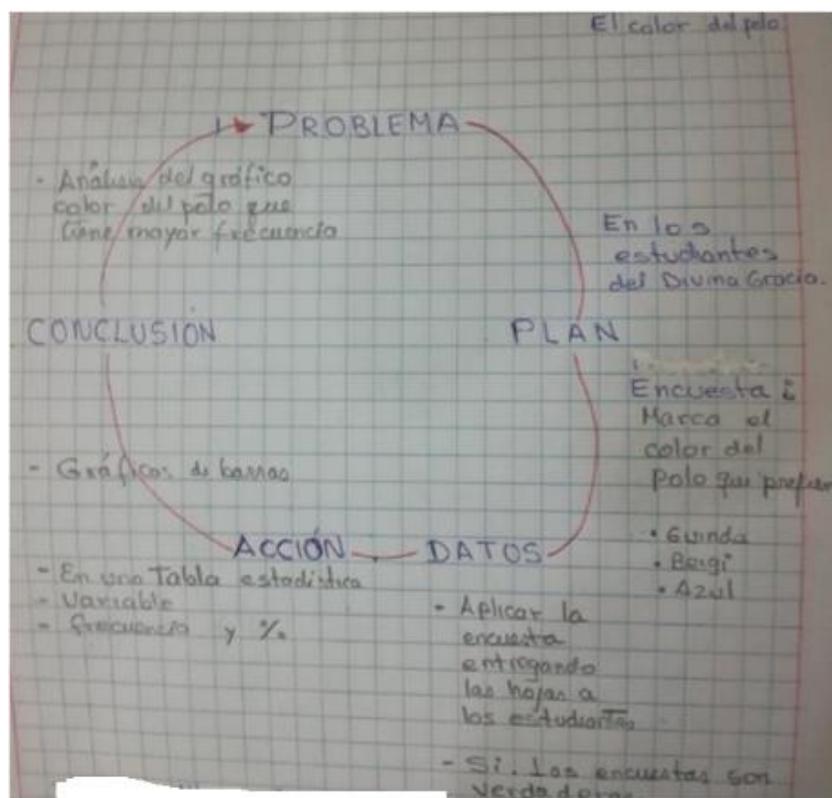
En el sexto momento se analizó el desarrollo propuesto por los profesores, formados en equipos, para las dos primeras etapas del ciclo PPDAC.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta parte se presenta el análisis de las soluciones propuestas por los profesores participantes a las situaciones problemas: “La olimpiada escolar” y “Riesgo de obesidad”.

Para la situación “La olimpiada escolar”, los profesores identificaron los conceptos y procesos estadísticos asociados a cada etapa del ciclo PPDAC, que se muestra en la Figura 6.

**Figura 6.** Reconocimiento del ciclo PPDAC en la situación problema “La olimpiada Escolar”



**Fuente:** Elaboración de un grupo de participantes

Se observa que en la etapa Problema del ciclo PPDAC, los profesores identificaron la variable estadística “El color del polo”. Consideramos que esta variable estadística estaría incompleta dado que la pregunta propuesta por los profesores para el cuestionario habla del color preferido, por tanto, la variable estadística a trabajar sería “El color preferido del polo”. Se observa que los profesores que desarrollaron esta propuesta, no reconocen la conexión que debe existir entre la variable estadística a trabajar y la pregunta en el cuestionario.

Para la etapa Plan, los profesores proponen como población “Los estudiantes del Divina Gracia”, sin embargo, se identifica una falta de precisión en la determinación de dicha población, dado que no especifican a qué grupo de estudiantes se refieren. Por ejemplo, podrían indicar: el total de la población escolar de la institución o los estudiantes seleccionados para la representación deportiva. Se observa que al construir la pregunta para el cuestionario consideran los colores proporcionados en el enunciado de la situación problema como las posibles opciones de respuesta, lo que sería lo esperado.

Para la etapa Datos se observa que proponen como proceso de recopilación de datos una encuesta de aplicación física, dado que indican la entrega de la hoja a los estudiantes que conforman la población.

Para la etapa Análisis, se observa que los profesores proponen la organización de los datos en una tabla con frecuencia absoluta y frecuencia relativa. Proponen como parte final del análisis, el realizar un gráfico de barras. Pero no se propone el objeto estadístico adecuado para la solución del problema, determinar la moda de los datos recopilados.

Más bien, la propuesta de tomar la moda la realizan en la etapa conclusión, como si fuera parte del proceso de extraer información para concluir y no parte de las herramientas estadística de análisis. Otro punto interesante es que los profesores proponen que para la conclusión se requiere un gráfico de barras, cuando ya tienen una tabla de frecuencias que les proporciona la misma conclusión.

Para la situación problema “Riesgo de obesidad”, cuyo enunciado es El comité de salud de la municipalidad de Santa Cruz ha iniciado un plan en el distrito buscando erradicar la obesidad infantil. Este comité quiere establecer cuáles son los niños en riesgo de obesidad y ofrecerles un plan alimenticio y de ejercicios. Para ello quieren realizar un primer estudio relacionado con el consumo de pan y piensan trabajar con los niños de primaria de los colegios del municipio. Los profesores propusieron los objetos estadísticos para las primeras dos etapas del ciclo PPDAC, cuyos detalles se muestran en la Tabla 1.

**Tabla 1.** *Desarrollos propuestos para la situación problema “Riesgo de obesidad”*

<b>Objetos Estadísticos</b>	<b>Grupo 1</b>	<b>Grupo 2</b>	<b>Grupo 3</b>
Variables estadísticas	Consumo de pan Frecuencia del consumo Cantidad de consumo de pan Peso del estudiante Talla del estudiante	Cantidad de panes que consume en una semana Variedad de panes que se consume Horario del consumo de pan	Número de panes que consume diariamente los estudiantes de primaria que pertenecientes a los colegios del Distrito de Santa Cruz
Población	Los niños de primaria de los colegios del municipio. Podemos considerar 20 alumnos por aula, del 1er grado a 6to grado, y como mínimo se tendrán 6 aulas por	Los niños de primaria de los colegios del municipio.	Todos los niños de primaria de los colegios del municipio de Santa Cruz que consumen pan.

	<p>colegio. Teniendo un total de 120 estudiantes. Si el Municipio tiene 6 colegios, entonces tendríamos una población de 720 alumnos.</p>		
Muestra	<p>Para este primer estudio, podemos estimar un 25 % de la población, lo que nos da una muestra de 180 estudiantes repartidos en las 6 Instituciones Educativas con 6 aulas cada una, estamos hablando de 5 alumnos por aula de 1ro a 6to grado</p>	<p>Escoger colegios de primaria (al azar) un 60% del municipio. De cada colegio escoger el 50% de niños de 1ero hasta 6to grado equitativamente entre hombres y mujeres</p>	<p>El 50% de los niños de primaria de los colegios del Municipio de Santa Cruz que consumen pan</p>
Cuestionario	<p>1. ¿Consumes pan?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Sí</li> <li>● No</li> </ul> <p>2. ¿Cada cuánto tiempo consumes pan?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Una vez al día</li> <li>● Dos veces al día</li> <li>● Tres veces al día</li> <li>● Cuatro a más veces al día</li> </ul> <p>3. ¿Cuánto pan consumes?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Un pan</li> <li>● Dos panes</li> <li>● Tres panes</li> <li>● Cuatro panes</li> <li>● Cinco a más panes</li> </ul>	<p>¿Cuántos panes consumes en una semana, aproximadamente? (marca solo una alternativa)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 1-5</li> <li>● 6-10</li> <li>● 11-15</li> <li>● 16 a más</li> <li>● No consumo pan</li> </ul>	<p>¿Cuál es tu peso?</p> <p>¿Con qué frecuencia comes verduras?</p> <p>¿Con qué frecuencia comes frutas?</p> <p>¿Con qué frecuencia comes pan?</p> <p>¿Cuántas veces al día comes pan?</p> <p>¿Cuántos panes comes al día?</p>

---

**Fuente:** Elaboración propia

Para la propuesta realizada sobre las variables estadísticas involucradas, se observa que cada grupo de profesores tiene una propuesta distinta a pesar que el objetivo era el mismo, estudiar el consumo de pan. En común proponen la variable estadística “Cantidad de panes consumidos”, pero hacen uso de temporalidades distintas: por vez, por día y por semana. Lo que posiblemente no estén

tomando en cuenta los profesores es que la temporalidad afecta la veracidad de la respuesta, la respuesta más precisa será aquella que requiere menos cálculos y por ello la temporalidad de “por vez” sería la que nos proporcione ese tipo de respuesta. También, se observa que uno de los grupos propone la variable estadística “Variedad de panes que consume”, que no es considerada en su cuestionario, pero el incluirla haría más completo el análisis de la resolución de la situación problema; dado que, si el pan que se acostumbra consumir tiene más peso, o más tamaño o es más dulce implica un mayor consumo de calorías y carbohidratos.

En cuanto a las poblaciones propuestas, se observa que los tres grupos tienen básicamente la misma idea, los niños de primaria de los colegios del municipio. Pero el grupo 3 hace una adición a esta población, indicando que se tomen en cuenta sólo a los niños que consumen pan. A pesar de esta diferenciación, es en realidad el grupo 1 el que ha tenido en cuenta dicha característica dado que lo considera en su cuestionario con la primera pregunta; mientras que el grupo 3 no lo ha incluido a pesar de considerarlo. Esto da indicios de que los profesores aún no tienen la habilidad de relacionar adecuadamente las variables a trabajar con el cuestionario propuesto.

Otra observación importante, es la explicación que presenta el grupo 1 para establecer el posible tamaño de la población considerada. Este ejercicio ayuda a establecer si existe la necesidad de construir o no una muestra y también, permite tener una idea sobre el tipo de muestreo que podría aplicarse.

Sobre las muestras propuestas por los tres grupos de profesores, se observa que todas incluyen un porcentaje de la población identificada. Esto nos hace reflexionar sobre el dominio que tienen los profesores sobre el proceso de muestreo y el concepto de muestra estadística. Posiblemente es por ello que buscan relacionar el concepto de tamaño de muestra con conocimientos más cercanos, como son los porcentajes. Se sabe que la formación inicial de los profesores de secundaria incluye, a nivel universitario, estadística descriptiva e inferencial; pero esto no sucede con los profesores egresados de institutos pedagógicos, los cuales no cuentan en la actualidad con programas que incluyan cursos de estadística y probabilidad.

Con respecto de los cuestionarios propuestos por los docentes, en el caso de los dos primeros grupos se observa una gran correspondencia entre las variables estadísticas consideradas y las preguntas planteadas. Pero en el caso del grupo 3 proponen preguntas que no tienen relación directa con el fin buscado en la situación problema, como las siguientes ¿con qué frecuencia comes verduras? y ¿con qué frecuencia comes frutas? Además, este mismo grupo propone sólo los enunciados de las

preguntas, pero no las opciones de respuestas. Esto da indicios de que los docentes de este grupo no tienen claro el significado de la construcción de una pregunta para recopilar datos.

Merece un comentario aparte, la importancia de tener un espacio para comparar los desarrollos presentados por los grupos de profesores, ya que este espacio posibilita la validación de las afirmaciones realizadas por el equipo de investigación con respecto a la aplicación del ciclo PPDAC. Por ejemplo, el análisis de las tareas que se deben realizar durante el desarrollo de las etapas del ciclo PPDAC depende del grado de proximidad del investigador con el marco contextual de la situación problema por resolver y de la familiaridad que se tenga sobre dicho contexto.

Por ello, los profesores siempre deberían esperar diferentes propuestas por parte de sus alumnos, para los diferentes objetos estadísticos por trabajar durante el análisis de una situación problema para el trabajo de gestión de datos.

## CONCLUSIONES

Se muestran los momentos iniciales del trabajo de formación realizado con un grupo de profesores de secundaria, a partir de lo cual se establece que los profesores de este grupo tienen un conocimiento estadístico básico, pero evidencian dificultades para aplicarlos en la resolución de situaciones problema de gestión de datos, dado que les resulta complicado articularlos y vincularlos con las etapas del ciclo PPDAC. Este es un primer indicio para profundizar y analizar en futuras investigaciones.

Cabe mencionar que el proceso de formación que se llevó a cabo con este grupo se vio afectado por la pandemia, la cual impidió el desarrollo de las clases modelo con alumnos de secundaria y esto ha ralentizado el proceso de reflexión docente sobre su práctica en la competencia relacionada con la estadística y la probabilidad.

La experiencia con estos grupos de profesores de educación básica, primaria y secundaria, permite señalar que es necesario que los profesores experimenten de manera directa, la creación y aplicación de situaciones problema siguiendo las etapas del ciclo PPDAC. Estas experiencias deben darse, en un primer momento, mediante clases modelo a cargo de los profesores en formación, para lograr el desarrollo de su propio pensamiento estadístico y con el fin de mejorar su enseñanza en sesiones reales.

Este proyecto de formación continua permite identificar las dificultades más resaltantes en los profesores de educación básica en relación con la enseñanza de la estadística y la probabilidad, y estructurar una propuesta de enseñanza en la educación básica.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Advincula, E., Osorio, A. & Saire, C. (2021). Secuencia didáctica para la creación de situaciones problema en gestión de datos. *Quintaesencia*, 12, 62-69. <https://revistas.unh.edu.pe/index.php/quintaesencia/article/download/108/97/227>
- Batanero, C., Contreras, J. M. & Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM TELA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2), 1-20. <http://www.ugr.es/~batanero>
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. Conferencia: II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, Braga, Portugal. <http://www.ugr.es/~batanero>
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Conferencia inaugural. <http://www.ugr.es/~batanero>
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, F. (2004). Los principios de la educación matemática realista. En *Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática*. Compilador: Alagia, H. y otros. Libros del Zorzal.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. [Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo].
- Cuevas, J. & Ibáñez, C. (2008). Estándares en educación estadística: Necesidad de conocer la base teórica y empírica que los sustentan. *Unión Revista Iberoamericana de Educación matemática*, 15, 33-45. ISSN: 1815-0640
- Estrada, A., Bazán, J. & Aparicio, A. (2010). Un estudio comparativo de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *Revista Unión*, 24, 45-56. <https://core.ac.uk/download/pdf/328833626.pdf>
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Grima, P. (2010). Estadística: Enseñar y crear actitudes positivas a través de casos prácticos. *Revista Iberoamericana de Educación matemática*, 24, 11-26. ISSN: 1815-0640
- Jiménez, L. & Jiménez, J. (2005, mayo). ¿Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué? *Cidse-Revista virtual matemática- Educación e Internet*, 6(1). <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/contribuciones-v6-n1-may2005/arti-aleat/index.html>
- Ministerio de Educación del Perú. (2009). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular. *Dirección General de Educación Básica Regular*.
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). Programa Curricular de Educación Primaria. *Dirección General de Educación Básica Regular*.
- Osorio, A. & Advincula, E. (2017). Creación de problemas para la gestión de datos en la educación básica. En *FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, (pp. 67-74). Madrid, España: FESPM.

- Osorio, A. & Advincula, E. (2016). Fortalecimiento de docentes del nivel primario en la creación de problemas relacionados con el análisis de datos. En *Instructional strategies in teacher training*, José G. Galán, Eloy López Meneses, Laura Molina García (Eds.), (pp. 564-570). ISBN 978-1-943697-08-3.
- Osorio, A. R. & Advincula, E. (2015). En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2 (pp. 381-387). Granada, 2015. Midiendo los logros de estudiantes de la Educación Básica Regular en Estadística y Probabilidad. En *Segunda Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 381-387). Granada: Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Estadística Española.
- Pino-Fan, L.R. & Godino, J.D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Ruiz, N. (2015). La enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria en América Latina. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 13 (Enero-Marzo).
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.
- Soto, E. y Pérez, A. (2011). Las Lesson Study ¿Qué son? *Guía Lesson Study*, 1-9.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

## **DIFFICULTIES OF TEACHERS WHEN SOLVING A STATISTICS PROBLEM SITUATION**

### **ABSTRACT**

The continuous training of basic education teachers is a topic of interest, for which various activities are carried out such as workshops, demonstration classes, panels, etc., which seek to mitigate the deficiencies that teachers present, in terms of their disciplinary and didactic domain in the teaching of Statistics and Probability. This article presents the difficulties experienced by secondary school teachers when they solve a problem situation in Statistics. The professors' proposals are given within a sequence of workshops where the investigative cycle is proposed as a strategy for the development of the solution of a statistical problem. It is found that high school teachers show mastery of the contents, but they do not articulate them, nor do they relate them to the stages of the investigative cycle.

Keywords: High school teacher training; Teaching of statistics; the investigative cycle; Statistics problem situation.

## **DIFICULDADES DOS PROFESSORES AO RESOLVER UMA SITUAÇÃO PROBLEMA DE ESTATÍSTICA**

### **RESUMO**

A formação contínua de professores do ensino básico é um tema de interesse, para o qual são realizadas diversas atividades como workshops, aulas demonstrativas, painéis, etc., que procuram mitigar as deficiências que os professores apresentam, ao nível do seu domínio disciplinar e didático no ensino de Estatística e Probabilidades. Este artigo apresenta as dificuldades sentidas por professores do ensino secundário quando resolvem uma situação-problema em Estatística. As propostas dos docentes são apresentadas numa sequência de workshops onde se propõe o ciclo investigativo como estratégia para o desenvolvimento da solução de um problema estatístico. Verifica-se que os professores do ensino médio demonstram domínio dos conteúdos, mas não os articulam, nem os relacionam com as etapas do ciclo investigativo.

Palavras-chave: Formação de professores secundários; Ensino de Estatística; ciclo investigativo; Situação-problema para Estatística.

*ELIZABETH ADVINCULA CLEMENTE*  
*Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.*

[eadvincula@pucp.edu.pe](mailto:eadvincula@pucp.edu.pe)

<https://orcid.org/0000-0003-3941-3139>

Licenciada en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Magister en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Profesora Ordinaria - Categoría Auxiliar del Departamento de Educación de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) desde 2017. Profesora Contratada del Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú desde el 2006 al 2016. Miembro ordinario del Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP.

*AUGUSTA OSORIO GONZALES*  
*Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú*

[arosorio@pucp.edu.pe](mailto:arosorio@pucp.edu.pe)

<https://orcid.org/0000-0002-0012-7920>

Licenciada en Estadística de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Magister en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Profesora Contratada del Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú desde el 2004. Miembro Colaborador del Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP. Coordinador BI del área de Inteligencia de Datos de la Dirección de Tecnologías de Información de la Pontificia Universidad Católica del Perú desde 2005.

*MILUSKA OSORIO MARTÍNEZ*  
*Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú*

[mosoriom@pucp.edu.pe](mailto:mosoriom@pucp.edu.pe)

<https://orcid.org/0000-0001-5448-0677>

Ingeniero en Estadística de la Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM). Magister en Docencia Universitaria y Gestión Educativa de la Universidad Tecnológica del Perú (UTP). Profesora Contratada del Departamento de Educación de la Pontificia Universidad Católica del Perú desde el 2021. Miembro Colaborador del Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP.



# EL USO CURRICULAR DEL PROGRAMA TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN EN LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

DAMIAN ALEJANDRO CLEMENTE OLAGUE  
ANA LUISA GÓMEZ-BLANCARTE

## RESUMEN

En este capítulo se ofrece una perspectiva de la formación estadística que reciben los futuros profesores de matemáticas de educación secundaria en una Escuela Normal de México. El objetivo es mostrar el proceso de uso del programa de estudio de una de las asignaturas que cursan los futuros profesores denominada *Tratamiento de la información*. Para ello, se analizaron las cuatro fases de uso del programa: currículo escrito, currículo intencionado, currículo ejecutado y aprendizaje de los alumnos. El método de estudio se basó en dos técnicas de investigación: documental y observación. El análisis buscó identificar las orientaciones de enseñanza que se promueven en cada una de las fases, según los enfoques de cultura, razonamiento y pensamiento estadístico. Los resultados dan cuenta de las transformaciones de esas orientaciones durante las fases de uso por las que transita el currículo escrito (programa de estudio). Observamos que los elementos de los enfoques que sugiere el currículo escrito pueden diferir de aquellos que promueve el formador. En este sentido, concluimos sobre la necesidad de ampliar el conocimiento de los formadores para resignificar las sugerencias curriculares, así como la necesidad de que los programas de estudio ofrezcan ejemplos para poner en práctica esos enfoques.

Palabras clave: Educación estadística; Transformación curricular; Futuros profesores; Cultura, razonamiento y pensamiento estadístico.

## INTRODUCCIÓN

### Contexto del estudio

En México las Escuelas Normales son las instituciones de mayor importancia para la formación de profesores de niveles escolares básicos como son la educación preescolar (alumnos de 3 a 5 años), primaria (alumnos de 6 a 11 años) y secundaria (alumnos de 12 a 14 años) (Navarrete-Cazales, 2015). Por ello, son contextos idóneos para la investigación en el campo de la educación de profesores de estos niveles escolares.

Desde su reconocimiento como instituciones formadoras, estas Escuelas han transitado por diferentes cambios en sus trayectos formativos y planes de estudio. Por ejemplo, el último cambio curricular del Plan de Estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en

Clemente Olague, D. A. y Gómez-Blancarte, A. (2022). El uso curricular del programa tratamiento de la información en la formación estadística de futuros profesores de matemáticas. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 457-481). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

El uso curricular del programa tratamiento de la información en la formación estadística de futuros profesores de matemáticas

Educación Secundaria (LEAMES), que se dio en el 2018 (Secretaría de Educación Pública [SEP], s.f.-b), presentó uno de los mayores incrementos en el número de asignaturas relacionadas con el área de estadística y probabilidad (estocástica) (ver Tabla 1).

**Tabla 1.** *Comparativo entre el número de asignaturas en los Planes de Estudio de 1942 a 2018*

Planes de Estudio	AT	AM	AE	Nombre de las asignaturas del AE
1942	19	12	1	Cálculo de probabilidades y elementos de estadística (obligatoria)
1945	23	15	0	
1959	26	16	0	
1976	48	18	2	Estadística y Probabilidad I (obligatoria) Estadística y Probabilidad II (obligatoria)
1988	48	19	2	Estadística Aplicada a la Educación I (obligatoria) Estadística Aplicada a la Educación II (obligatoria)
1999	46	14	1	Presentación y tratamiento de la información (obligatoria) Tratamiento de la información (obligatoria)
2018	53	22	4	Pensamiento estocástico (obligatoria) Estadística inferencial (obligatoria) Análisis e interpretación de datos (optativa)

**Nota:** *Asignaturas totales del Plan de Estudios (AT), del área de Matemáticas (AM), del área Estocástica (AE).*

**Fuente:** Elaboración propia según información de Rodríguez (2010), Secretaría de Gobernación (1976, 1988), y SEP (s.f.-a, s.f.-b).

A pesar de un incremento en el área de estocástica (AE), el Plan de Estudios 2018, al igual que los que le antecedieron, carece de asignaturas relacionadas con la didáctica o enseñanza de la estocástica, es decir, las asignaturas tratan más sobre el contenido disciplinar que sobre la didáctica de dicho contenido. La falta de este componente didáctico de la disciplina en la formación de profesores de matemáticas también parece presentarse en otros países como Chile, Colombia, Sudáfrica y Uganda (del Pino y Estrella, 2012; Estrella, 2017; Opolot-Okurut y Eluk, 2011; Wessels, 2011), por señalar algunos, lo que da cuenta de una característica internacional en la formación estadística de profesores de matemáticas.

Diferentes investigaciones ofrecen sugerencias para una formación más didáctica de la estadística, por ejemplo:

1. Que los profesores experimenten el proceso investigativo como parte de su formación, de manera que cuando ellos enseñen en sus aulas promuevan la enseñanza de la estadística como una herramienta de investigación que favorece la resolución de problemas en contextos reales (Batanero, 2000; Burgess, 2008; del Pino y Estrella, 2012; Estrella, 2017; Ferrari y Corica, 2017).
2. Que se fomente un conocimiento adecuado de los términos estadísticos básicos (e.g., tablas, gráficos, medidas de centro o dispersión), ya que suele ser limitado en algunos profesores, lo que provoca ambigüedad o errores en la implementación de estos (Burgess, 2008; del Pino y Estrella, 2012; Estrella, 2017; Sánchez y Hoyos, 2013).
3. Que la educación del futuro profesor este alejada de una interpretación con sentido determinista tradicional de la clase de matemáticas, de manera que ellos puedan entender la enseñanza de la estadística bajo la idea de datos y variabilidad (Batanero, 2000; Cobb y Moore, 1997; Estrella, 2017; Sánchez y Hoyos, 2013).
4. Que, durante su formación inicial, se comprometa a los profesores en el diseño e implementación de actividades que, por un lado, estén relacionadas con su práctica docente; por otro, estén organizadas en torno a los nuevos enfoques de enseñanza de la estadística (del Pino y Estrella, 2012; Sánchez y Gómez-Blancarte, 2015).

Estas sugerencias deberían incorporarse en los programas de estudio que guían la formación de futuros profesores de matemáticas, pero también son necesarias para los formadores de estos futuros profesores.

El no tener especificaciones programáticas sobre la didáctica de la estocástica es un factor relevante en la formación de profesores, pues esto puede influir en el enfoque de enseñanza de esta disciplina. Otra característica que influye en este enfoque es el hecho de que el estudio de la estadística tenga lugar en los planes de estudio de matemáticas. Dicha incorporación de la estadística como parte del área matemática es también una característica compartida a nivel internacional (Burrill, 2011; Shaughnessy, 2007; Vásquez y Cabrera, 2022).

Al igual que otros países como Brasil, Costa Rica, Sudáfrica y Uganda, por mencionar algunos, en México no existe una formación de profesores en educación estadística. Los profesores en servicio que desean profundizar en la enseñanza de la disciplina lo hacen participando en programas de profesionalización, cursos o talleres relacionados con la enseñanza y aprendizaje de estadística y/o probabilidad (Burrill, 2008; Burril y Biehler, 2011; Campos et al., 2011; Cuevas, 2013; Opolot-Okurut

y Eluk, 2011; Wessles, 2008). Los futuros profesores, conocen de la disciplina según las asignaturas incluidas en su Plan de Estudios.

Bajo este contexto en el que los futuros profesores de las Escuelas Normales en México reciben una formación estadística, el artículo reporta un caso de formación de futuros profesores que cursan la LEAMES, mismos que serán profesores de matemáticas e impartirán temas de estadística y probabilidad a estudiantes de nivel secundaria. El artículo es producto de una investigación realizada por el primer autor (Clemente Olague, 2021) bajo la dirección del segundo autor.

### **Alcance del estudio**

El presente estudio analiza la *transformación curricular* del programa de estudios de una de las asignaturas del actual Plan de Estudios 2018 que guía la formación de profesores de la LEAMES, denominada *Tratamiento de la información*. Se analiza el proceso que conlleva la puesta en práctica de ese programa. Es decir, analizar las sugerencias de la enseñanza de la estadística propuestas en el programa de estudio, su interpretación por parte del educador o formador de profesores, su implementación en el salón de clases y el aprendizaje de los estudiantes (futuros profesores).

En este estudio se propone que la investigación sobre la formación de los profesores debe abordarse de manera más holística, desde las sugerencias de los programas de estudio que guían esa formación, pasando por la manera en que el formador las interpreta y ejecuta durante la clase, hasta el aprendizaje que adquiere el futuro profesor. Eichler (2010, 2011) señala que la mayoría de los estudios curriculares están dirigidos principalmente al análisis de su estructura, dando evidencia parcial y mínima sobre cómo el currículo es procesado por el docente para su planeación e implementación y sobre el aprendizaje del contenido por parte de los estudiantes.

## **MARCO CONCEPTUAL**

### **El uso del currículo**

Córica y Dinerstein (2009), Pansza (1987) y Stein et al. (2007) coinciden en que el currículo hace referencia a lo esencial o al contenido a enseñarse y aprenderse (¿qué enseñar?, ¿qué aprender?), a las expectativas de la instrucción expuestas en los documentos oficiales o construcciones teóricas y a los materiales diseñados para ser utilizados por los docentes en el aula de clases. De acuerdo con Stein et al. (2007) el currículo transita por cuatro fases cuando es utilizado por el profesor para guiar la enseñanza: *currículo escrito, currículo intencionado, currículo ejecutado y aprendizaje de los estudiantes*.

### ***Fase 1: Currículo escrito***

Se representa por el documento prescrito por las autoridades educativas, producto de los acuerdos tomados por la comunidad educativa y política, en el que se hacen explícitos tanto los contenidos a enseñarse como los objetivos académicos a alcanzar (Eichler, 2010).

El currículo escrito en este estudio es el programa de estudios de la asignatura “Tratamiento de la información” (en adelante PTi), el cual presenta en su contenido la estructura, los propósitos y descripción del curso, así como sugerencias metodológicas y didácticas para el aprendizaje y la enseñanza del contenido de dicho programa (SEP, 2018).

### ***Fase 2: Currículo intencionado o planificado***

El currículo intencionado representa más una imagen de la práctica a ejecutarse en el salón de clases que al propio currículo oficial, ya que es la interpretación del currículo escrito que hace el docente. Para Stein et al. (2007), el currículo intencionado se “refiere a las intenciones del docente, es decir, el currículo planificado por el docente para ser enseñado” (p. 340). Dicha interpretación curricular conlleva la intervención de factores como la experiencia y el conocimiento que el profesor posee, factores que le sirven para dar sentido al contenido presentado en el currículo escrito. Esta interpretación del currículo oficial para elaborar la planificación genera el primer momento de transformación curricular. Stein y colaboradoras comentan que cuando el docente utiliza el currículo para elaborar su planificación, éste asume un papel mediador entre el currículo escrito y el aprendizaje de los estudiantes.

A partir de la planificación, al docente le es posible identificar: 1) la progresión en los objetivos de enseñanza para cada unidad de aprendizaje o bloque de contenidos; 2) los vínculos entre los objetivos de la enseñanza; 3) el avance de los estudiantes (a través de la evaluación de los aprendizajes) y la posibilidad de realizar un ajuste en la revisión o retroalimentación de los contenidos; 4) cómo se pueden incorporar los objetivos para usar y aplicar el contenido disciplinar en las unidades de aprendizaje y 5) la conexión entre los contenidos considerados para su diseño (Jones, 2011).

### ***Fase 3: Currículo ejecutado***

El momento en que el docente implementa lo planificado en el espacio destinado para la clase (puede ser el salón de clase) es justo cuando se da lugar a la ejecución del currículo (Batanero, 2001; Stein et al., 2007). La puesta en práctica de lo planificado puede entenderse como una fidelidad a lo prescrito en el currículo intencionado o una adaptación entre las propuestas externas y la realidad de cada centro o aula (Bolívar, 2008a).

La ejecución del currículo genera entornos propicios para fomentar aprendizajes en los estudiantes donde, además, el profesor decide qué enseñar (contenido) y cómo desarrollarlo en las clases. Esta decisión puede estar basada en factores como el conocimiento del profesor, sus experiencias docentes, las actitudes que tienen los estudiantes hacia la asignatura, entre otros elementos. Tales factores pueden hacer que el currículo ejecutado difiera del currículo oficial y, probablemente, del planificado (Bolívar, 2008b; Cuban, 1993; Mayer, 2014).

#### ***Fase 4: Aprendizaje de los alumnos***

El aprendizaje de los alumnos constituye la fase de culminación del uso del currículo en la enseñanza. El aprendizaje entendido como las ideas y habilidades que los estudiantes desarrollan en clase, producto de la interacción entre contenido-estudiante-docente, y que puede ser validado mediante un proceso de evaluación (Batanero, 2001; Stein et al., 2007).

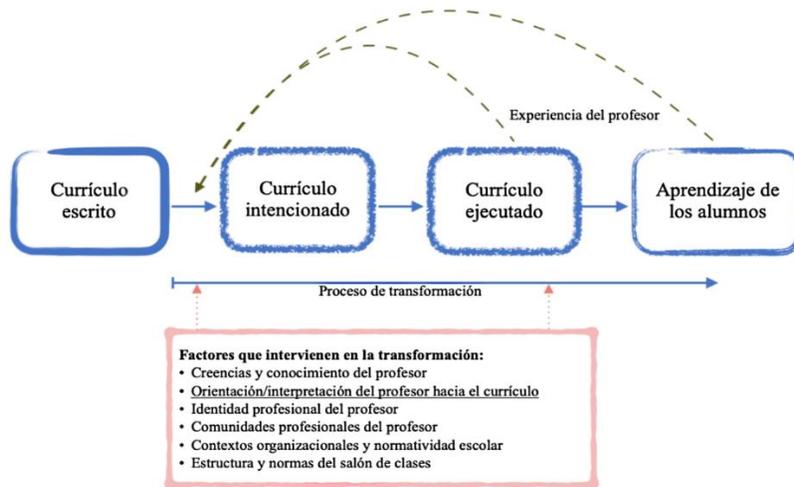
Con base en la perspectiva teórica de Stein et al. (2007) el aprendizaje de los alumnos podría estar influenciado por cuatro factores:

1. La interpretación del currículo escrito realizada por el profesor como un determinante del contenido al que será expuesto el alumno.
2. Las tareas propuestas, que predeterminan qué y cómo aprenderán el contenido disciplinar los alumnos, provocando que éstos dirijan su atención a aspectos particulares tanto del contenido como en los métodos para procesar la información.
3. La capacidad del docente para mantener la demanda cognitiva del currículo escrito. Es decir, la orientación que da el profesor al proceso de enseñanza.
4. El ambiente de aprendizaje.

#### **Transformación curricular**

Se entiende por transformación curricular a las modificaciones que sufre el currículo durante su uso (ver Figura 1), las que se dan por “factores que median en los procesos interpretativos e interactivos que ocurren dentro y entre las fases” (Stein et al., 2007, pp. 321-322). Los factores señalados en el rectángulo inferior de la Figura 1 son aquellos que definen los elementos intrínsecos y extrínsecos al profesor que pueden incurrir en cada una de las fases de uso del currículo y en el tránsito de una a otra fase. En esta investigación se estudió el factor *orientación/interpretación del profesor hacia el currículo* como incidente en la transformación del PTi.

**Figura 1.** *Proceso de las fases de uso del currículo y factores de transformación curricular*



**Fuente:** Adaptado de Eichler (2010) y Stein et al. (2007).

## MATERIAL Y MÉTODOS

### Participantes

El participante principal fue el educador titular que impartió el curso a futuros profesores de matemáticas, quienes, oficialmente cursaban la LEAMES (licenciatura constituida por ocho semestres). Tanto el educador como el grupo de estudiantes fueron elegidos por conveniencia (Hernández et al., 2014), pues eran los únicos que cursaban la asignatura Tratamiento de la información en una Escuela Normal del estado de Colima a la cual se permitió el acceso a uno de los autores.

Los estudiantes del curso tenían entre 18 y 23 años. A la fecha, el educador contaba con 42 años de servicio en la docencia, 14 de ellos en la Escuela Normal. El educador tiene una formación académica de Profesor de Educación Media en la Enseñanza de la Especialidad de Biología y Maestro en procesos para la Calidad Educativa, su experiencia como docente se ha centrado en los cursos del área de Ciencias Naturales, Trabajo docente, Análisis del trabajo docente y Taller de diseño de propuestas didácticas. El educador comentó carecer de experiencia en la enseñanza de la estadística, puesto que era la primera ocasión que impartía un curso de esta disciplina.

### Técnicas de investigación

Los datos fueron recolectados mediante la implementación de las técnicas documental y de observación (de Freitas et al., 2017). La técnica documental se ejecutó durante la revisión del PTi (currículo escrito), la planificación elaborada por el educador (currículo planificado) y el portafolio de evidencias elaborado por los estudiantes (aprendizaje de los alumnos). La técnica de observación se

llevó a cabo de manera no participativa durante la grabación de las sesiones de clase impartidas por el educador (currículo ejecutado).

### Análisis de los datos

El tratamiento de los datos se organizó por cada una de las fases correspondientes al uso del currículo. El procedimiento de análisis fue cualitativo (de Freitas et al., 2017) y se centró en analizar el factor *orientación/interpretación del educador hacia el currículo* como incidente en la transformación curricular. Como puntos de referencia para guiar el análisis de dicho factor se usaron indicadores de los enfoques de cultura estadística (CE), razonamiento estadístico (RE) y pensamiento estadístico (PE), propuestos por Chávez Aguilar (2020) y Gómez-Blancarte et al. (2022). Dichos indicadores fueron utilizados como medio para clasificar operativamente las orientaciones prescritas, implícita o explícitamente, en el PTi y las manifestadas, implícita o explícitamente, por el educador en su planificación (currículo intencionado) y durante su enseñanza (currículo ejecutado), así como las desarrolladas por sus estudiantes (aprendizaje de los alumnos). En la Tabla 2 se muestran las características de los enfoques y el número de indicadores que los constituyen.

**Tabla 2.** Características e indicadores analíticos de cultura, razonamiento y pensamiento estadístico

Enfoque	Característica	No. de indicadores
CE	1.1. Habilidades de alfabetización estadística	8
	1.2. Conocimiento estadístico base	4
	1.3. Conocimiento matemático	5
	1.4. Conocimiento del contexto	4
	1.5. Preguntas críticas	4
	1.6. Creencias y actitudes	3
	1.7. Postura crítica	5
RE	2.1. Desarrollo de ideas estadísticas (Datos, Distribución, Variabilidad, Medidas de centro, Modelos estadísticos, Covariación, Aleatoriedad, Muestreo e Inferencia estadística)	9
	2.2. Justificación de resultados y conclusiones	1
	2.3. Desarrollar un ambiente de razonamiento profundo y significativo	4
PE	3.1. Ciclo investigativo	5
	3.2. Tipos fundamentales de pensamiento estadístico	5

**Fuente:** Adaptado de Gómez-Blancarte et al. (2022).

### ***Fase 1. Análisis del currículo escrito***

Se hizo un análisis de texto para identificar y caracterizar el enfoque de enseñanza del PTi, según los indicadores de CE, RE y PE. Para ello, se revisaron dos grandes apartados del PTi: Propósitos y orientaciones y Unidades de aprendizaje (UA<sup>1</sup>). El PTi se organiza en tres UA: UA I. Elementos de análisis cuantitativo; UA II. Distintas tendencias de medida; UA III. Distribuciones de probabilidad. Las evidencias encontradas se codificaron según el indicador o indicadores al que se asociaban los enunciados de cada apartado, ya que un mismo enunciado podía implicar más de un indicador.

### ***Fase 2. Análisis del currículo intencionado (planificación)***

Se analizó el plan de clase elaborado por el educador a fin de observar el uso que hizo del PTi, así como para identificar los indicadores de CE, RE y PE implicados en las actividades de clase propuestas. De las tres unidades de aprendizaje que componen el PTi se analizó únicamente la UA I, ya que fue la única videograbada debido a la suspensión de actividades derivado de la contingencia sanitaria por COVID-19.

El análisis de la planificación se agrupó en dos categorías: Propósitos y competencias y Elementos de las UA. La categoría Propósitos y competencias comprende el Encuadre de la asignatura (propósitos generales) y la Organización por campos (competencias genéricas, profesionales y disciplinares, orientaciones para el aprendizaje y enseñanza, sugerencias de evaluación y criterios). El contenido de esta categoría se comparó con la información presentada en el PTi a fin de conocer el propósito plasmado en la planificación y establecer los puntos en común con el propósito preestablecido en el PTi. La segunda categoría de análisis se elaboró a partir de la descripción de la información contenida en la UA I de la planificación y las actividades de enseñanza propuestas por el educador, según las características de los enfoques de CE, RE y PE.

### ***Fase 3. Análisis del currículo ejecutado***

La UA I se programó en la planificación del educador para desarrollarse en 12 sesiones de clase, de 100 minutos cada una en el periodo escolar febrero-julio 2020. Del total de las sesiones solo fue posible videgrabar cinco, dando un total de más de 6 horas de grabación. Las siete sesiones no grabadas fueron por la suspensión de actividades a consecuencia de la contingencia sanitaria.

En esta fase, el análisis consistió en la revisión de la transcripción de las videgrabaciones de clase, a fin de identificar cómo fueron ejecutadas las actividades planificadas para la UA I: 1) el

---

<sup>1</sup> Esta abreviatura corresponde tanto al plural como al singular del término unidad de aprendizaje.

El uso curricular del programa tratamiento de la información en la formación estadística de futuros profesores de matemáticas

cumplimiento de la intención y las actividades predeterminadas en la planificación y 2) el enfoque de enseñanza de CE, RE y PE, es decir, identificar la correspondencia entre la planificación del educador y las tareas ejecutadas durante la enseñanza de la UA I.

#### ***Fase 4. Análisis del aprendizaje de los alumnos***

El aprendizaje de los estudiantes, correspondiente a la UA I, fue analizado a partir de sus portafolios de evidencias (compilación de los productos de aprendizaje solicitados por el educador) y de las conversaciones durante las cinco clases videograbadas. Se revisó la correspondencia entre las intenciones ejecutadas por el educador y el posible aprendizaje de sus estudiantes. Para ello, los indicadores de los enfoques de CE, RE y PE sirvieron para clasificar los diálogos de conversación entre el educador y su(s) estudiante(s) durante la clase, así como el contenido de los portafolios.

## **RESULTADOS**

### **Fase 1: Currículo escrito**

El PTi declara la intención de promover, por parte del educador, aspectos relacionados con indicadores de RE:

1. Iniciación al razonamiento estadístico, lo cual implica reconocer cuando un problema puede ser abordado con herramientas de estadística, para ello es necesario que se identifique la variación de información y la necesidad de registrar datos que ayudan a entender un contexto.
2. El abordaje de este curso mediante un software para el procesamiento de información fomentará un trabajo más profundo del significado de los cálculos y su correcta interpretación, por lo que deberá estar acompañado de explicaciones y justificaciones basadas en los resultados. Las actividades con Excel, SPSS o MATLAB, permitirán que se establezca una relación entre los procedimientos y su naturaleza, reflexión que fomentará el formador. (SEP, 2018, pp.14-15)

El punto 1 menciona la intención de que la enseñanza de la estadística introduzca a los futuros profesores de matemáticas en el razonamiento estadístico y aclara que este razonamiento requiere de abordar, mediante herramientas estadísticas, problemas en los que se reconozca la variación y la necesidad de datos. El segundo punto considera una de las tres grandes características del razonamiento estadístico: 2.3 Desarrollar un ambiente de razonamiento profundo y significativo. En particular, se refiere al uso de herramientas tecnológicas para que el estudiante se centre más en la interpretación estadística de los resultados obtenidos que en la ejecución del cálculo matemático implicado en un procedimiento estadístico.

De acuerdo con el PTi, el propósito de la UA I es que el estudiante:

Identifique fenómenos de la vida cotidiana a partir de distintas formas de representar información (tabular, gráfica) e incorporar un lenguaje y modos de argumentación habituales, y sea capaz de resumirlos, explicarlos, e interpretarlos estadísticamente.

Discrimine entre métodos de procesar y presentar información para usar los más pertinentes de acuerdo a las situaciones de los ámbitos social, cultural, económico y científico, gracias a su conocimiento de las variables estadísticas y el muestreo.

Reflexione sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la estadística, e identifique los elementos que brinda la normal en su formación para que reflexione sobre los procesos que tienen lugar en las aulas de la formación inicial (SEP, 2018, p.18).

El primer propósito requiere de la comprensión del contexto (característica 1.4 de CE) para que los mensajes estadísticos (tablas y gráficos) tengan sentido, así como apreciar o hacer uso del contexto social para la obtención y tratamiento de los datos. El segundo propósito señala la necesidad de presentar la información procesada para su uso en algún contexto a partir de una discriminación basada en características de las variables estadísticas, discriminación que implica una valoración de la pertinencia del modelo a utilizar y la comprensión del modelo para la explicación y predicción de los valores, lo que se asocia a la característica 2.1. Desarrollo de ideas estadísticas, de RE. El tercer propósito se asocia más a la autoreflexión del futuro profesor sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido estadístico que enseñará a sus estudiantes.

En general, el PTi sugiere promover características de CE, RE y PE, con mayor énfasis en las de RE, para la formación de profesores. En las diferentes secciones del PTi que fueron analizadas se identificaron un total de 61 evidencias de CE, 129 evidencias de RE y 39 evidencias de PE. Las evidencias de CE se concentran en los indicadores relacionados con las características de Habilidades de alfabetización estadística (1.1) y Conocimiento estadístico base (1.2). Es decir, se promueve la organización de datos, la construcción y presentación de tablas y el empleo de diferentes representaciones de datos; así como favorecer un conocimiento de términos básicos e ideas relativas a la estadística descriptiva, respectivamente.

Las evidencias de RE se concentraron en los indicadores: Comprensión de los datos, Comprensión de la distribución, Comprensión de la variabilidad, Comprensión de las medidas de centro, Comprensión de los modelos estadísticos, Comprensión del muestreo y Comprensión de la inferencia estadística, propios de la característica Desarrollo de ideas estadísticas (2.1). Las ideas estadísticas de Comprensión de los modelos estadísticos y Comprensión de la distribución fueron las de mayor presencia.

Sobre el PE, la revisión del PTi evidenció indicadores relacionados con la característica de Tipos fundamentales de pensamiento estadístico (3.2), específicamente, aquellos asociados con procesos de transnumeración.

## **Fase 2: Currículo intencionado**

De acuerdo con la estructura de la planificación, 1) Propósitos y competencias y 2) Elementos de las UA, el análisis permitió conocer el uso del currículo escrito que hace el formador para elaborar la planificación del curso. En cuanto a la planificación de la UA I, se identificó que el educador siguió tal cuallo prescrito en los Propósitos y competencias. Se observaron cambios en la sección Elementos de las UA, como se describe enseguida.

### ***Elementos de las UA***

En la planificación de la UA I se identificó que las secciones planificadas (Número y nombre de la UA, Propósito de la UA I y Contenido de la UA I) se correspondieron textualmente con lo declarado en el PTi. En las secciones Bibliografía básica y complementaria, Recursos de apoyo y Actividades y temas de reflexión, el educador modificó de manera parcial su contenido en relación con lo señalado en el PTi. En la sección de Criterios de evaluación, el PTi declara tanto las competencias (habilidades, actitudes y valores) que el estudiante de alcanzar al término de la UA I, así como el porcentaje de calificación sugerido para las evidencias (portafolio, e-portafolio, sistematización de información y examen). En cambio, en la planificación, el educador solo mostró el porcentaje y no consideró las competencias. Cabe aclarar que en esas competencias declaradas de la UA I fue donde se identificaron el mayor número de indicadores asociados a características de un RE.

La sección de la planificación Actividades y temas de reflexión se conformó por enunciados que exponen, de manera resumida, acciones para ejecutar el contenido de la UA I. Dicho contenido abordaba el estudio de los temas: Variables, Estadístico y Parámetro, Muestra y Población, Introducción al muestreo, Representación de información. En el PTi se declaran nueve enunciados y en la planificación del educador se identificaron 18 enunciados, 11 aluden a acciones de organización y gestión del trabajo en la clase y siete (E10, E13-E18) hacen referencia al contenido, como se muestra en la Tabla 3.

Los siete enunciados (E10, E13-E18) que aluden a la movilización del contenido fueron analizados con base en los indicadores de los enfoques de CE, RE y PE. Sin embargo, tres de estos enunciados (E10, E13 y E18) no proporcionaron información suficiente para identificar indicadores de los enfoques. En los cuatro enunciados restantes (E14-E17) se identificaron, en su mayoría, indicadores de CE. Por ejemplo, en el E14 la intención del uso de los videos por parte del educador era que los estudiantes comprendieran el significado y conocieran las definiciones formales de los conceptos mencionados, así como para que aprendieran procedimientos asociados con la presentación de la información como pueden ser tablas y gráficos. En este caso, se observó una intención de que

se comprenda el significado de términos estadísticos, lo cual puede relacionarse con tres indicadores de CE: Comprensión de símbolos y uso del lenguaje estadístico, Uso de herramientas básicas de estadística y Comprensión e interpretación de información estadística. Estos indicadores pertenecen a la característica Habilidades de alfabetización estadística (1.1).

Las propuestas y adecuaciones realizadas por el educador en la planificación de la UA I, con respecto a lo estipulado en el PTi, ejemplifican una transformación del currículo escrito al currículo intencionado. Por un lado, de los 18 enunciados planificados, 14 de ellos (E1-E10, E12, E14, E17, E18) fueron nuevas propuestas del educador para el desarrollo de la UA I; al proponer más enunciados, las orientaciones de enseñanza también aumentaron y se centraron en fomentar más características de una CE. Por otro lado, dado que el educador no declaró las competencias de evaluación en su planificación, los indicadores de RE identificados en el PTi ya no transitaron a la fase de currículo intencionado. Las evidencias de PE estuvieron ausentes en esta fase 2.

**Tabla 3.** Enunciados de las actividades de aprendizaje programáticas y planificadas de la UA I.

Actividades de aprendizaje sugeridas en el PTi	Actividades de aprendizaje planificadas por el educador
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>El profesorado recupera los saberes previos del tema.</i></li> </ul>	<p>...</p> <p>E10. <i>El docente recupera los saberes previos del tema.</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Los estudiantes elaboran lista de sitios web de información confiable, bajo la dirección del docente.</i></li> </ul>	<p>...</p> <p>E13. <i>El docente organiza con los alumnos la información de las fuentes necesarias para el aprendizaje de conceptos y procedimientos para facilitar su consulta.</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>El formador organiza con los estudiantes la información de las fuentes necesarias para el aprendizaje de conceptos y procedimientos, para facilitar su consulta.</i></li> </ul>	<p>E14. <i>Selecciona videos adecuados que propician la enseñanza y el aprendizaje de conceptos [variable, muestra, población, estadístico, entre otros] y procedimientos marcados en el programa [elección y uso de métodos pertinentes para procesar y presentar información acorde a una situación problemática presentada].</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>El estudiantado elabora organizadores gráficos, señalados por el docente.</i></li> </ul>	<p>E15. <i>Los estudiantes elaborar [sic] organizadores gráficos que le permitan asimilar la información. [sic] (Mapas conceptuales, mapas radiales, mapas mentales, esquemas, punteos, etc.) sobre los conceptos de variable, estadístico, parámetro, muestra, muestreo y representación de la información.</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>En grupos pequeños elaboran y desarrollan una actividad que permita indagar sobre los intereses de los estudiantes de su especialidad.</i></li> </ul>	<p>E16. <i>El docente propicia espacios para la reflexión de la información, involucrando a los alumnos en la recolección, organización y representación de la misma. También sobre sus procesos de aprendizaje de la estadística.</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>El estudiantado reflexiona sobre sus procesos de aprendizaje de la estadística, mediante comentarios por escrito a los trabajos de la asignatura que desarrollen en clase.</i></li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>De manera individual y grupal exploran el concepto de variable, mediante la reflexión sobre el alcance de las distintas formas de medir la realidad.</i></li> </ul>	

---

<ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Construcción colectiva de definiciones clave del curso y promover reflexiones sobre su relevancia (variable, estadístico, parámetro, muestra, entre otros).</i></li><li>• <i>De manera individual, se relacionan las definiciones clave del curso y la habilidad para resolver problemas de análisis de información, integrado en una evaluación escrita que parta de situaciones problema. (SEP, 2018, pp. 18-19)</i></li></ul>	<p><i>E17. El estudiantado se organizó en 4 equipos de 3 o 4 elementos para investigar uno de los contenidos [variables, estadístico y parámetro, muestra y población, introducción al muestreo, representación de información], organizarlo y presentarlo al grupo.</i></p> <p><i>E18. Formación de binas para la elaboración de 10 reactivos de opción múltiple que involucren los conceptos relevantes tratados en la unidad.</i></p>
---	--

---

### Fase 3: Currículo ejecutado

El análisis de la implementación de la UA I se centró en los siete enunciados de las actividades de aprendizaje planificados que implicaban la movilización de contenido estadístico (E10, E13-E18) mostradas en la Tabla 3. Cabe precisar que de estos siete enunciados solo uno (E18) no se hizo operativo durante el desarrollo de las cinco sesiones de clase videogradas. Por cuestiones de espacio, enseguida se ejemplifica la ejecución de los enunciados E10 y E14 sobre el tema Variables, contenido temático estudiado durante la sesión 1.

La ejecución del E10 tuvo lugar al inicio del tema y clase, para ello el educador generó una lluvia de ideas a partir de la pregunta “¿Qué es una variable?” Algunas respuestas fueron:

Alumno: Son como los tipos (...) de un [pausa] de algo, o sea, por ejemplo: aquí en el salón (...) la variable es el color de piel, la edad, el peso, la altura.

Alumna: (...) alguna cosa u objeto que podía cambiar, tener una modificación.

El educador complementó las respuestas de los estudiantes mencionando que una variable “es una característica, un sujeto, un animal o un objeto, (...) es un atributo o una cantidad que puede variar”, continuó: “(...) este grupo es una población y cada integrante es un individuo, pues cada individuo tiene sus propias características. Si nosotros revisamos el género va a haber hombres y va a haber mujeres, si revisamos la edad va a haber diferentes edades, por eso son variables, porque son características que van a ser diferentes de acuerdo a los individuos”.

Esta actividad de inicio permitió observar cómo el educador recuperó los saberes previos (E10) sobre el concepto de variable. La estrategia de preguntar a los alumnos por el significado de variable dio lugar para que los estudiantes compartieran esos saberes. En ello, el educador fomentó indicadores de CE tales como: Comprensión de símbolos y uso del lenguaje estadístico, Familiaridad con términos básicos de la estadística descriptiva y Comprensión de conceptos estadísticos. Estos indicadores coinciden con los identificados en el análisis de la planificación. Además, se hizo presente

el indicador Ambiente de trabajo apropiado, correspondiente a la característica Desarrollo de un ambiente de razonamiento profundo y significativo (2.3) del RE. Este último indicador no se había identificado en la planificación del E10, por lo que se considera un ejemplo de transformación curricular al transitar de la fase de currículo intencionado a la fase del currículo ejecutado.

El E14 se hizo operativo cuando el educador proyectó el video<sup>2</sup> *Tipos de variables estadísticas*, el cual sirvió para abordar el concepto de variable, la clasificación de las variables (cualitativa y cuantitativa) y sus tipos. Con base en el video los estudiantes respondieron a las preguntas: “¿Qué es una variable? ¿Cuáles son los tipos de variables que se mencionan en el video? ¿Cómo se clasifican cada una de esas variables?” Una vez concluido el video, el educador generó un espacio para que los estudiantes socializaran sus respuestas, mismas que el formador complementó cuando lo consideraba necesario. Posterior a la socialización, el formador solicitó a sus estudiantes que elaboraran un organizador de texto y lo integraran al portafolio de evidencias, esto dio lugar para ejecutar el enunciado E15.

El contenido del video permitió que los estudiantes se familiarizaran y conocieran el significado de variable, término estadístico que se considera básico. Conocer dicho término se consideró como ejemplo de promover dos indicadores de CE: Comprensión de símbolos y uso del lenguaje estadístico y Familiaridad con términos básicos de la estadística descriptiva. Dado que el término variable es uno de esos conceptos estadísticos que no tienen una notación matemática y cuyo significado es fundamental en la disciplina de estadística, el educador también favoreció otro indicador de CE: Comprensión de conceptos estadísticos.

El hecho de que los estudiantes compartieran sus definiciones y aportes sobre el término variable hizo operativo de nuevo el indicador de RE: Ambiente de trabajo apropiado. Este indicador se refiere a promover un ambiente de trabajo donde los estudiantes se sientan seguros de expresar sus puntos de vista, incluso si aún son tentativos, lo que se identificó mientras los estudiantes compartían sus respuestas con el resto del grupo.

Las acciones durante la ejecución del currículo se dirigieron a fomentar una CE seguida de un RE. Con respecto a la CE, el trabajo desarrollado por el educador estuvo centrado en que los estudiantes asimilaran el significado del término estadístico variable y los tipos de variable. El RE, principalmente, fue evidenciado al promover un ambiente de trabajo adecuado para que los estudiantes

---

<sup>2</sup> <https://youtu.be/nCszHELuwXk>

participaran y compartieran sus ideas durante las sesiones (acciones que habían sido identificadas desde la planificación de la UA I).

#### **Fase 4: Aprendizaje de los alumnos**

Para ejemplificar esta fase, se retoma el tema Variables desarrollado en la sesión 1. En la actividad de cierre de dicha sesión, el educador solicitó a los alumnos, siguiendo el orden de lista, dijeran su nombre y pidió a un estudiante escribir cada nombre en una lista, a la cual llamó *lista de una población*. El educador nombró algunas variables y pidió que los estudiantes dijeran su tipo (cualitativa o cuantitativa) y escala (nominal, ordinal, continua o discreta):

Educador: Me van a decir si es cualitativa o cuantitativa, el nombre ¿se puede medir con número?

Alumnos: ¡No!

Educador: Entonces no es cuantitativa y si no es cuantitativa pues no queda de otra, va a ser cualitativa (...). El número 1 de la lista es (...) Manuel Ángel, ya tenemos una variable. Nadie más se llama como él, por eso es una variable y es cualitativa porque no se puede medir. Es nominal (...). ¿El número 2?

Alumna: Yo creo que es nominal.

Educador: Son nominales, el nombre [sic] son nominales, ahorita les voy a decir por qué. [pasa al número 3 de la lista]

Las intervenciones del formador se centraron en justificar por qué la variable en cuestión era de tipo cualitativa o cuantitativa y su respectiva escala.

Dado que el discurso entre educador y estudiantes se orientó a la comprensión del término estadístico variable y los tipos de variable, este momento de la clase sirvió para fortalecer la puesta en práctica de los indicadores de CE: Comprensión de símbolos y uso del lenguaje estadístico, Familiaridad con términos básicos de la estadística descriptiva y Comprensión de conceptos estadísticos. De igual forma, el educador promovió el indicador Ambiente de trabajo apropiado de RE, pues la dinámica generó en los estudiantes la seguridad para participar y compartir sus ideas durante la clase.

Los productos analizados del portafolio de evidencia de los estudiantes dieron cuenta del aprendizaje de los estudiantes sobre los indicadores de CE mencionados. Un ejemplo de lo que se pudiera identificar como el producto de ese aprendizaje es el organizador de texto de la Figura 2.

En resumen, en la Tabla 4 mostramos el énfasis de las características de los enfoques que fueron identificados en el análisis de todo el PTi (fase 1) y promovidas durante las fases de su uso (fases 2, 3 y 4). La fase 2 contempla el análisis de la planificación de las tres UA; las fases 3 y 4, las cinco sesiones videograbadas en las que se desarrolló la UA I.

Figura 2. Evidencia de organizador de texto elaborado



Fuente: Portafolio de un estudiante.

Tabla 4. Características de CE, RE y PE promovidas en las actividades de la UAI durante las cuatro fases del uso del PTi

Enfoque	Característica	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
CE	1.1. Habilidades de alfabetización estadística	X	X	X	x
	1.2. Conocimiento estadístico base	X	x	x	x
	1.3. Conocimiento matemático	x	x	X	x
	1.4. Conocimiento del contexto	x		x	
	1.5. Preguntas críticas	x		x	
	1.6 Creencias y actitudes	x			
	1.7. Postura crítica	x	x	x	
RE	2.1. Desarrollo de ideas estadísticas	X	x	x	x
	2.2 Justificación de resultados	X	X		
	2.3. Desarrollar un ambiente de razonamiento profundo y significativo	X	X	x	x
PE	3.1. Ciclo investigativo	x	x		
	3.2. Tipos fundamentales del pensamiento estadístico	X	x		

Nota: X = más de 20 indicadores, X = entre 10 y 20 indicadores, x = entre 5 y 9 indicadores, x = menos de 5 indicadores

Fuente: Elaboración propia.

En la fase 1 se identificaron el mayor número de indicadores correspondientes a características de los enfoques de CE, RE y PE. La mayoría de esos indicadores se identificaron en secciones del documento diferentes a las de las actividades de aprendizaje (e.g., Tabla 3, columna izquierda). En las fases de uso, el énfasis en la mayoría de esas características fue decreciendo. En este sentido, se puede apreciar una transformación curricular cuyo factor incidente fueron las orientaciones del enfoque de enseñanza.

## **CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES**

Se presentó un panorama general de las fases de uso del PTi, uno de los programas de estudio que guían la formación estadística de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria en las Escuelas Normales de México. El análisis de dichas fases da cuenta de algunas particularidades que se presentan en la formación de los profesores:

- El currículo escrito (PTi) presenta sugerencias que favorecen el desarrollo de elementos de un RE. Al transitar por el resto de las fases (currículo intencionado, currículo ejecutado y la fase de aprendizaje de los alumnos) se identificó, en mayor grado, un desarrollo de características de una CE, seguido de algunas de RE. La promoción de características de un PE fue identificada, con muy poca frecuencia, solo en las fases de currículo escrito e intencionado.
- Las actividades planificadas por el educador, en la UA I, mostraron enunciados que fueron más allá de los prescritos en el PTi, lo cual ejemplificó una transformación curricular. El educador adecuó las actividades de aprendizaje propuestas en el PTi y añadió otras.
- Durante la enseñanza, las estrategias implementadas por el educador en las sesiones de clase estuvieron dirigidas al entendimiento de los términos estadísticos (Variables, Estadístico y Parámetro, Muestra y Población, Introducción al muestreo, Representación de información), alejados de alguna situación o fenómeno estadístico real. Es decir, el educador no planteó una situación o problema real que demandara una solución haciendo uso de los términos estadísticos en estudio, en su lugar, se centró en la definición del término.
- En la última fase del uso del PTi, representada por el aprendizaje de los alumnos, las participaciones de los estudiantes y los productos contenidos en el portafolio de

evidencias permitieron identificar indicadores dirigidos a comprender los términos estadísticos, como lo había planificado y ejecutado el educador.

Dada la limitación de no haber podido grabar todas las sesiones en que se desarrollaron las tres UA que constituyen el PTi, no es posible ofrecer un panorama más completo de cómo el educador usó el PTi durante la totalidad del curso. No obstante, el estudio da cuenta de algunas consideraciones respecto de la formación de profesores de matemáticas en el área de estocástica.

### **Consideraciones finales**

El currículo escrito, en este caso el PTi, es un documento que guía la formación del futuro profesor, y está sujeto a la interpretación del educador que hace uso de él. Por ejemplo, el PTi explicita iniciar al estudiante al “razonamiento estadístico”, pero el significado de razonamiento estadístico está sujeto a la interpretación del educador. Si, por lado, el educador desconoce qué y cómo se desarrolla dicho razonamiento, y, por otro lado, el programa no propone actividades para ejemplificarlo, es poco probable que se promueva un razonamiento estadístico. Además, si el tipo de actividades que propone el programa para fomentar ese razonamiento no se alinean con las sugerencias que señala la literatura en el campo de la investigación en educación estadística, se corre el riesgo de producir significados divergentes.

Los autores pudieron identificar indicadores de CE, RE y PE presentes en el PTi porque conocen los enfoques y sabe cómo ciertos enunciados y acciones demandan características de ellos. Por ello, si el educador, al igual que los autores, conoce de esos enfoques, es probable que el uso curricular del programa sea potenciado. En este sentido, se resalta la necesidad de formación estadística que los educadores requieren para que ellos puedan comprender las propuestas de aprendizaje de los programas de estudio y tengan elementos que les permitan planificar y ejecutar esas propuestas a fin de alinearlas con los enfoques de enseñanza de la disciplina, como lo son los de CE, RE y PE.

La educación o formación estadística de profesores demanda, por un lado, programas curriculares más alineados con esos enfoques. Por ejemplo, Batanero et al. (2011) señalan que las recomendaciones curriculares deberían abordar un enfoque orientado a los datos, donde los estudiantes diseñen y realicen investigaciones en contextos que motiven una postura crítica para la interpretación de los datos. Es decir, desarrollar elementos de un PE y RE. El problema es que estas recomendaciones y otras (e.g., las directrices de la GAISE College Report ASA Revision Committee, 2016) no siempre son promovidas en la práctica. La formación de educadores y profesores es un contexto idóneo para impulsar cambios que ayuden a redirigir el rumbo de la enseñanza de la

El uso curricular del programa tratamiento de la información en la formación estadística de futuros profesores de matemáticas

estadística, pues son ellos quienes guiarán el proceso de enseñanza y aprendizaje de futuras generaciones de estudiantes de educación básica.

Consideramos que el hecho de incluir más asignaturas de estocásticas en la formación de profesores de matemáticas de nivel secundaria es un gran avance, pero para una mayor visión de las orientaciones de enseñanza que inciden en la transformación curricular, son necesarias más investigaciones que observen las fases de uso de los cuatro programas de las asignaturas de estocástica incluidas en el Plan de Estudios 2018.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, 2-13. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf>
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada.
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics - challenges for teaching and teacher education* [Enseñanza de la estadística en las matemáticas escolares - desafíos para la enseñanza y la formación del profesorado]. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0>
- Bolívar, A. (2008a). La práctica curricular. En A. de la Herrán Gascón & J. Paredes Labra (Coords.), *Didáctica general. La práctica de la enseñanza en educación infantil, primaria y secundaria*, (pp. 73-86). McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. U.
- Bolívar, A. (2008b). Conceptualización del currículum. En A. Bolívar (Ed.), *Didáctica y currículum: de la modernidad a la postmodernidad*, (pp. 131-154). Ediciones Aljibe.
- Burrill, G. (2008). Fundamental ideas in teaching statistics and how they affect the training of teachers [Ideas fundamentales en la enseñanza de las estadísticas y cómo afectan a la formación de los docentes]. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. [https://iase-web.org/documents/papers/rt2008/Panel1\\_Burrill.pdf?1402524989](https://iase-web.org/documents/papers/rt2008/Panel1_Burrill.pdf?1402524989)
- Burrill, G. (2011). Global perspective [Perspectiva global]. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 1-3). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0>
- Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers [Ideas estadísticas fundamentales en el currículo escolar y en la formación del profesorado]. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_10](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10)
- Campos, T., Cazola, I., & Kataoka, V. (2011). Statistics school curricula in Brazil [Currículos escolares de estadística en Brasil]. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 5-8). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_1)
- Clemente Olague, D. A. (2021). *La Transformación Curricular del programa "Tratamiento de la información" en futuros profesores de matemáticas*. [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional]. CICATA-

- IPN.  
[https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis\\_maestria/2021/Clemente\\_2021.pdf](https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2021/Clemente_2021.pdf)
- Chávez Aguilar, R. D. (2020). *Características de la enseñanza de la estadística en los programas de estudio de educación media superior* [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional]. CICATA-IPN.  
[https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis\\_maestria/2020/Chavez\\_2020.pdf](https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2020/Chavez_2020.pdf)
- Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching [Matemáticas, estadística y enseñanza]. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.  
<https://doi.org/10.2307/2975286>
- Cuban, L. (1993). The lure of curricular reform and its pitiful history [El atractivo de la reforma curricular y su lamentable historia], *Phi Delta Kappan*, 75(5), 182-185.  
[https://www.jstor.org/stable/20405055?read-now=1&seq=4#page\\_scan\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/20405055?read-now=1&seq=4#page_scan_tab_contents)
- Cuevas, H. (2013). *Reformas curriculares y formación del profesorado de estadística en secundaria*. En Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica (Ed.), III Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos (pp. 1-20). Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica. <http://funes.uniandes.edu.co/15645/1/Cuevas2013Reformas.pdf>
- de Freitas, E., Lerman, S., & Noelle-Parks, A. (2017). Qualitative methods [Métodos cualitativos]. En *Compendium for Research in Mathematics Education*, (pp. 159-182). National Council of Teachers of Mathematics
- del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64.  
[https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17684/17\\_Educación%20estadística.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17684/17_Educación%20estadística.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices [Profesores de estadística y prácticas del salón de clases]. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 175-186). Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-19>
- Eichler, A. (2010). The transformation process from written curricula to student's learning [El proceso de transformación desde el currículo escrito hasta el aprendizaje de los estudiantes]. *Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*, Ljubljana, Slovenia. [https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8\\_8E3\\_EICHLER.pdf](https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_8E3_EICHLER.pdf)
- Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas pedagógicas para la educación matemática del siglo XXI*, (pp. 173-194). Universidad Central de Venezuela.
- Ferrari, C., & Corica, A. (2017). Concepciones sobre la estadística, su enseñanza y aprendizaje: Un estudio exploratorio con estudiantes para profesor en Matemáticas. *IKASTORRATZA. e-Revista de Didáctica*, (19), 62-90. [http://www.ehu.es/ikastorratza/19\\_alea/3.pdf](http://www.ehu.es/ikastorratza/19_alea/3.pdf)
- GAISE College Report ASA Revision Committee. (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) college report 2016* [Directrices para la evaluación y la instrucción en la educación estadística (GAISE) informe 2016]. American Statistical Association.  
[https://www.amstat.org/docs/default-source/amstat-documents/gaiecollege\\_full.pdf](https://www.amstat.org/docs/default-source/amstat-documents/gaiecollege_full.pdf)

- Gómez-Blancarte, A., Chávez, R., & Miranda, I. (2022). Enfoques de la enseñanza de la estadística en los programas de estudio de educación media superior. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 13, Artículo e1394. [https://doi.org/10.33010/ie\\_rie\\_rediech.v13i0.1394](https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v13i0.1394)
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. Mcgraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- Jones, K. (2011). Planning for mathematics learning [Planificación para el aprendizaje de las matemáticas]. En S. Johnston-Wilder, P. Johnston-Wilder, D. Pimm y C. Leet (Eds.), *Learning to teach mathematics in the secondary school* (3era ed., pp. 79-100). Routledge.
- Mayer, R. (2014). *Aprendizaje e instrucción* (Jesús Martín Cordero, Trad.; 2da edición). Alianza Editorial. (Libro original publicado en 2008; 2da ed.)
- Navarrete-Cazales, Z. (2015). Formación de profesores en las escuelas normales de México. Siglo XX. *Revista Historia De La Educación Latinoamericana*, 17(25), 17-34. <https://doi.org/10.19053/01227238.3805>
- Opolot-Okurut, C., & Eluk, P. (2011). Statistics school curricula for Uganda [Currículo escolar de estadística en Uganda]. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 15-20). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_3](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_3)
- Pansza, M. (1987). Notas sobre planes de estudio y relaciones disciplinarias en el currículo. *Perfiles Educativos*, (36), 16-34. <https://www.iisue.unam.mx/perfiles/descargas/pdf/1987-36-16-34>
- Rodríguez, A. (2010). *La escuela secundaria y la escuela normal superior de México, un diálogo continuo (1940-1970)* [Tesina de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio de la UPN. <http://200.23.113.51/pdf/27267.pdf>
- Sánchez, E., & Gómez-Blancarte, A. (2015). La negociación de significado como proceso de aprendizaje: El caso de un programa de desarrollo profesional en la enseñanza de la estadística. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(3), 387-419. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1834>
- Sánchez, E., & Hoyos, V. (2013). La estadística y la propuesta de un currículo por competencias. En A. Salcedo (Ed.), *Educación estadística en América Latina: Tendencias y perspectivas*, (pp. 211-228). Universidad Central de Venezuela.
- Secretaría de Educación Pública. (2018). *Programa del curso tratamiento de la información. Segundo semestre*. <https://www.cevie-dgespe.com/documentos/1425b.pdf>
- Secretaría de Educación Pública. (s.f.-a). *Listado de asignaturas*. [https://www.dgespe.sep.gob.mx/planes/les/listado\\_asig](https://www.dgespe.sep.gob.mx/planes/les/listado_asig)
- Secretaría de Educación Pública. (s.f.-b). *Planes 2018*. <https://www.cevie-dgespe.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120>
- Secretaría de Gobernación. (1988). *Acuerdo número 135, por el que se autoriza el plan de estudios para la formación de docentes en educación media a nivel de licenciatura*. [http://dof.gob.mx/nota\\_detalle.php?codigo=4742369&fecha=08/06/1988](http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=4742369&fecha=08/06/1988)
- Secretaría de Gobernación. (1976). Acuerdo número 15019 por el que se autoriza para ser aplicados por los establecimientos escolares que forman parte del Sistema Educativo Nacional, los planes

- de estudios de educación normal a nivel de licenciatura, en las especialidades de tipo medio. [http://dof.gob.mx/nota\\_detalle.php?codigo=4855731&fecha=25/11/1976](http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=4855731&fecha=25/11/1976)
- Shaughnessy, J. (2007). Research on statistics learning and reasoning [Investigación sobre aprendizaje y razonamiento estadístico]. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 957-1010). National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning [Cómo influye el curriculum en el aprendizaje de los estudiantes]. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 319-369). National Council of Teachers of Mathematics.
- Vásquez, C., & Cabrera, G. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Educación Matemática*, 34(2), 245-274, <https://doi.org/10.24844/EM3402.09>
- Wessels, H. (2011). Statistics in the South African school curriculum [Estadística en el currículo escolar sudafricano]. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 37-40). Springer [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_4](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_4)

## **THE CURRICULAR USE OF THE INFORMATION PROCESSING PROGRAM IN THE STATISTICAL TRAINING OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS**

### **ABSTRACT**

This chapter offers an overview of the statistical training received by future secondary school mathematics teachers in a Mexican teacher training college. The objective is to show the process of using the program of study of one of the subjects taken by prospective teachers, "Information Processing". For this purpose, the four phases of use of the program were analyzed: the written curriculum, the intended curriculum, the enacted curriculum, and the students' learning. The study method was based on two research techniques: documentary and observation. The analysis sought to identify the teaching orientations promoted in each of the phases, according to the approaches of literacy, reasoning, and statistical thinking. The results show the transformations of these orientations during the phases of use through which the written curriculum (the program of study) passes. We note that the elements of approaches suggested by the written curriculum may differ from those promoted by the educator. In this sense, we conclude on the need to broaden the knowledge of educator to resignify curricular suggestions, as well as the need for curricula to offer examples to implement these approaches.

Keywords: Statistical education; Curricular transformation; Teaching approaches; Culture, reasoning and statistical thinking.

## **A UTILIZAÇÃO CURRICULAR DO PROGRAMA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO NA FORMAÇÃO ESTATÍSTICA DOS FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

### **RESUMO**

Este capítulo oferece uma visão geral da formação estatística recebida por futuros professores de matemática secundária numa faculdade de formação de professores no México. O objectivo é mostrar o processo de utilização do programa de uma das disciplinas tomadas pelos futuros professores, "Processamento de informação". Para o efeito, foram analisadas as quatro fases de utilização do programa: currículo escrito, currículo pretendido, currículo implementado e aprendizagem dos estudantes. O método de estudo foi baseado em duas técnicas de investigação: documentário e observação. A análise procurou identificar as orientações pedagógicas promovidas em cada uma das fases, de acordo com as abordagens da cultura, do raciocínio e do pensamento estatístico. Os resultados dão conta das transformações dessas orientações durante as fases de utilização pelas quais transita o currículo escrito (programa de estudo). Observamos que os elementos das abordagens sugeridas pelo currículo escrito podem diferir daqueles que promovem o formador. Neste sentido, concluímos sobre a necessidade de ampliar o conhecimento dos formadores para resignificar as sugestões curriculares, assim como a necessidade de que os programas de estudo ofereçam exemplos para pôr em prática essas abordagens.

Palavras-chave: Educação estatística; Transformação curricular; Futuros professores; Cultura, raciocínio e pensamento estatístico.

*DAMIAN ALEJANDRO CLEMENTE OLAGUE*

*Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios no. 084, Colima, México*

[damianalejandro.clemente.ce84@dgeti.sems.gob.mx](mailto:damianalejandro.clemente.ce84@dgeti.sems.gob.mx)

<https://orcid.org/0000-0003-4414-6653>

Licenciado en Educación Media especializado en Matemáticas, maestro en Educación y maestro en Ciencias en Matemática Educativa. Representante en América del Norte del Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) y miembro activo en la Asociación Iberoamericana de Docencia Universitaria (AIDU), la Asociación Mexiquense de Matemática Educativa (AMME) y la Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIIE). Tiene diversas participaciones en eventos y publicaciones en temáticas asociadas a la formación de profesores de matemáticas y la enseñanza de esta disciplina. Actualmente se desempeña como docente de bachillerato en el Centro de Estudios Tecnológicos industrial y de servicios no. 084 en el estado de Colima, México y como diseñador de contenidos y tutor con la Universidad Virtual del Estado de Michoacán (UNIVIM) en el programa de Maestría en Enseñanza de las Ciencias, en la especialidad de Matemáticas.

*ANA LUISA GÓMEZ-BLANCARTE*

*Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México*

[algomezbl@ipn.mx](mailto:algomezbl@ipn.mx)

<https://orcid.org/0000-0002-8837-8643>

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). Profesora e investigadora del Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, unidad Legaria, del Instituto Politécnico Nacional. Sus intereses de investigación versan sobre la Educación Estadística y el Desarrollo Profesional Docente. Ha publicado artículos en revistas nacionales e internacionales, capítulos de libros y reportes de investigaciones en congresos internacionales. Además, dirige proyectos de investigación, tesis de Maestría y Doctorado. Es Editora Asociada de la Statistics Education Research Journal (SERJ) y de la Revista de Educación Matemática; miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) y de la International Association for Statistical Education (IASE).



# FORMACIÓN DE PROFESORES QUE ENSEÑAN ESTADÍSTICA EN BRASIL: NUEVOS DESAFÍOS EN EL ESCENARIO POSPANDÉMICO

CASSIO CRISTIANO GIORDANO  
FABIANO DOS SANTOS SOUZA  
PAULO CÉSAR OLIVEIRA  
REINALDO FEIO LIMA

### RESUMEN

Brasil vive un momento de amplia reforma curricular, impulsada por la publicación de la Base Nacional Común Curricular – BNCC. Este documento federal, que orienta toda la Educación Básica nacional, amplió el espacio dedicado a la enseñanza y aprendizaje de la Estocástica (Probabilidad, Estadística y Combinatoria), y trajo nuevas exigencias a los docentes, como la realización de simulaciones computacionales en una perspectiva probabilística frecuentista, la realización de proyectos de aprendizaje por parte de los estudiantes, desde el inicio de la escolaridad Primaria hasta el final de la Secundaria (de los seis a los diecisiete años), con investigaciones estadísticas a partir de datos primarios, recogidos por ellos mismos. Tales prácticas han sido defendidas por toda la comunidad académica brasileña durante décadas, pero recién en 2018 fueron incorporadas oficialmente. Sin embargo, no existe la contrapartida en la formación inicial y continua de docentes. La carga horaria asignada a Estocástica en las asignaturas de Grado en Matemáticas es la mínima permitida por las propuestas curriculares, mientras que en las asignaturas de Pedagogía es prácticamente nula. Esta contradicción se agudiza en un momento en que la Estadística está en evidencia en los medios, en resultado de la pandemia del COVID-19. Esta realidad nos motivó a realizar una investigación cualitativa, un estudio exploratorio, que busca identificar ampliamente las percepciones de los docentes y futuros docentes sobre su formación para enseñar Estadística considerando el contexto pandemia/post-pandemia, con 92 sujetos (estudiantes de Pedagogía y Matemáticas, pedagogos y licenciados en Matemáticas), con el objetivo de evaluar la preparación de los docentes para enfrentar esta nueva realidad y sus expectativas de cambio en los próximos años. Entre los resultados, destacamos que nuestras investigaciones revelaron educadores no solo dispuestos a cumplir con el plan de estudios prescrito, sino también a marcar la diferencia y ser reconocidos por la sociedad. También señalaron profundas fallas en la formación inicial de pedagogos y matemáticos, en particular, en lo que se refiere a la educación estocástica, agravadas por la pandemia del COVID-19 y la precariedad de la enseñanza a distancia nacional, lo que nos lleva en dos direcciones: la necesidad de una amplia reforma curricular en la educación superior brasileña y la urgencia de grandes inversiones en la formación continua de estos profesionales. Sólo así podrán atender las demandas de la BNCC, en particular, las contenidas en la unidad temática Probabilidad y Estadística.

Palabras clave: Formación Inicial; Educación Continua; Reforma Curricular; Enseñanza Remota de Emergencia; Enseñanza de Probabilidad y Estadística.

Giordano, C. C.; Souza, F. dos S., Oliveira, P. C. y Lima, R. (2022). Formación de profesores que enseñan estadística en Brasil: nuevos desafíos en el escenario pospandémico. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 483-502). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.

## INTRODUCCIÓN

Desde 2018, con la publicación de la versión definitiva de la Base Nacional Común Curricular – BNCC (Brasil, 2018), la enseñanza y el aprendizaje en el campo de la Estocástica han ganado moroso pero gradual espacio en la educación brasileña. Eso se refleja desde la mayor oferta de educación continua específica hasta la ampliación de su espacio en los libros de texto, en los libros de proyectos integradores, en los nuevos componentes curriculares, conocidos en Brasil como Itinerarios Formativos (Brasil, 2019a), en la articulación de Temas Contemporáneos Transversales (Brasil, 2019b). Entre los cambios curriculares, destacamos:

- Ampliación del espacio dedicado a Estadística, Probabilidad y Combinatoria.
- Valorización y diversificación del estudio de gráficos estadísticos.
- Introducción del enfoque frecuentista en la enseñanza de la Probabilidad.
- Orientación para la producción de investigaciones estadísticas, con recolección de datos, desde los primeros años de la escuela primaria.
- Orientación hacia el trabajo colaborativo.
- Fomento de metodologías activas, incluido el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).
- Acercar la Estadística a otras áreas, como la Educación Financiera, la Salud Pública y el Periodismo.
- Énfasis en habilidades socioemocionales que incluyen los elementos disposicionales del modelo de alfabetización estadística de Iddo Gal (Gal, 2021).

Sin embargo, la formación inicial de los profesores en Brasil, tanto de los cursos de Pedagogía como de la carrera de Matemáticas, no ha dedicado la debida atención a la enseñanza estocástica. Las nuevas demandas educativas en el mundo pospandémico requieren habilidades y competencias vinculadas a múltiples alfabetizaciones, entre ellas, probabilística (Gal, 2005) y estadística (Gal, 2021).

Con la intención de minimizar estas brechas de formación, lejos de ser superadas en la Base Nacional Común - BNC Formación (Brasil, 2019c), el GT12, Grupo de Trabajo que reúne grupos de investigación en Educación Estadística esparcido por todo el país, vinculados a la Sociedad Brasileña de Educación Matemática - SBEM, ha dedicado esfuerzos para promover cursos de educación continua y producir material de apoyo para los profesores. En esta investigación, buscamos delinear estas brechas, con la intención de redirigir los esfuerzos en esta dirección. Nuestro objetivo es evaluar la preparación de los docentes para enfrentar esta nueva realidad y sus expectativas de cambio en los próximos años.

En la próxima sesión, presentamos nuestros marcos teóricos.

## MARCO TEÓRICO

En Brasil, la enseñanza de la Estocástica se introdujo tardíamente en la educación básica, en comparación con otros países, en la década de 1990. Sin embargo, los pedagogos y licenciados en Matemáticas continuaron formándose sin una base satisfactoria en esta área, que implica no sólo el conocimiento de contenidos específicos, pero también otros conocimientos, como el contenido pedagógico y el currículo, según Shulman (1986).

De acuerdo con Burgess (2009), los saberes estadísticos a enseñar corresponden a conceptos, procedimientos e ideas estadísticas comunes a otras profesiones, lo que incluye aquellos presentes en los currículos de educación básica - casualidad, aleatoriedad, variabilidad, construcción e interpretación de tablas y gráficos estadísticos y las etapas del ciclo de investigación investigativa. Los saberes para enseñar estadística incluyen la capacidad de: analizar la calidad y adecuación de las producciones de los estudiantes; adecuación de las elecciones hechas en términos de representaciones y registros utilizados; análisis y discusión de los errores cometidos por ellos; anticipación de pensamientos en relación con ciertas ideas, conceptos y procedimientos estadísticos; identificación del juicio de los estudiantes sobre el grado de dificultad presente en las tareas propuestas; reconocimiento de estrategias pedagógicas adecuadas para el abordaje de contenidos estadísticos y probabilísticos.

Lopes (2008) nos recuerda que no solo las carreras de grado dejan importantes brechas expresivas en la formación de los futuros docentes, sino que la gran parte de los programas de educación continua también han tenido fallas, particularmente en lo que respecta a Probabilidad y Estadística.

No podemos olvidar que para realizar un trabajo satisfactorio, el docente también depende de la cooperación de sus pares y de la disponibilidad de recursos didácticos, lo que también involucra dinámicas organizacionales escolares, como el clima institucional, la estructura de autoridad, las normas que definen las relaciones interpersonales en el equipo profesional, la naturaleza de las comunicaciones en una escuela y/o red educativa, el proyecto político-pedagógico de la escuela, así como los roles y responsabilidades de quienes pertenecen a la organización en una determinada estructura jerárquica. Es necesaria la colaboración de todos los agentes que intervienen en el proceso de enseñanza, tal y como afirman Gal y Garfield (1997). Según estos autores, el éxito en la educación estocástica dependería, até mismo, de la actuación junto a la escuela de profesionales con los cuales los sistemas educativos brasileños rara vez tienen, como estadísticos, especialistas en medición, psicólogos, educadores matemáticos y especialistas en tecnología. Sólo así, según ellos, estaríamos en

condiciones de asegurar un proyecto educativo de carácter interdisciplinario o transdisciplinario, de hecho.

Para Costa (2007), muchas de estas fallas, como el predominio en las carreras de Matemáticas, de un abordaje que priorizaba el uso de fórmulas y procedimientos mecanizados, de forma muy alejada de lo que propugna el Análisis Exploratorio de Datos - AED. El enfoque AED es considerado, por gran parte de la comunidad investigadora en educación estadística, como más fácil, motivador, creativo e imbuido del espíritu investigativo que caracteriza a toda producción científica. Batanero, Estepa y Godino (1991) observan que antes de este enfoque, el análisis de datos se basaba predominantemente en cálculos estadísticos (medias, varianza, coeficientes de correlación). En consecuencia, Batanero y Godino (2001) destacan que, en primer lugar, este enfoque ha disminuido la importancia a los recursos visuales asociados a la representación de datos y, en segundo lugar, estableció una relación de dependencia de la inferencia, como modelo confirmatorio, para la obtención de conclusiones.

Así, como observa Costa (2007), no es esta propuesta la que prevalece en la educación superior, en la formación de los licenciados en matemáticas. Agrega que si la educación superior falla en la enseñanza de la estadística, entonces en la enseñanza de la probabilidad la situación es aún peor. Generalmente, el enfoque clásico se presenta a los futuros profesores de matemáticas, en detrimento del enfoque frecuentista, que, según Lopes y Coutinho (2009), comprometería el desarrollo del pensamiento probabilístico. Si en las carreras de matemáticas la formación estocástica dejaba algo que desear, ¿qué pasa con los cursos de pedagogía?

Biajone (2006) señala la existencia de una brecha en la enseñanza de la estadística y la probabilidad, de forma contextualizada, en los materiales didácticos y en las propuestas educativas oficiales. El defiende la pedagogía por proyectos en la enseñanza de la estocástica, como una metodología capaz de favorecer la autonomía en la enseñanza y el aprendizaje, en entornos cooperativos en los cuales los estudiantes sean sujetos activos, críticos y conscientes de su responsabilidad en la construcción de su propio conocimiento. Si por un lado, la formación del pedagogo carecía del espacio suficiente para desarrollar el conocimiento de los contenidos estocásticos, por otro lado, existía una mayor preocupación por otros saberes, como el contenido pedagógico y el currículo, en la perspectiva de Shulman (1986, 1987).

Conti et al. (2019), investigando la formación estadística de los pedagogos en Brasil, consideraron, en su investigación, saberes matemáticos para enseñar, saberes para enseñar matemáticas y saberes pedagógicos generales. Estos investigadores encontraron que la educación estadística aún no es valorada en la mayoría de los currículos de los cursos de pedagogía,

particularmente en cuanto a los conocimientos para enseñar estadística, de los cuales dependen directamente las prácticas pedagógicas realizadas en el aula. Ellos reconocen que las demandas señaladas por los planes de estudios prescritos para los años iniciales de la escuela primaria no están alineadas con los menús de gran parte de los cursos de pedagogía nacionales. Estos autores llaman la atención sobre la necesidad de revisar urgentemente los componentes curriculares de los cursos de pedagogía, con el fin de desarrollar conocimientos tanto estadísticos como pedagógicos relacionados con la estadística – saber para enseñar y para enseñar estadística. Silva (2011) analizó el efecto que las directrices del currículo nacional brasileño tuvieron en los cursos de licenciatura en Matemáticas. Según este autor, tales directrices simplemente descartaban temas relacionados con la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad. El analizó muchos proyectos pedagógicos, incluyendo menús y matrices curriculares, de las carreras de Matemáticas en busca de intentos de contemplar las propuestas con articulaciones interdisciplinarias que involucraran no sólo el dominio de contenidos estocásticos específicos, sino también promover una amplia discusión sobre su enseñanza, y las propuestas curriculares oficiales existentes. Sin embargo, encontró la casi ausencia de conexiones disciplinarias verticales y horizontales en dichas carreras, así como los raros intentos de abordar la presencia de contenidos estocásticos en los currículos oficiales de educación básica. Los documentos analizados parecían considerar la carrera de licenciatura como un apéndice del bachillerato en Matemáticas. Agregamos que tal postura ignora totalmente la perspectiva de saberes docentes de Shulman (1986, 1987).

Silva (2011) afirma que la presencia efectiva de asignaturas como Estadística y Probabilidad promueve el diálogo entre los saberes matemáticos necesarios para el futuro docente y los saberes pedagógicos, además de contribuir a la integración horizontal y vertical, o sea, articulaciones intramatemáticas e interdisciplinarias.

Giordano, Araújo y Coutinho (2019) consideran que, a pesar de todos los problemas que envolvió el proceso de elaboración de la BNCC (Brasil, 2018), reconocen algunos posibles avances para la enseñanza de la estocástica, en la medida en que amplía su programa, dedicándose a la probabilidad y la estadística una de las cinco unidades de conocimiento, asegurando, gracias a su carácter normativo, su presencia desde el jardín de infancia hasta el final de la secundaria. La BNCC (Brasil, 2018) detalla las etapas del proceso de producción científica, enfatizando el abordaje por proyectos, presentando indicaciones claras sobre la introducción y exploración de diferentes tipos de gráficos, sobre la elaboración de tablas de distribución de frecuencias, sobre el cálculo y articulación de diferentes medidas de tendencia central y dispersión, así como la presentación de la probabilidad

tanto en la perspectiva clásica como frecuentista, como defienden Lopes y Coutinho (2009), con el objetivo de satisfacer las competencias y habilidades a ser desarrolladas por los estudiantes. Además, Giordano, Araújo y Coutinho (2019) también observaron pautas para la articulación de la estadística y la probabilidad con otras asignaturas curriculares, en una perspectiva interdisciplinaria y/o transdisciplinaria, así como posibles articulaciones intramatemáticas, acercándolas a áreas como la educación financiera.

Costa, Sousa y Cordeiro (2020) reiteran que todavía podemos identificar resquicios del método tradicionalista de enseñanza de las matemáticas en la educación básica brasileña, cuestionando si las actuales directrices curriculares nacionales podrían promover un enfoque más efectivo, capaz de ofrecer a los estudiantes acceso pleno a los conocimientos necesarios para afrontar las exigencias de su realidad sociocultural y los retos de su tiempo. Vale agregar que tales desafíos se han vuelto aún mayores en el contexto de la pandemia, como lo señalan Giordano y Kian (2020), al analizar las estrategias de enseñanza a distancia, las condiciones de acceso de los estudiantes de escuelas públicas a las Tecnologías Digitales de Información y Comunicación - TDIC, la formación docente, así como las políticas públicas educativas ante la pandemia del COVID-19. Momentos como estos resaltan las limitaciones de los programas de educación continua para maestros de escuelas públicas.

El BNCC (Brasil, 2018) propone un currículo común tomando el 60% de los contenidos de la educación básica, reservando el 40% restante para atender necesidades específicas, especialmente a través de itinerarios formativos. A pesar de la innegable importancia de la BNCC, Costa, Sousa y Cordeiro (2020) enfatizan que no debemos olvidar la autonomía de la propia escuela, el respeto a su identidad institucional, su proyecto político-pedagógico y los proyectos exitosos que ya vienen en desarrollo, que reflejan mucho la realidad local del entorno escolar.

Aunque este tipo de iniciativas contribuyen, en mayor o menor medida, a la formación docente, son necesarias intervenciones formativas locales, adaptadas a las culturas escolares específicas. Creemos que lo mismo se aplica a la formación de profesores en un nivel superior. La planificación de las carreras de Pedagogía, así como de las carreras de Matemáticas, deben atender a los deseos y necesidades de la comunidad escolar de cada institución educativa, así como de las entidades representativas de la sociedad civil junto con las universidades, asegurando que el proceso de consolidación de la base común se pase de forma democrática y participativa.

Tales problemas plantean inquietudes sobre la formación de los docentes que enseñarán Matemáticas y, por extensión, Probabilidad y Estadística, en la educación básica. Sin embargo, tenemos preocupaciones más elementales que éstas, que involucran los saberes docentes relacionados

con el dominio de contenidos estocásticos. Herzog (2019) identificó entre los egresados de la carrera de Matemáticas un desconocimiento total sobre el concepto de determinismo, confusión sobre el concepto de aleatoriedad, así como la relación entre estadística y probabilidad, e incluso dificultad para definir la estadística misma. Este autor consideró que la formación de los profesores en matemáticas es insuficiente para enseñar estadística y probabilidad, ya que suele haber solo una o dos asignaturas en las licenciaturas de esta área, con clases muchas veces impartidas junto con estudiantes de otras áreas, especialmente ingenierías. Una formación tan superficial no puede desarrollar satisfactoriamente los conceptos centrales de la estocástica, ni conectarlos a la realidad de los estudiantes, requisito previo necesario para una enseñanza eficaz, que cumple mínimamente con los requisitos de la BNCC (Brasil, 2018). Una situación similar se encuentra en las carreras de pedagogía.

Clesar y Giraffa (2020) nos recuerdan que muchos de los problemas asociados al aprendizaje de las matemáticas tienen su origen en los primeros años de la escuela primaria, que los estudiantes deben aprender conceptos elementales que fundamentarían sus estudios en etapas posteriores, desde el concepto de número hasta nociones de geometría y estocástica. Sin embargo, las universidades tienden a considerar que los recién llegados a la Pedagogía ya tienen suficientes conocimientos de matemáticas y estadística en su bagaje escolar. Algunas instituciones llegan a ofrecer, de manera opcional, cursos de nivelación en portugués, matemáticas e ate mismo recursos informáticos. Según estos autores, y coincidimos con ellos, esto es un error, pues dada la precariedad de la enseñanza de las matemáticas, una gran cantidad de estudiantes ingresan sin los conocimientos necesarios para cumplir satisfactoriamente con las exigencias de la carrera. La brecha en la formación estocástica del pedagogo puede generar inseguridad e incluso aversión a las matemáticas, comprometiendo directamente la enseñanza de la estadística y la probabilidad. Tales problemas tienden a agravarse en el contexto de la pandemia del COVID-19, ya que se ven agravados por las carencias derivadas de una formación igualmente precaria de las TDIC, tan necesarias para atender las demandas actuales de educación a distancia de emergencia y/o educación híbrida.

En la próxima sesión presentamos nuestros procedimientos metodológicos

## **METODOLOGÍA E PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS**

Se trata de una investigación cualitativa desde la perspectiva de Creswell y Creswell (2021), un estudio exploratorio, que busca identificar ampliamente las percepciones de los docentes y futuros docentes sobre su formación para enseñar Estadística considerando el contexto pandemia/post-pandemia. Los 92 sujetos de investigación son 63 docentes que enseñan Estadística en Educación Básica (31 licenciados en Matemáticas (grupo I), 32 licenciados en Pedagogía (grupo II) y 29

estudiantes de licenciatura en Pedagogía y Matemáticas (grupo III). Fue contestado un cuestionario digital, que fue enviado a través de un link del Google Formularios. Este instrumento de recolección de datos fue desarrollado por los autores de este artículo con 23 preguntas para la formación inicial (grupo III), y 21 preguntas para la formación continua en Pedagogía y Matemáticas (grupos I y II), respondidas entre el 22 de abril y el 12 de junio de 2022 a partir de grupos de Whatsapp para la formación inicial y continua de docentes, promovidos en universidades públicas de los estados brasileños de Rio Grande do Sul, Pará, São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais y Pernambuco.

En la siguiente sección, presentaremos algunos resultados de nuestra investigación.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Aunque el salario de los docentes en Brasil deja mucho que desear (el salario mínimo nacional es de R\$ 3 845,63 para Educación Básica — primaria y secundaria —, alrededor de 750 dólares americanos), aún parece atractivo para los estudiantes. Aproximadamente la mitad de ellos (48,3%) tenía renta familiar inferior a R\$ 3 000,00, mientras que el 37,9% tenía renta familiar superior a eso, pero que no superaba los R\$ 6 000,00. Gran parte de estos estudiantes procedían de escuelas públicas en su totalidad (69%) o parcialmente (24,1%) y, al llegar a la educación superior, el 96,6% de ellos ingresaron a universidades públicas. A pesar de su origen humilde y condiciones socioeconómicas, lo que estos estudiantes parecen buscar en su carrera docente es el reconocimiento social (44,9%), como se muestra en la Tabla 1.

**Tabla 1.** *Motivadores de los estudiantes de licenciatura en Pedagogía y Matemáticas para elegir una carrera docente*

Motivadores	Respuestas
Reconocimiento social	44,9%
Influencia de profesores	17,2%
Estabilidad laboral	17,2%
Otras razones	17,2%
Influencia de los padres	03,5%
Salario	00,0%
<b>Total</b>	<b>100%</b>

**Fuente:** Datos de la encuesta

Durante la pandemia, estos estudiantes enfrentaron muchas dificultades para concentrarse en sus estudios y lograr mantener el rendimiento escolar del período anterior a la pandemia. La pérdida de motivación en el entorno virtual (31%) y la baja interactividad con profesores y compañeros (20,7%) fueron los principales retos a los que se enfrentaron. Los bajos salarios pagados a los docentes brasileños no fueron mencionados como motivador por ninguno de los sujetos de la investigación.

**Tabla 2.** Principales dificultades encontradas en su graduación, durante la pandemia del COVID-19

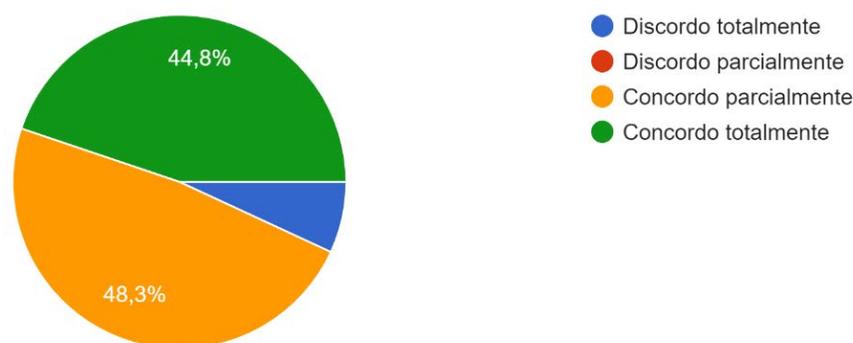
Dificultades encontradas	Respuestas
Motivación para estudiar	31,0%
Interacción con compañeros y profesores	20,7%
Conectividad (acceso estable a conexión de banda ancha de calidad)	17,3%
Dominio de los recursos tecnológicos	13,8%
Otras dificultades	10,3%
Acceso a computadora/tableta/smartphone de calidad	06,9%
Evaluación	00,0%
<b>Total</b>	<b>100%</b>

**Fuente:** Datos de la encuesta

Estos estudiantes (79,3%) juzgaron que las universidades no supieron enfrentar los nuevos desafíos del contexto de la pandemia, lo que implica una pérdida en su formación académica. Tres de cada cuatro de estos egresados coinciden plenamente en que hubo perjuicio en su formación, producto de la mala adaptación de los cursos al contexto de pandemia. Uno de cada cinco de ellos está parcialmente de acuerdo con esta hipótesis.

En cuanto al papel de la Probabilidad y la Estadística en la comprensión del contexto de la pandemia, en el periodo 2019-2022, 93,1% están de acuerdo totalmente o parcialmente, en que tuvo un papel protagónico.

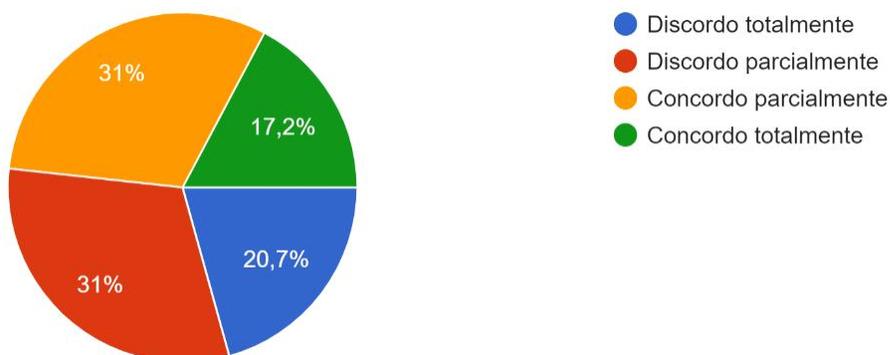
**Figura 1.** Reconocimiento, por parte de los estudiantes de Pedagogía y Matemáticas, del papel de la Probabilidad y la Estadística para una mejor comprensión del contexto de la pandemia en el período 2019-2022



**Fuente:** Datos de la encuesta

A pesar de este reconocimiento, ellos no consideran que su formación haya sido suficiente para afrontar las dificultades que se presentarán.

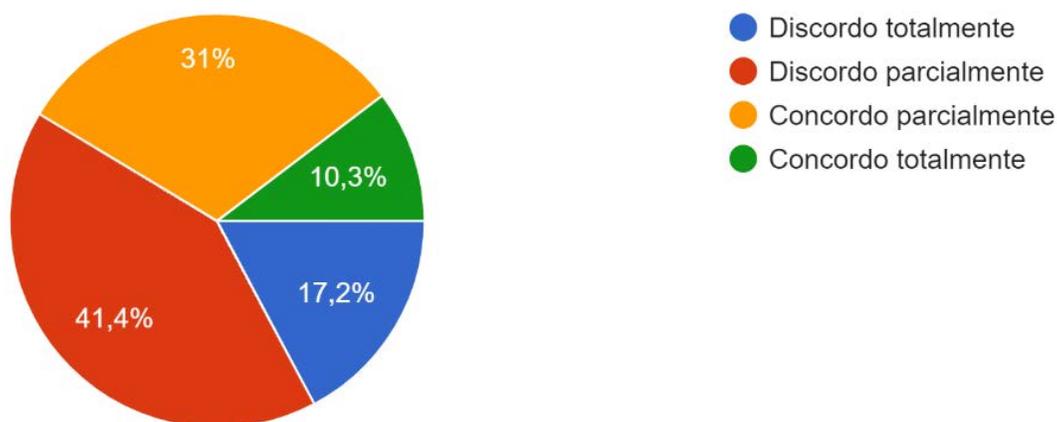
**Figura 2.** Creencia, por parte de los estudiantes de Pedagogía y Matemáticas, en la posibilidad de que lo aprendido en el curso de educación superior sea suficiente para atender las demandas de la Base Curricular Común Nacional (BNCC)



**Fuente:** Datos de la encuesta

Para concluir esta etapa de análisis del grupo III, el 58,6% de los estudiantes de pregrado no cree que lo aprendido en la universidad sea suficiente para enseñar en el mundo pospandemia, evidenciando la necesidad de una educación continua.

**Figura 3.** Creencia, por parte de los estudiantes de Pedagogía y Matemáticas, en la posibilidad de que lo aprendido en la educación superior sea suficiente para enseñar en el mundo pospandemia



**Fuente:** Datos de la encuesta

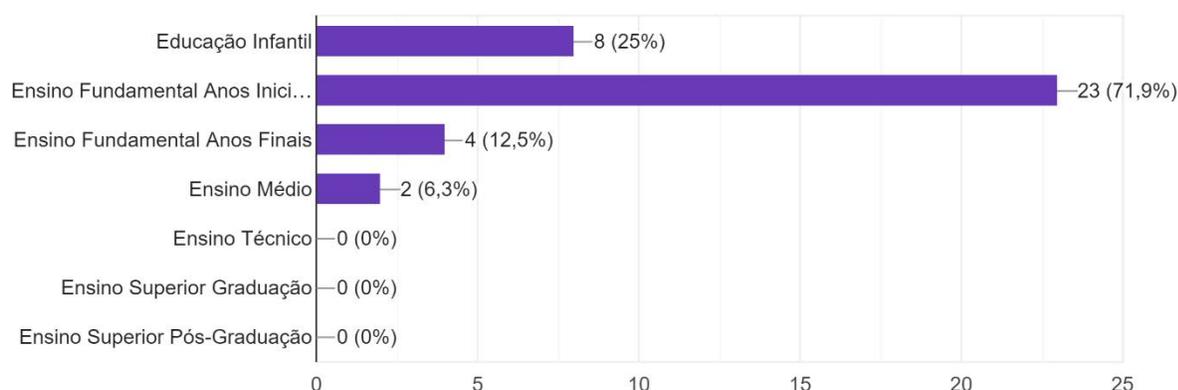
Estos datos muestran las perspectivas de los futuros profesores brasileños, ¿qué piensan los que están en el aula en este momento?

Entre los profesores de Matemáticas, 67,7% estudiaron integralmente en escuelas públicas en Educación Básica, mientras que 12,9% mezclaron la educación pública y privada en este segmento y, al elegir su universidad, el 87,1% de ellos eligió universidades públicas. Este número es

significativamente menor cuando hablamos de pedagogos (62,5%), aunque el 87,5% de ellos ha asistido a escuelas públicas en su Educación Básica.

La mayoría de los graduados en Pedagogía (71,9%) actuaban en los Años Iniciales de primaria (que atienden a niños de 6 a 10 años). Uno de cada cuatro de ellos actuaba en la Educación Infantil (atiende a niños de hasta seis años). Solo uno de cada ocho también enseñaba en los últimos años (estudiantes de 11 a 14 años), solo dos de los 32 encuestados trabajaban en la escuela secundaria (estudiantes de 15 a 17 años), el 15,7% de estos docentes enseñaban en más de un segmento educativo, pero ninguno de ellos en educación técnica o educación superior.

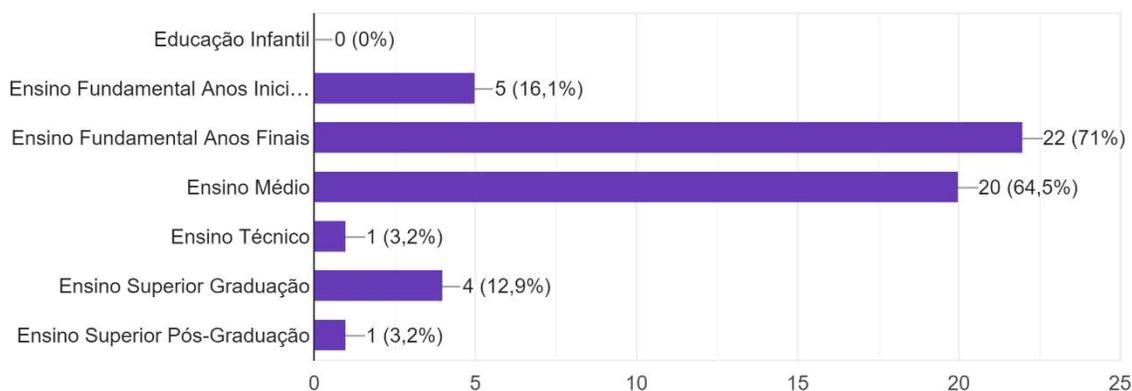
**Figura 4.** *Distribución de docentes formados en Pedagogía, por segmento de enseñanza*



**Fuente:** Datos de la encuesta

Esta perspectiva cambia un poco en relación a los graduados en Matemáticas. Seis de los 31 docentes trabajan en Educación Técnica o Educación Superior y 22 docentes trabajan en más de un segmento educativo.

**Figura 5.** *Distribución de docentes formados en Matemáticas, por segmento de enseñanza*



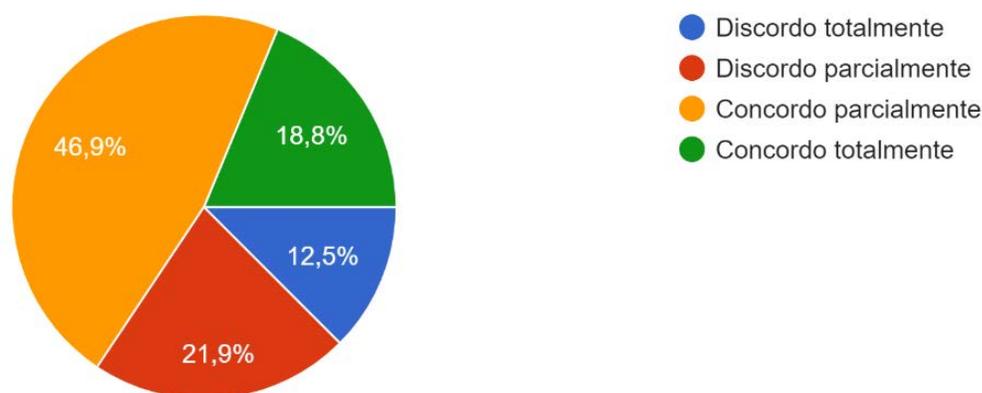
**Fuente:** Datos de la encuesta

La influencia de los docentes fue el motivo más citado por los profesores de Matemáticas para justificar su elección profesional (35,5%), cifra que duplica la presentada por los pedagogos (18,8%).

En cuanto a la adaptación al contexto educativo de la pandemia, las opiniones de los 32 pedagogos encuestados estuvieron divididas. La mitad cree que la formación continuada a la que tuvo acceso fue suficiente para hacer frente al modelo de Enseñanza Remota de Emergencia (ERE), resultado casi idéntico al de los 31 profesores de Matemáticas (51,7%) que también juzgaron que su formación continuada cumplía con sus necesidades en este sentido. En cuanto a la adaptación a esta nueva realidad educativa que se avecina, con la Enseñanza Híbrida, los grupos I y II también son similares: el 61,3% de matemáticos y el 62,5% de pedagogos consideran que su formación continuada fue adecuada para prepararlos para actuar en sus clases en este nuevo modelo.

Considerando la relevancia de su nivel de conocimiento sobre Probabilidad y Estadística para una mejor comprensión del contexto de la pandemia, el 46,9% de los docentes está parcialmente de acuerdo y el 18,8% totalmente de acuerdo.

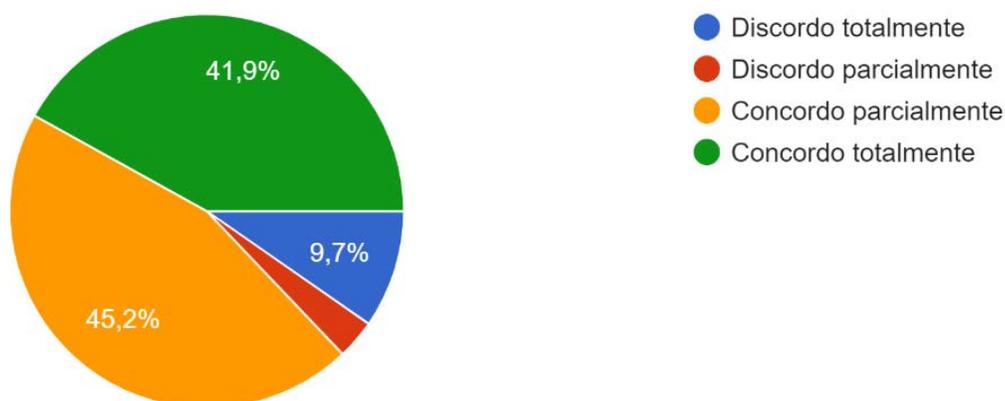
**Figura 6.** *Respuestas de pedagogos sobre la posibilidad de que sus conocimientos de Probabilidad y Estadística les ayudaran a comprender el contexto de la pandemia en el periodo 2019-2022*



**Fuente:** Datos de la encuesta

Este escenario cambia mucho cuando escuchamos a los docentes de Matemáticas, al considerar la relevancia de su nivel de conocimiento sobre Probabilidad y Estadística para una mejor comprensión del contexto de la pandemia: el 45,2% de los matemáticos está parcialmente de acuerdo y el 41,9% totalmente de acuerdo.

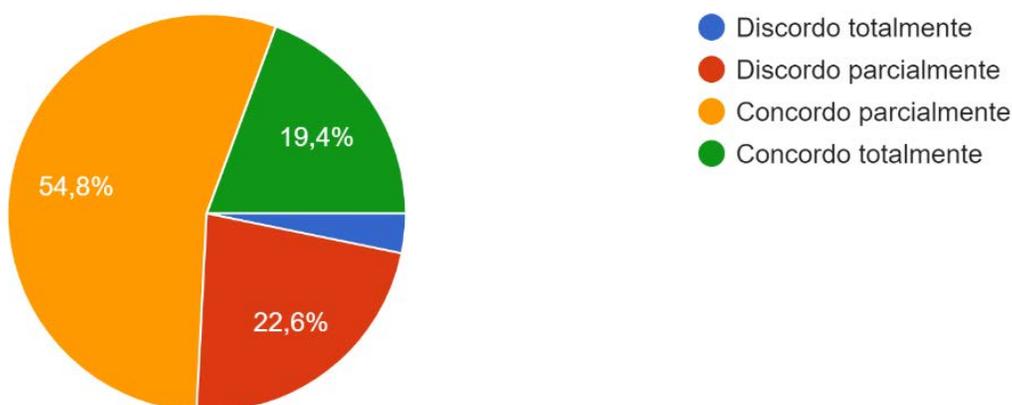
**Figura 7.** *Respuestas de docentes de Matemáticas sobre la posibilidad de que sus conocimientos de Probabilidad y Estadística les ayudaran a comprender el contexto de la pandemia en el período 2019-2022*



**Fuente:** Datos de la encuesta

Cuando se les preguntó sobre el papel de la formación continuada en la preparación para la utilización e implementación de acciones didácticas que incluyen el BNCC, la mitad de los pedagogos está parcialmente de acuerdo, pero solo el 3,1% está totalmente de acuerdo. Los demás 46,9% restante estuvo total o parcialmente en desacuerdo. Para los matemáticos, de nuevo, la situación es bastante diferente: el 54,8 % está parcialmente de acuerdo y el 19,4 % está totalmente de acuerdo.

**Figura 8.** *Respuestas de los profesores de Matemáticas sobre la posibilidad de que sus conocimientos de Probabilidad y Estadística sean suficientes para atender las demandas de la Base Nacional Común Curricular (BNCC)*

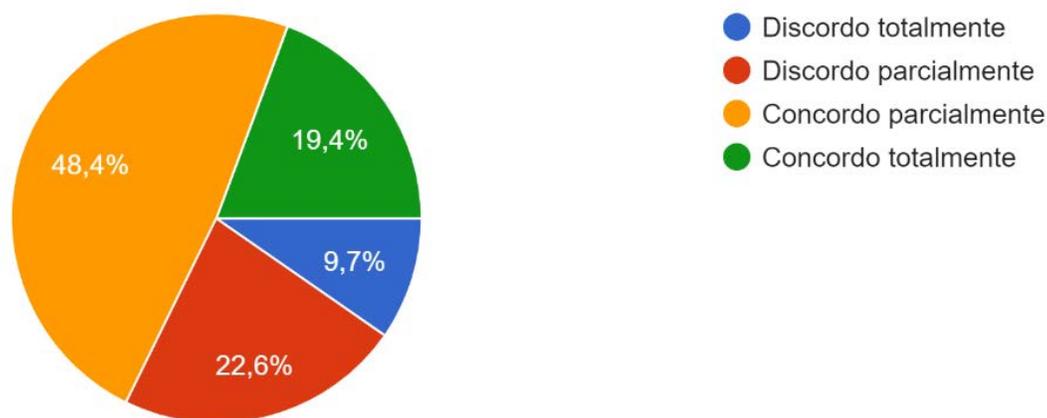


**Fuente:** Datos de la encuesta

Finalmente, cuando se preguntó a los pedagogos y matemáticos si sus conocimientos de Probabilidad y Estadística eran suficientes para enseñar en el mundo pospandemia, nuevamente la opinión de los pedagogos estuvo igualmente dividida, mientras que el 67,8% de los profesores de

Matemáticas estuvo de acuerdo (48,4% parcialmente y 19,4% totalmente), es decir, solo alrededor de un tercio de ellos no estuvo de acuerdo.

**Figura 9.** *Respuestas de profesores de Matemáticas sobre la posibilidad de que sus conocimientos de Probabilidad y Estadística sean suficientes para enseñar en el mundo pospandemia*



**Fuente:** Datos de la encuesta

Con base en esta información, haremos nuestras observaciones finales en la siguiente sección.

## CONCLUSIONES

La pandemia del COVID-19 ha transformado la educación en el mundo, poniendo en tela de juicio ideas sobre la enseñanza y el aprendizaje consideradas como verdades incuestionables (Borba, 2021). Trajo consigo pseudosoluciones que nacieron de una situación de emergencia, pero con la intención de perpetuarse, anteponiendo los intereses económicos a los educativos (Saviani; Galvão, 2021). Sin embargo, una de las ideas que cayó fue que los docentes brasileños, en su mayoría, no dominaban el TDIC y que, por lo tanto, no serían capaces de crear alternativas didácticas. Otra falacia era que los estudiantes, por su juventud, no tendrían grandes dificultades para enfrentarse a esta nueva realidad que podría resultarles aún más interesante, asegurándose la participación en actividades digitales sincrónicas y asincrónicas. Los años 2020 y 2021 nos demostraron lo contrario. Una tercera idea que no se sostuvo fue que los maestros no encontraron tiempo ni motivación para formación continua en línea.

La insuficiente formación inicial estocástica de pedagogos (Biajone, 2006; Conti et al., 2019; Clesar & Giraffa, 2020) y matemáticos (Costa, 2007; Silva, 2011; Herzog, 2019; Costa, Souza & Cordeiro, 2020), precaria por las condiciones de trabajo durante la pandemia de COVID-19 (Giordano & Kian, 2020; Borba, 2021; Saviani & Galvão, 2021), asociadas a los desafíos de la reforma curricular (Giordano, Araújo & Coutinho, 2019) mostraron profundas fallas en la preparación docente brasileña

para enseñanza de Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Los saberes acerca del campo del conocimiento estocástico fueron reconocido como necesario para comprender el mundo en que vivimos, así como la realidad educativa pospandemia que se anuncia.

El maestro no sólo quiere cumplir con el currículo prescrito. Quiere marcar la diferencia, quiere el merecido reconocimiento social, factor que llevó a la mayoría de los pedagogos y matemáticos a abrazar esta carrera profesional. Como pudimos ver, en 2020 y 2021, los profesionales de la educación, así como los profesionales de la salud, empezaron a ser vistos por la sociedad con nuevos ojos e incluso viejos defensores del *homeschooling* acabaron abandonando sus puestos, después de intentar sin éxito, durante casi dos años, a ayudar sus hijos con las tareas escolares.

Los estudiantes de licenciatura en Pedagogía y Matemáticas consideraron fallas en su formación, al mismo tiempo que culparon a sus universidades por no lograr adaptarse a las nuevas condiciones de enseñanza durante la pandemia. Por otro lado, los docentes de los Años iniciales de primaria (pedagogos), Años finales de primaria y Secundaria (matemáticos) consideran, en su mayoría, que la formación continua ha cubierto la mayoría de sus necesidades y se sienten más confiados y seguros para afrontar la realidad educativa pospandemia, en la que destacan nuevas metodologías de enseñanza y aprendizaje, como la Enseñanza Híbrida. Sienten que todavía están en condiciones de atender las demandas de la BNCC, en particular, las contenidas en la unidad temática Probabilidad y Estadística.

Ante esta situación, creemos necesario que las autoridades educativas brasileñas redoblen esfuerzos para ofrecer formación continua a pedagogos y matemáticos, en un intento de superar posibles fallas en su formación inicial docente, lo que no descarta la necesidad por una amplia reforma curricular en la educación superior, que garantice a Estadística, Probabilidad y Combinatoria el espacio que merecen en el escenario educativo brasileño, en la sociedad pospandemia.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C., Estepa, A.; Godino, J. D. (1991). *Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria*. Suma, 9, 25-31.
- Batanero, C.; Godino, J. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Biajone, J. (2006). *Trabalho de projetos: possibilidades e desafios na formação do pedagogo*. (Dissertação de Mestrado). Campinas: Universidade Estadual de Campinas.
- Borba, M. C. (2021). The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things. *Educational Studies in Mathematics*, 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10043-2>

- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base*. Brasília: Ministério da Educação. [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf)
- Brasil. (2019a). *Referenciais Curriculares para a Elaboração de Itinerários Formativos*. Brasília: Ministério da Educação. <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/DCEIF.pdf>
- Brasil. (2019b). *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: Contexto Histórico e Pressupostos Pedagógicos*. Brasília: Ministério da Educação. [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao\\_temas\\_contemporaneos.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf)
- Brasil. (2019c). *Resolução CNE/CP n. 2, de 20 de dezembro de 2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação)*. Brasília: Ministério da Educação. <https://n9.ci/ef9ny>
- Burgess, T. (2009). Teacher knowledge and statistics: what types of knowledge are used in the primary classroom? *The Mathematics Enthusiast*, 6(1), 3-24. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1130>
- Clesar, C. T. S y Giraffa, L. M. M. (2020). Os cursos de licenciatura em pedagogia e a formação matemática do professor de anos iniciais: refletindo acerca das brechas na formação inicial. *Brazilian Journal of Development*, 6(6), <https://doi.org/10.34117/bjdv6n6-113> Conti, K. C.; Nunes, L. N.; Goulart, A.; Estevam, E. J. G. (2019). Um cenário da Educação Estatística em cursos de Pedagogia. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14, 1-15. <https://doi.org/10.34117/bjdv6n6-113>
- Costa, A. (2007). *A educação estatística na formação do professor de matemática*. Dissertação (Mestrado). Itatiba: Universidade São Francisco.
- Costa, R. P., Sousa, C.; Cordeiro, L. Z. (2020). O ensino de Matemática na Base Nacional Comum Curricular nos anos finais do Ensino Fundamental. *Ensino em Re-Vista*, 27(2) 572-594. <http://dx.doi.org/10.14393/ER-v27n2a2020-8>
- Creswell, J. W.; Creswell, J. D. (2021). *Projeto de pesquisa - Métodos qualitativo, quantitativo e misto*. 5ª. ed. Porto Alegre: Penso Editora.
- Gal, I. (2005). Towards probability literacy for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In *Exploring probability in school*. Jones, G. A. (Ed.) (pp. 39-63). Springer.
- Gal, I. (2021). Promoting statistical literacy: Challenges and reflections with a Brazilian perspective. In Monteiro, C. E. F.; Carvalho, L. M. T. L. *Temas Emergentes em Letramento Estatístico*. Monteiro, C. & Carvalho, L. (Orgs.) (pp. 37-59). Recife: Editora UFPE. <https://editora.ufpe.br/books/catalog/view/666/677/2080>
- Gal, I.; Garfield, J. B. (1997). *The assessment challenge in Statistics Education*. Netherland: IOS Press.
- Giordano, C. C., Araújo, J. R. A., Coutinho, C. Q. S. (2019). Educação estatística e a base nacional comum curricular: o incentivo aos projetos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14, 1-20. <http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e62727>
- Giordano, C. C., Kian, F. A. (2020). BNCC e currículo paulista: novas oportunidades para a educação estatística e educação financeira. In: Santos J. E. B. (org.), *Ensino de ciências e educação matemática 4*. Ponta Grossa, Atena Editora, pp. 1-11.

- Herzog, R. C. B. (2019). *A percepção de licenciandos em matemática sobre a aleatoriedade*. Dissertação (Mestrado). Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.
- Lopes, C. A. E. (2008). ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos Cedes*, 28(74), 57-73. <https://www.scielo.br/j/ccedes/a/gwfkW9py5dMccvmbqyPP8bk/?format=pdf&lang=pt>
- Lopes, C. A. E.; Coutinho, C. Q. S. (2009). Leitura e escrita em educação estatística. In: LOPES, C. A. E.; NACARATO, A. M. *Educação Matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidade*. Campinas, SP: Mercado de Letras, pp. 61-78.
- Saviani, D.; Galvão, A. C. (2021). Educação na pandemia: a falácia do “ensino” remoto. *Revista Universidade e Sociedade*, 67, 36-49.
- Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Silva, M. A. A. (2011). Presença da Estatística e da Probabilidade no Currículo Prescrito de Cursos de Licenciatura em Matemática: uma análise do possível descompasso entre as orientações curriculares para a Educação Básica e a formação inicial do professor de Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 24(40), 747-764. <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291222113007.pdf>

## **TRAINING TEACHERS WHO TEACH STATISTICS IN BRAZIL: NEW CHALLENGES IN THE POST-PANDEMIC SCENARIO**

### **ABSTRACT**

Brazil is experiencing a moment of extensive curricular reform, driven by the publication of the Common National Curriculum Base – BNCC. This federal document, which guides the entire national Basic Education, expanded the space dedicated to the teaching and learning of Stochastics (Probability, Statistics and Combinatorics), and brought new demands to teachers, such as the performance of computational simulations in a frequentist probabilistic perspective, the realization of learning projects by students, from the beginning of primary schooling to the end of high school (from six to seventeen years old), with statistical research based on primary data, collected by them. Such practices have been defended by the entire Brazilian academic community for decades, but only in 2018 they were officially incorporated. However, there is no counterpart in the initial and continuing training of teachers. The workload assigned to Stochastics in Mathematics Degree subjects is the minimum allowed by the curricular proposals, while in Pedagogy subjects it is practically nil. This contradiction is exacerbated at a time when statistics are in evidence in the media, as a result of the COVID-19 pandemic. This reality motivated us to carry out a qualitative research, an exploratory study, which seeks to broadly identify the perceptions of teachers and future teachers about their training to teach Statistics considering the pandemic/post-pandemic context, with 92 subjects (students of Pedagogy and Mathematics, pedagogues and graduates in Mathematics), with the aim of evaluating the preparation of teachers to face this new reality and their expectations of change in the coming years. Among the results, we highlight that our research revealed educators not only willing to comply with the prescribed curriculum, but also to make a difference and be recognized by society. They also pointed out deep flaws in the initial training of pedagogues and mathematicians, in particular, in regard to stochastic education, aggravated by the COVID-19 pandemic and the precariousness of national distance learning, which leads us in two directions: the need for a broad curricular reform in Brazilian higher education and the urgency of large investments in the continuous training of these professionals. Only in this way will they be able to meet the demands of the BNCC, in particular, those contained in the Probability and Statistics thematic unit.

Keywords: Initial Training; Continuing Education; Curriculum Reform; Emergency Remote Teaching; Teaching of Probability and Statistics.

## **FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM ESTATÍSTICA NO BRASIL: NOVOS DESAFIOS NO CENÁRIO PÓS-PANDEMIA**

O Brasil vive um momento de ampla reforma curricular, impulsionada pela publicação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Esse documento federal, que orienta toda a Educação Básica nacional, ampliou o espaço dedicado ao ensino e aprendizagem da Estocástica (Probabilidade, Estatística e Combinatória), e trouxe novas demandas aos professores, como a realização de simulações computacionais em uma perspectiva probabilística frequentista, a realização de projetos de aprendizagem pelos estudantes, desde o início do Ensino Fundamental até o final do Ensino Médio (dos seis aos dezessete anos), com pesquisa estatística baseada em dados primários, coletados por eles. Tais práticas são defendidas por toda a comunidade acadêmica brasileira há décadas, mas somente em 2018 foram incorporadas oficialmente. No entanto, não há contrapartida na formação inicial e continuada de professores. A carga horária atribuída às disciplinas de Estocástica nas Licenciaturas em Matemática é a mínima permitida pelas propostas curriculares, enquanto nas disciplinas de Pedagogia

é praticamente nula. Essa contradição é agravada em um momento em que a Estatística está em evidência na mídia, em decorrência da pandemia do COVID-19. Essa realidade nos motivou a realizar uma pesquisa qualitativa, um estudo exploratório, que busca identificar amplamente as percepções de professores e futuros professores sobre sua formação para ensinar Estatística, considerando o contexto pandêmico/pós-pandemia, com 92 sujeitos (estudantes de Pedagogia e Matemática, pedagogos e licenciados em Matemática), com o objetivo de avaliar a preparação dos professores para enfrentar esta nova realidade e as suas expectativas de mudança nos próximos anos. Dentre os resultados, destacamos que nossa pesquisa revelou educadores não apenas dispostos a cumprir o currículo prescrito, mas também a fazer a diferença e serem reconhecidos pela sociedade. Apontaram ainda profundas falhas na formação inicial de pedagogos e matemáticos, em particular, no que diz respeito à educação estocástica, agravada pela pandemia de COVID-19 e pela precariedade do ensino nacional à distância, o que nos leva a duas direções: a necessidade de uma ampla reforma curricular no ensino superior brasileiro e a urgência de grandes investimentos na formação continuada desses profissionais. Só assim poderão atender às demandas da BNCC, em especial, as contidas na unidade temática Probabilidades e Estatística.

Palavras-chave: Formação Inicial; Formação Continuada; Reforma Curricular; Ensino Remoto Emergencial; Ensino de Probabilidade e Estatística.

*CASSIO CRISTIANO GIORDANO*

*Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Brasil*

[ccgiordano@furg.br](mailto:ccgiordano@furg.br)

<https://orcid.org/0000-0002-2017-1195>

Es licenciado en Psicología, en Pedagogía, en Ciencias y Matemáticas. Maestría y Doctorado en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de São Paulo y Post-Doctorado en Educación en Ciencias por la Universidad Federal de Rio Grande. Es Profesor de Educación Básica en la Secretaría de Estado de Educación de São Paulo y Posgrados en la Universidad Federal de Rio Grande y Facultades Integradas de Guarulhos. Miembro del Grupo de Trabajo de Educación Estadística, de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática, de la Sociedad Brasileña de Matemática, de la Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística, del Grupo de Investigación en Historia de la Educación Matemática, del Grupo de Investigación Estadística (GEDIM-STATISTIC/UFPA), del Grupo Internacional de Investigación Interdisciplinaria en Educación Estadística, (GIIPEE/FURG), del Instituto Internacional de Estadística y de la Asociación Internacional para la Educación Estadística. Actúa en las áreas de Educación Matemática, Educación Estadística y Financiera, Formación Docente.

*FABIANO DOS SANTOS SOUZA*

*Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, Brasil*

[fabiano\\_souza@id.uff.br](mailto:fabiano_souza@id.uff.br)

<http://orcid.org/0000-0002-5474-7009>

Es Doctor en Educación por la Universidad Federal Fluminense (UFF). Magíster en Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica de Río de Janeiro (PUC-RJ). Licenciado en Matemáticas por la Universidad del Estado de Río de Janeiro (UERJ). Profesor Adjunto de la Facultad de Educación de la UFF y del Programa de Posgrado en Enseñanza de la UFF. Profesor Colaborador del Máster Profesional en Educación Matemática de la Universidad Federal de Juiz de Fora (UFJF). Coordinadora de Área de Subproyectos del Programa Institucional de Becas de Iniciación Docente 08/2012 al

02/2013 y 09/2020 al 03/2022 y del Programa Institucional de Residencia Pedagógica (08/2018 - 02/2020) en la UFF. Asistente de Coordinación del Curso de Especialización en Gestión Escolar (UFF/SEB/MEC/EaD - 2015-2017). Actúa en las áreas de Educación Matemática, Educación Estadística y Financiera, Formación Docente. Líder del Grupo de Investigación Enseñanza y Aprendizaje en Matemáticas y Estadística. Colaborador del Grupo de Investigación PEAMAT/PUC-SP.

*PAULO CÉSAR OLIVEIRA*

*Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, Brasil*

[paulooliveira@ufscar.br](mailto:paulooliveira@ufscar.br)

<https://orcid.org/0000-0003-2514-904X>

Profesor Asociado de la Universidad Federal de São Carlos (Campus de Sorocaba). Tiene Maestría y Doctorado en Educación Matemática. Trabaja en la carrera de Licenciatura en Matemáticas, en el Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias Exactas - PPGECE y en la Maestría Profesional en Matemáticas, de la cual es Vice-Coordinador. Desde 2012, es líder del Grupo de Estudios y Planificación de Lecciones de Matemáticas - GEPLAM ([www.geplam.ufscar.br](http://www.geplam.ufscar.br)). Miembro de GT12 - Educación Estadística de la Sociedad Brasileña de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática (SBEM). Miembro de la Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE). Desarrolla investigaciones con los temas: Registros de Representación Semiótica, Evaluación, Alfabetización (Estadística o Probabilística) y Creencias de Autoeficacia.

*REINALDO FEIO LIMA*

*Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Marabá, Brasil*

[reinaldo.lima@unifesspa.edu.br](mailto:reinaldo.lima@unifesspa.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0003-2038-7997>

Es Profesor Adjunto de Educación Matemática de la Universidad Federal del Sur y Sudeste de Pará. Doctor en Educación por la Universidad Federal de Bahía. Maestría en Educación en Ciencias y Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica de Rio Grande do Sul. Graduado en Matemáticas por la Universidad Estadual de Pará. Licenciado en Administración de Empresas por la Universidad de Brasilia. Graduado en Pedagogía por la Universidad Cesumar. Miembro del Grupo de Trabajo de Educación Estadística de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática. Líder del Grupo de Estudios e Investigaciones de Educación Matemática, Estadística e Inclusión, Miembro de los Grupos de Investigación en Educación de Sordos, de Investigación en Educación Especial, de Estudios e Investigación en Didáctica y Educación Matemática Inclusiva de la UNIFESSPA. Temas de interés: Educación Matemática, Educación Matemática Inclusiva; Educación Estadística; Materiales educativos; Tecnologías digitales; Procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y Formación de Profesores.





**ucm**

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE



**Facultad  
de Ciencias  
Básicas**

